

超辐射的压缩

顾樵

(西北大学物理系)

提要: 从超辐射的非线性摆方程出发,借助超辐射初始压缩的量子结果,求出了超辐射场散差的解析表达式。讨论了压缩对于时间和初始条件的依赖性,并找到了最佳压缩点。

Squeezing in superradiance

Gu Qiao

(Department of Physics, Northwest University, Xian)

Abstract: Starting with the equations for nonlinear pendulum by which superradiance can be approached the analytical expression for superradiant field dispersion is obtained by means of the quantum result for initially squeezing in superradiance, the dependence of squeezing on both time and initial conditions are discussed and the optimum squeezing point has been found.

一、引言

理论研究表明,许多相干辐射过程都会呈现压缩,但由于实验条件非常苛刻,观察到这一效应的实验至今只有几例。

最近 Heidmann 等人^[1]分析了超辐射的压缩。他们借助超辐射初始压缩的量子结果,用半经典理论分析了压缩的时间演化,并与量子理论的数值结果相比较。

但是 Heidmann 等人没有给出超辐射场散差的解析表达式,因而不能把这一问题的讨论引向深入。本文从超辐射的非线性摆方程出发,借助超辐射初始压缩的量子结果,并利用摆方程的统计诠释,求出了超辐射场

散差的解析表达式。进而讨论了压缩对于时间和初始条件的依赖性,并找到了最佳压缩点,最后还考虑了产生和观察这一效应的实验方案。

二、理论描述

利用粒子布居矩阵的 Bloch 方程^[2,3]和 Maxwell 方程,可以将超辐射问题归结为下面的非线性摆方程:

$$\frac{d\theta}{dT} = \beta, \tag{2.1a}$$

$$\frac{d\beta}{dT} = -\sin \theta, \tag{2.1b}$$

收稿日期:1986年10月20日。

这里 θ 是 Bloch 摆角, 它表征集体原子的能量。 β 是无量纲的光场振幅参量。 $T \equiv \omega t$ 是无量纲时间参量, 其中 ω 是共振频率。

由以往关于超辐射问题的量子处理已经知道, 超辐射初始真空场的零点起伏(用 $\Delta\beta_0$ 表示)以及由此引起的 Bloch 摆角的初始抖动(用 $\Delta\theta_0$ 表示)为

$$\Delta\theta_0 = \Delta\beta_0 = \frac{2}{\sqrt{N}}. \quad (2.2)$$

下面考虑 θ 和 β 在任意时刻的起伏。按照统计力学的观点, (2.1) 中的 θ 、 β 可以理解为系统(相应于 N 个原子)在任意时刻的“平均角位移”和“平均角速度”。这一对平均值作为相空间 $\{\theta, \beta\}$ 的一个代表点对应系统的一个瞬时宏观状态, 它是对 N 个子系统(相应于一个原子)的瞬时微观状态代表点在相空间求平均的结果。(2.2) 表示初始时刻 N 个子系统的微观状态代表点散布在相体积 $\Delta\theta_0 \Delta\beta_0 = \frac{4}{N}$ 之内。随着时间的推移, 这 N 个代表点在相空间描出各自的相轨道。根据刘维定理, 在不同的时刻这些代表点所占的相体积的“形状”可能不同, 但是所占相体积的大小不变, 即对于任意时刻有

$$\Delta\theta \Delta\beta = \frac{4}{N}. \quad (2.3)$$

很明显, (2.3) 相当于量子力学中的最小测不准关系。(2.2) 则表明超辐射的初态为等值最小测不准态。下面我们将要证明, 对于适当的原子-场初态, 辐射场随时间演化期间会出现非等值最小测不准态, 即压缩态。

对于通常的超辐射问题, 由于系统的初态(原子完全反转, 场是空的)没有包含位相的信息, 在辐射场随时间演变过程中, $\Delta\theta$ 和 $\Delta\beta$ 始终维持相等, 从而不能导致压缩态。现在考虑另外两类初态, 第一类是: 原子处在有位相关联的激发态, 场是空的(含零点能), 这称为“自发超辐射”; 第二类是: 原子完全反转(含初始起伏), 场为相干态, 这称为“触发超辐射”。这两类初态都包含一些位相的信息,

