中国激光

第15卷 第2期

双光子激光器中噪声效应的半经典分析

孙 松 庚

（南京通信工程学院）

提要：应用 Lamb 的半经典激光理论，分析了散粒噪声和热噪声对激光特性的影响。推导了在散粒噪声和热噪声存在时激光场几率分布的 Fokker-Planck 方程，得到了计及噪声时聚束和反聚束的判据。并与单光子激光中噪声存在时相应的结果进行了比较。

Semiclassical analysis of noise effect in two-photon lasers

Sun Songen

(Nanjing Institute of Communication Engineering, Nanjing)

Abstract: Lamb's semiclassical theory of laser has been used to analyse the effect of the shot noise and thermal noise on operation performances of lasers. Fokker-Planck equation of distribution probability of the laser field with the presence of shot noise and thermal noise is derived. Criteria of conditions under which bunching or anti-bunching exists is obtained and the results are compared with those of one-photon lasers.

一、引 言

双光子激光无论在实验上还是理论上均已成为热门课题之一。半经典理论和全量子理论工作都已有不少报道。[1]用 P 表示讨论了双光子激光的量子涨落。W. E. Lamb 等[2]讨论了单光子激光在散粒噪声和热噪声存在时对运转特性的影响，[3]讨论了吸收型光学双稳态中散粒噪声引起的透射场的振幅涨落。

我们在文献[2]的基础上考虑双光子激光在散粒噪声和热噪声存在时对激光行为的影响，推导了散粒噪声和热噪声存在时激光场几率分布的 Fokker-Planck 方程，应用高斯函数近似地进行求解。

单模激光场以下式表示：

$$E(z,\ t)=E(t)\cos(\nu t-kz+\phi(t))\qquad(1)$$

式中 $k=n\pi/L$，L 是腔长，n 是模数，振幅 $E(t)$ 和位相 $\varphi(t)$ 为 t 的慢变函数，它可用如下自洽方程表示

$$\left.\begin{aligned}&\dot{E}(t)+\frac{1}{2}\frac{\nu}{Q}E(t)\\&\qquad=-\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\varepsilon_0}\right)\operatorname{Im}P(t)\\&(\nu-\Omega+\dot{\varphi})E(t)\\&\qquad=-\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\varepsilon_0}\right)\operatorname{Re}P(t)\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

收稿日期：1986年10月4日。

式中 $P(t)=\frac{2}{L}\int_0^L dzP(z,t)\sin kz$,

这里 $P(z,t)$ 为激活原子的宏观极化强度。由文献[4]得:

$$\dot{E}=\alpha E-\beta E^3+\gamma E^7 \tag{3}$$

式中 α、β、γ 可由激光不同的参数确定。

二、散粒噪声效应

设是单模双光子激光运转，且忽略 Doppler 效应，激发原子以平均速率 λ 随机注入上能级，由文献[2]有

$$\dot{E}(t)=-\frac{1}{2}\frac{\nu}{Q}E(t)-\frac{1}{2}\frac{\nu}{\varepsilon_0}[S^{(1)}(t)+S^{(3)}(t)] \tag{4}$$

式中 $S^{(1)}(t)$ 和 $S^{(3)}(t)$ 是双光子激光运转时 $\mathrm{Im}P(t)$ 中相应的一阶项和三阶项，与单光子激光不同的是这里的 $S^{(1)}(t)$ 和 $S^{(3)}(t)$ 分别属于 E 的 3 次方和 7 次方，而不是单光子时的一次方和 3 次方。同文献[2]，有

$$\dot{E}=-\frac{1}{2}\left[\frac{\nu}{Q}E(t)\right]-\frac{1}{2}\frac{\nu}{\varepsilon_0}\sum_k[S^{(1)}(t,t_k)+S^{(3)}(t,t_k)]$$

由 Lamb 理论，激光中的原子其寿命 γ_a^{-1}、γ_b^{-1} 均约为 10^{-8}s，从文献[5]得知，对单模双光子激光，$2\nu=\omega_{ab}$ 的原子系统为多能态，中间态 $|j\rangle$ 的布居近似为零，故在 $|j\rangle$ 上的原子寿命较 γ_a^{-1}、γ_b^{-1} 更短，场振幅变化时间为 10^{-5}s，故 $S^{(1)}$ 和 $S^{(3)}$ 的响应时间虽比单光子时略大一些，仍可作为 δ 函数处理。由双光子激光理论可得:

$$S^{(1)}(t,t_k)=\sigma_1E^3(t)\delta(t-t_k),$$

$$S^{(3)}(t,t_k)=\sigma_3E^7(t)\delta(t-t_k)$$

式中
$$\sigma_1=-\frac{k_{ab}^2\mathscr{L}(2\nu-\widetilde{\omega}_{ab})}{4\hbar\gamma},$$

$$\sigma_3=\frac{k_{ab}^4}{2\hbar}\frac{\mathscr{L}^2(2\nu-\widetilde{\omega}_{ab})}{(4\hbar\gamma)^2R_s},$$

$$\mathscr{L}(2\nu-\widetilde{\omega}_{ab})=\gamma^2/[(2\nu-\widetilde{\omega}_{ab})^2+\gamma^2],$$

与文献[2]不同，这里考虑纯双光子过程，极化中没有含 E 的线性项。k_{ab} 由文献[5]给出，故方程(4)可写成:

$$\dot{E}=-\frac{1}{2}\frac{\nu}{Q}E-\frac{1}{2}\frac{\nu}{\varepsilon_0}\times(\sigma_1E^3+\sigma_3E^7)\sum_k\delta(t-t_k) \tag{5}$$

(5)式为斯托克斯微分方程，可进一步改写成

$$\frac{d}{dt}(E^2)=-\frac{\nu}{Q}E^2-\frac{\nu}{\varepsilon_0}\times(\sigma_1E^4+\sigma_3E^8)\sum_k\delta(t-t_k) \tag{6}$$

令 $x=-\frac{1}{y}-\sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_1}}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_1}}y\right)(y=E^2)$，有

$$dx=-\frac{\nu}{Q}G(x)+\frac{\nu\sigma_1}{\varepsilon_0}\Sigma\,\delta(t-t_k) \tag{7}$$

式中

$$G(x)=E^2\Big/\left(E^4+\frac{\sigma_3}{\sigma_1}E^8\right)=y\Big/\left(y^2+\frac{\sigma_3}{\sigma_1}y^4\right)=G[y(x)],$$

其中，$y(x)$ 是

$$x=-\frac{1}{y}-\sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_1}}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_1}}y\right)$$

的反函数，取 $10^{-5}\mathrm{s}\gg\Delta t\gg10^{-8}\mathrm{s}$。在此条件下方程(7)是马尔科夫-斯托克斯微分方程。在 $t\sim t+\Delta t$ 内激发的原子数为

$$N(t,\Delta t)=\int_t^{t+\Delta t}dt\,\Sigma\,\delta(t-t_k)$$

类似于文献[2]，在 $N\gg1$ 的极限下，$N(t,\Delta t)$ 的几率分布 $\tau(N)$ 为高斯分布[6]

$$\tau(N)=(2\pi\lambda\Delta t)^{-1/2}\exp\left[-\frac{(N-\lambda\Delta t)^2}{2\lambda\Delta t}\right] \tag{8}$$

和单光子的情况一样，λ 是时刻 t 原子的平均激发速率。通过无规变量分析，x 满足如下 Fokker-Planck 方程:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\nu}{Q}G(x)P-\left(\frac{\lambda\sigma_1\nu}{\varepsilon_0}\right)P\right]+\frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\nu\sigma_1}{\varepsilon_0}\right)^2\frac{\partial^2P}{\partial x^2} \tag{9}$$

定义 $\omega(E,t)$ 为场振幅 $E(t)$ 在 t 时刻有值 E 的分布几率，则有

$$\omega(E,\ t)dE=P(x,\ t)dx$$

由(7)式和(9)式，可得方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial\omega(E,\ t)}{\partial t}=&\frac{\partial}{\partial E}\Big[\frac{\nu}{2Q}E\omega\\&-\frac{\lambda\nu}{2\varepsilon_0}(\sigma_1E^3+\sigma_3E^7)\omega\Big]\\&+\frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\nu}{2\varepsilon_0}\right)^2\Big\{\frac{\partial^2}{\partial E^2}\\&\times[(\sigma_1E^3+\sigma_3E^7)^2\omega]\\&-\frac{\partial}{\partial E}[(\sigma_1E^3+\sigma_3E^7)\\&\times(3\sigma_1E^2+7\sigma_3E^6)\omega]\Big\}\end{aligned}\tag{10}$$