因而都可以导致压缩态。

在(2.1) 两式中消去 β , 并注意到初始条件可得

$$\frac{d^2\theta}{dT^2} + \sin\theta = 0, \quad (2.4a)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \beta_0. \quad (2.4b)$$

(2.4a) 两边同乘以 $d\theta = \dot{\theta}dT$, 再作积分得到

$$\frac{1}{2} \beta_0^2 - \cos\theta_0 = \frac{1}{2} \beta^2 - \cos\theta \equiv E, \quad (2.5)$$

式中 $\frac{1}{2} \beta^2$ 、 $-\cos\theta$ 分别是系统在任意时刻的“平均动能”和“平均势能”。(2.5) 表示系统的平均能量是守恒的。利用恒量 E , 可以将两类超辐射分别表为

$$E < 1 \text{ (自发: } \beta_0 = 0, 0 < \theta_0 < \pi), \quad (2.6a)$$

$$E > 1 \text{ (触发: } \beta_0 > 0, \theta_0 = \pi). \quad (2.6b)$$

(2.5) 所示的能量守恒是对平均能量而言的。事实上, 在任意时刻在平均角位移 θ 和平均角速度 β 附近分别有 $\Delta\theta$ 和 $\Delta\beta$ 的起伏量。先考虑初始时刻的能量起伏。如果“起伏”指的是“动能起”而“势能伏”, 则初始时刻的总能量为 $\frac{1}{2} (\beta_0 + \Delta\beta_0)^2 - \cos(\theta_0 - \Delta\theta_0)$ 同理, 任意时刻的总能量为 $\frac{1}{2} (\beta + \Delta\beta)^2 - \cos(\theta \pm \Delta\theta)$, 其中“ \pm ”分别对应于 $-\theta_0 \leq \theta \leq 0$ 和 $0 \leq \theta \leq \theta_0$ 。对于这种起伏, 能量守恒表达式应为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\beta_0 + \Delta\beta_0)^2 - \cos(\theta_0 - \Delta\theta_0) \\ &= \frac{1}{2} (\beta + \Delta\beta)^2 - \cos(\theta \pm \Delta\theta). \end{aligned} \quad (2.7)$$

如果能量起伏指的是“势能起”而“动能伏”, 则相应的能量守恒表达式将(2.7)中诸起伏量反号即可, 所得的表达式实质上与(2.7)是等同的。因而只须考虑前一种情况就足够了。

将(2.7) 两边展开, 略去高阶项 $(\Delta\beta_0)^2$ 和 $(\Delta\beta)^2$, 考虑到 $\sin\theta_0 \approx \Delta\theta_0$, $\sin\Delta\theta \approx \Delta\theta$,

$\cos \Delta\theta_0 \approx 1, \cos \Delta\theta \approx 1$, 再利用 (2.5)、(2.2) 及 (2.3), 得到关于 $\frac{\Delta\beta}{\Delta\beta_0}$ 的二次代数方程

$$\beta \left(\frac{\Delta\beta}{\Delta\beta_0} \right)^2 - (\beta_0 - \sin \theta_0) \frac{\Delta\beta}{\Delta\beta_0} \pm \sin \theta = 0, \quad (2.8)$$

式中

$$\beta = (\beta_0^2 - 2 \cos \theta_0 + 2 \cos \theta)^{1/2}. \quad (2.9)$$

从 (2.8) 解出 $\frac{\Delta\beta}{\Delta\beta_0}$, 再取平方得到

$$\frac{(\Delta\beta)^2}{(\Delta\beta_0)^2} = \frac{1}{4\beta^2} \{ (\beta_0 - \sin \theta_0) \pm [(\beta_0 - \sin \theta_0)^2 \mp 4\beta \sin \theta]^{1/2} \}^2, \quad (2.10)$$

(2.10) 的中括号前面取正号是利用初始条件

$$\frac{\Delta\beta}{\Delta\beta_0} \Big|_{\substack{\theta=\theta_0 \\ \beta=\beta_0}} = 1. \quad (2.11)$$