方程(10)为双光子激光中考虑散粒噪声效应的 Fokker-Planck 方程。由(10)式可计算场的平均振幅。

$$\langle E\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}dEE\omega(E,\ t)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\langle E\rangle}{dt}=&\int_{-\infty}^{\infty}dEE\frac{\partial\omega(E,\ t)}{\partial t}\\=&\int_{-\infty}^{\infty}dEE\Big\{\frac{\partial}{\partial E}\Big[\frac{\nu}{2Q}E\omega\\&-\frac{\lambda\nu}{2\varepsilon_0}(\sigma_1E^3+\sigma_3E^7)\omega\Big]\\&+\frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\nu}{2\varepsilon_0}\right)^2\Big(\frac{\partial^2}{2E^2}\\&\times[(\sigma_1E^3+\sigma_3E^7)^2\omega]\\&-\frac{\partial}{\partial E}[(\sigma_1E^3+\sigma_3E^7)\\&\times(3\sigma_1E^2+7\sigma_3E^6)]\Big)\Big\}\\=&-\frac{1}{2}\frac{\nu}{Q}\langle E\rangle+\frac{\lambda\nu}{2\varepsilon_0}\\&\times(\sigma_1\langle E^3\rangle+\sigma_3\langle E^7\rangle)\\&+\frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\nu}{2\varepsilon_0}\right)^2(3\sigma_1^2\langle E^5\rangle\\&+10\sigma_1\sigma_3\langle E^9\rangle+7\sigma_3^2\langle E^{13}\rangle)\end{aligned}\tag{11}$$

由(11)式和(1)式可得

$$\alpha=-\frac{1}{2}\frac{\nu}{Q},\quad \beta=\frac{-\lambda\nu}{2\varepsilon_0}\sigma_1,\quad \gamma=\frac{\lambda\nu}{2\varepsilon_0}\sigma_3,$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\partial\omega(E,\ t)}{\partial t}=&\frac{\partial}{\partial E}[-(\alpha E-\beta E^3+\gamma E^7)\omega]\\&+\frac{1}{2\lambda}\Big[\frac{\partial^2}{\partial E^2}[(-\beta E^3+\gamma E^7)^2\omega]\\&-\frac{\partial}{\partial E}[(-\beta E^3+\gamma E^7)\\&\times(-3\beta E^2+7\gamma E^6)\omega]\Big]\end{aligned}\tag{12}$$

这样，场振幅和强度平均满足如下方程：

$$\begin{aligned}\frac{d\langle E\rangle}{dt}=&\alpha\langle E\rangle-\beta\langle E^3\rangle+\gamma\langle E^7\rangle\\&+\frac{1}{2\lambda}(3\beta^2\langle E^5\rangle-10\beta\gamma\langle E^9\rangle\\&+7\gamma^2\langle E^{13}\rangle)\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\langle E^2\rangle}{dt}=&2(\alpha\langle E^2\rangle-\beta\langle E^4\rangle+\gamma\langle E^8\rangle)\\&+\frac{4}{\lambda}\langle(\beta E^3-\gamma E^7)(\beta E^3-2\gamma E^7)\rangle\end{aligned}\tag{14}$$

同文献[2]，考虑对于初始条件 $t=0$ 时，$\omega(E,\ 0)=\delta(E-E_0)$ 的 Fokker-Planck 方程的近似解(E_0 是 $t=0$ 时的电场振幅)。如 $\lambda\gg1$，可略去(12)式右方第二项，有

$$\partial\omega(E,\ t)/\partial t=-\frac{\partial}{\partial E}[(\alpha E-\beta E^3+\gamma E^7)\omega]\tag{15}$$

该方程的解为 $\omega(E,\ t)=\delta(E-\varepsilon(t))$，这里 $\varepsilon(t)$ 满足

$$\dot{\varepsilon}(t)=\alpha\varepsilon(t)-\beta\varepsilon^3(t)=\gamma\varepsilon^7(t)\quad \varepsilon_0=E_0\tag{16}$$

该解的物理意义是对 $\lambda\Delta t\to\infty$，方程(8)中 $\tau(N)$ 的行为和 $\delta(N-\lambda\Delta t)$ 一样(对双光子激光，λ 的值要求比相应单光子的 λ 值要大，(12)式右方第二项的略去更合理一些)，此时可略去散粒涨落，几率分布函数 $\omega(E,\ t)$ 的行为和 δ 函数一样。为了考虑散粒噪声，必须保留(12)式右方第二项，在 $\lambda\Delta t\gg1$ 时，$\omega(E,\ t)$ 为尖峰函数，设可表示成归一化的高斯函数。

$$\omega(E,\ t)=\frac{(2\pi)^{-1/2}}{\sigma(t)}\exp\left[-\frac{[E-\varepsilon(t)]^2}{2\sigma(t)^2}\right]\tag{17}$$

式中 $\sigma^2(t)\ll\varepsilon^2(t)$，对 $\omega(E,\ t)$ 有如下平均

$$
\begin{aligned}
\langle E\rangle &= \varepsilon,\\
\langle E^2\rangle &= \varepsilon^2+\sigma^2,\\
\langle E^3\rangle &= \varepsilon^3+3\varepsilon\sigma^2+\cdots\\
\langle E^4\rangle &= \varepsilon^4+6\varepsilon^2\sigma^2+\cdots,\\
\langle E^5\rangle &= \varepsilon^5+10\varepsilon^3\sigma^2+15\varepsilon\sigma^4+\cdots\\
\langle E^6\rangle &= \varepsilon^6+15\varepsilon^4\sigma^2+45\varepsilon^2\sigma^4+\cdots\\
\langle E^7\rangle &= \varepsilon^7+21\varepsilon^5\sigma^2+105\varepsilon^3\sigma^4+\cdots\\
\langle E^8\rangle &= \varepsilon^8+28\varepsilon^6\sigma^2+210\varepsilon^4\sigma^4+\cdots\\
\langle E^9\rangle &= \varepsilon^9+36\varepsilon^7\sigma^2+328\varepsilon^5\sigma^4+\cdots,\\
\langle E^{10}\rangle &= \varepsilon^{10}+45\varepsilon^8\sigma^2+620\varepsilon^6\sigma^4+\cdots\\
\langle E^{13}\rangle &= \varepsilon^{13}+78\varepsilon^{11}\sigma^2+\cdots,\\
\langle E^{14}\rangle &= \varepsilon^{14}+91\varepsilon^{12}\sigma^2+\cdots
\end{aligned}
\tag{18}
$$

将(18)式代入(13)和(14)式可得

$$
\frac{d}{dt}(\varepsilon)=\alpha\langle E\rangle-\beta\langle E^3\rangle+\gamma\langle E^7\rangle+\frac{1}{2\lambda}\,0(\beta^2\sigma\varepsilon) \tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\sigma^2) &= \frac{d}{dt}\langle E^2\rangle-2\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}\\
&= 2\alpha\langle E^2\rangle-2\beta\langle E^4\rangle+2\gamma\langle E^8\rangle\\
&\quad+\frac{1}{\lambda}(4\beta^2\langle E^6\rangle-12\beta\gamma\langle E^{10}\rangle\\
&\quad+8\gamma^2\langle E^{14}\rangle)-2\varepsilon\Big[\alpha\langle E\rangle\\
&\quad-\beta\langle E^3\rangle+\gamma\langle E^7\rangle+\frac{1}{2\lambda}\\
&\quad\times(3\beta^2\langle E^5\rangle-10\beta\gamma\langle E^9\rangle\\
&\quad+7\gamma^2\langle E^{13}\rangle)\Big]\\
&= 2\sigma^2(\alpha-3\beta\varepsilon^2+7\gamma\varepsilon^6)\\
&\quad-\frac{\varepsilon^6}{\lambda}(\beta-\gamma\varepsilon^4)^2
\end{aligned}
\tag{20}
$$

因假定 $\sigma^2\ll\varepsilon^2$, 故在(19)和(20)中已分别略去了如 $\Delta(\beta\sigma^2\varepsilon)$ 和 $\Delta(\beta\varepsilon^4)$ 项。在(20)式中令 $\frac{d}{dt}\sigma^2=0$, 可得到 $\sigma^2(t)$ 的定态值

$$
\sigma^2(t)=\frac{\varepsilon^6}{\lambda}(\beta-\gamma\varepsilon^4)^2/2(\alpha-3\beta\varepsilon^2+7\gamma\varepsilon^6) \tag{21}
$$

故稳定态时,有

$$
\langle E\rangle=\varepsilon \tag{22}
$$

$$
\langle E^2\rangle=\varepsilon^2\Big(1+\frac{\varepsilon^4}{\lambda}\,\frac{(\beta-\gamma\varepsilon^4)^2}{2(\alpha-3\beta\varepsilon^2+7\gamma\varepsilon^6)}\Big) \tag{23}
$$

$$
\langle E^4\rangle=\varepsilon^4\Big(1+\frac{3\varepsilon^4}{\lambda}\,\frac{(\beta-\gamma\varepsilon^4)^2}{(\alpha-3\beta\varepsilon^2+7\gamma\varepsilon^6)}\Big) \tag{24}
$$