(2.10) 就是超辐射相对场散差的解析表达式, 它对于上述两类超辐射都是适用的, 其中的“干”仍然分别对应 θ 的负、正区间。

由 (2.10) 及 (2.9) 作出 $\frac{(\Delta\beta)^2}{(\Delta\beta_0)^2}$ 随 θ 变

化的曲线, 如图 1 所示。这些曲线实际上反映了压缩的时间演变。不难看出, 自发超辐射在演变过程中一直存在着压缩(始末端除外)。而触发超辐射仅在 $-\theta_0 < \theta < \theta_0$ 期间才出现压缩, 其中 θ_0 称为压缩临界角, 它由

$$\begin{cases} \frac{(\Delta\beta)^2}{(\Delta\beta_0)^2} \Big|_{\theta=\theta_0} = 1, & (2.12a) \\ 0 \leq \theta_0 \leq \pi, & (2.12b) \end{cases}$$

决定。由 (2.12) 及 (2.10) 可以得到 θ_0 所满足的关系

$$\begin{cases} \sin^3 \theta_0 + 4\beta_0 \sin^2 \theta_0 + 4\beta_0^2 \sin \theta_0 - 8\beta_0 = 0, & (2.13a) \\ 0 \leq \theta_0 \leq \pi. & (2.13b) \end{cases}$$

由 (2.13) 可以作出 θ_0 与 β_0 的参量 $B_0 = \frac{\beta_0}{\beta_0 + 1}$ 的关系曲线, 如图 2 所示。可以看出当 $B_0 \rightarrow 0$ (即 $\beta_0 \rightarrow 0$) 时, 压缩范围最大: $\theta_0 = \pi$; $B_0 \rightarrow 1$ (即 $\beta_0 \rightarrow \infty$) 时, 只在 $\theta_0 = 0$ 有压缩。

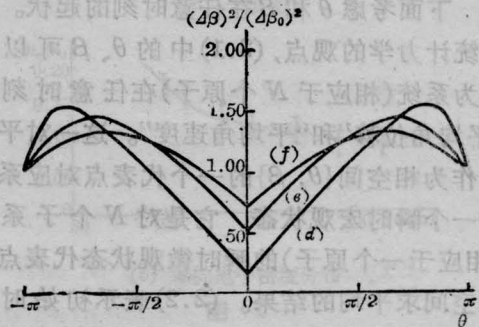
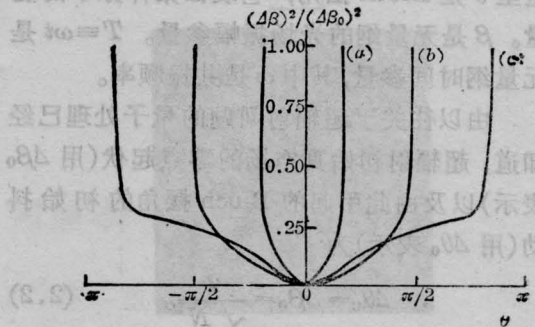


图 1 超辐射场散差 $(\Delta\beta)^2/(\Delta\beta_0)^2$ 作为 Bloch 角 θ 的函数

曲线 (a)、(b)、(c) 分别对应于 $\theta_0 = 3\pi/16, \pi/2, 13\pi/16$ 的自发超辐射 ($\beta_0 = 0$), 曲线 (d)、(e)、(f) 分别对应于 $\beta_0 = 0.8, 2, 3.2$ 的触发超辐射

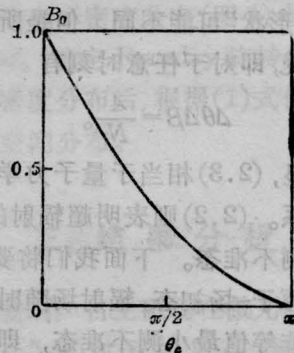


图 2 触发超辐射的压缩临界角 θ_0 作为初始条件的函数

由图 1 还可以看出, 两类超辐射的相对场散差均在 $\theta \rightarrow 0$ 取极小值, 由 (2.10) 求得

$$\frac{(\Delta\beta)^2}{(\Delta\beta_0)^2} \Big|_{\theta \rightarrow 0}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{\delta}{8(1 - \cos \theta_0)} \text{ (自发)}, & (2.14a) \\ \frac{\beta_0^2}{\beta_0^2 + 4} \text{ (触发)}, & (2.14b) \end{cases}$$

其中 δ 为正的小量。(2.14)显示了场散差极小值对于初态的依赖关系。利用(2.6),可将(2.14)改写为

$$\frac{(\Delta\beta)^2}{(\Delta\beta_0)^2} \Big|_{\theta \rightarrow 0} \rightarrow \begin{cases} \frac{\delta}{8(1+E)} \text{ (自发),} \\ \frac{E-1}{E+1} \text{ (触发).} \end{cases} \quad (2.15b)$$

很明显,两类超辐射的场散差极小值共同地在 $E \rightarrow 1$ 时取最小值:

$$\frac{(\Delta\beta)^2}{(\Delta\beta_0)^2} \Big|_{\frac{E \rightarrow 0}{E \rightarrow 1}} \rightarrow \begin{cases} \frac{\delta}{16} \text{ (自发),} \\ \frac{\delta}{2} \text{ (触发).} \end{cases} \quad (2.16a)$$

(2.16)给出了最佳压缩点。

三、实验设想

1. 采用 Cs 原子束作为工作物质。因为人们对 Cs 的谱线比较熟悉,而且 Cs 的有关参数严格地满足产生单脉冲超辐射的时间不等式^[9],可以避免振铃(ringing)效应。

2. 利用里德堡态的跃迁获得辐射场。因为里德堡原子的偶极矩阵元非常大,原子与场相互作用很强,是研究量子辐射性质的理想工具^[4]。而且它的增益高(即阈值低),容易从实验上得到较为理想的物理系统。另外可以通过自身的场-离子探测手段,对辐射场进行非常精确的测量。

3. 通过高强度相干激发以获得自发超

辐射的最佳初态。为了保证初始时刻有充分的原子处于位相关联的激发态(即 $\theta_0 \rightarrow \pi$),必须采用足够强的相干激发。而考虑到辐射上能级可能会处于较高激发态,则可能利用串级激发。即如图3所示,用一束波长为 λ_1 的激光使原子从基态 n_0S 跃迁到第一个共振态 n_0P ,再用波长为 λ_2 的激光激发到里德堡态 nS ,在高增益的情况下,向下能级 $(n-1)P$ 的跃迁决定了超辐射的波长。

4. 当辐射场演变到最佳压缩态(即 $\theta \rightarrow 0$)时,利用 Strak 失谐断开原子与场的相互作用,则此刻的超辐射场应该具有最佳压缩。

5. 利用外差混频(heterodyne mixing)装置^[9],测量辐射场的压缩量。

作者感谢 Mandel 教授的有益讨论。

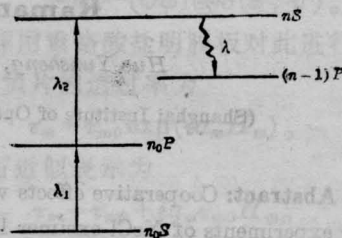


图3 里德堡自发超辐射的能级图

参考文献

- 1 Heidmann A *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 1985; **54**(4): 323
- 2 顾樵. 西北大学学报(自然科学版), 1986; **16**(2): 119
- 3 顾樵. 中国激光, 1986; **13**(2): 76
- 4 Gross M *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 1979; **43**(5): 343
- 5 顾樵. 中国激光, 1986; **13**(12): 739

参考文献

- 1 Stroke G W, Zech R G. *Phys. Lett.*, 1967; **33A**: 3
- 2 Lohmann A W, Werlich H W. *Phys. Lett.*, 1967; **25A**: 5700
- 3 Stroke G W, Haliona M. *Phys. Lett.*, 1970; **33A**: 3
- 4 Shen X Q, Boseck S. *Optik*, 1984; **68**: 137
- 5 Shen X Q, Boseck S. *Optik*, 1984; **68**: 17
- 6 Frank J. *Optik*, 1973; **34**: 519
- 7 Shen X Q, Zheng S H, Li F H. *Proc. Int. Conf. Holography Application*, Beijing, 1986: 266

(上接第161页)
递信息。用两张电子显微像合成可以填补传递函数的零点空缺。复合滤波后,相应于不同离焦的传递函数幅值大致相同,由于传递函数零点的位置随方位不同而异,所以不同离焦量的恢复像仍有差异。这个方法可用于恢复普通和超导电镜的大分子样品和原子结构的电子显微像。