故归一化的 $g^2=(\langle E^2\rangle-\langle E\rangle^2)/\langle E\rangle^2$

和 $g^4=\dfrac{\langle E^4\rangle-\langle E\rangle^4}{\langle E\rangle^4}$

分别为:

$$
g^2(t)=\frac{\varepsilon^4}{2\lambda}\,\frac{(\beta-\gamma\varepsilon^4)^2}{(\alpha-3\beta\varepsilon^2+7\gamma\varepsilon^6)} \tag{23'}
$$

和

$$
g^4(t)=\frac{3\varepsilon^4}{\lambda}\,\frac{(\beta-\gamma\varepsilon^4)^2}{(\alpha-3\beta\varepsilon^2+7\gamma\varepsilon^6)} \tag{24'}
$$

由文献[4],双光子激光方程(16)的定态解为 $\varepsilon^2=0$ 和 $\gamma x^3-\beta x+\alpha=0\,(x=E^2)$ 的三个根,根据线性稳定性分析,物理上有意义的稳定定态解在条件 $\left(\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}\right)^2-4\frac{\beta}{\gamma}>0$ 时由下式给出

$$
\varepsilon^2=\Big[\beta^2/\alpha\gamma+\sqrt{(\beta^2/\alpha\gamma)^2-4\frac{\beta}{\gamma}}\Big]/\alpha \tag{25}
$$

这样,双光子激光中散粒噪声存在时,强度涨落及归一化的方差,均可以用表征双光子激光运转的参数 α、β、γ 及 λ 来表示。而对于单光子激光,相应地,

$$
g^2=\frac{1}{16\lambda\alpha}\left(\frac{\nu}{Q}\right)
$$

与 β 无关,即涨落仅与 E 的线性项有关,与 E 的高次项无关。

当 $\left(\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}\right)^2=4\frac{\beta}{\gamma}$ 时 $\varepsilon^2=\frac{\beta^2}{2\alpha\gamma}$, $g^2=0$, 即在泵浦阈值处,归一化方差为零。在

$$
\alpha-3\beta\varepsilon^2+7\gamma\varepsilon^6>0\Big(\varepsilon^7\neq\frac{\beta}{\gamma}\Big)
$$

和

$$
\alpha-3\beta\varepsilon^2+7\gamma\varepsilon^6<0\Big(\varepsilon^2\neq\frac{\beta}{\gamma}\Big)
$$

时相应有 $g^2(t)>0$ 和 $g^2(t)<0$, 即相应地存在聚束和反聚束。至此给出了计及散粒噪声聚束和反聚束存在的判据。

三、热噪声效应

在无源腔内含有黑体辐射，该辐射对激光介质的影响可通过在麦克斯韦方程中考虑斯托克斯极化得到。斯托克斯极化为

$$P^{(0)}(z,\ t)=\{C^{(0)}\cos(\nu t+\phi(t))+S^{(0)}\sin(\nu t+\varphi(t))\}\sin kz \tag{26}$$

式中 $C^{(0)}(t)$、$S^{(0)}(t)$ 与 $e^{i\nu t}$ 相比是慢变无规函数，热噪声和散粒噪声不一样，它同时影响场振幅和位相，对双光子激光有

$$\dot{\varphi}E=-\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\varepsilon_0}\right)C^{(0)}(t) \tag{27}$$

$$\dot{E}=\alpha E-\beta E^3+\gamma E^7-\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\varepsilon_0}\right)S^{(0)}(t) \tag{28}$$

$\dot{\varphi}=-\frac{1}{2}\frac{\nu}{\varepsilon_0}\frac{1}{\langle E\rangle}C^0(t)$ [2] 且设 $C^{(0)}(t)$ 为马尔科夫无规函数，$\langle C^{(0)}(t)\rangle=0$。类似于散粒噪声，几率分布 $S(t,\ \varDelta t)$ 定义为：

$$S(t,\ \varDelta t)=\int_t^{t+\varDelta t}dt\, S^{(0)}(t) \tag{29}$$

$S(t,\ \varDelta t)$ 的分布是高斯型的，有

$$\tau(S)=(2\pi d\varDelta t)^{-1/2}\exp\left(-\frac{S^2}{2d\varDelta t}\right) \tag{30}$$

式中 $d=\frac{4\varepsilon_0\hbar}{VQ}$，因 $S^{(0)}(t)$ 和 $C^{(0)}(t)$ 是无规极化 $P^{(0)}(z,\ t)$ 的正弦、余弦分量的振幅，则 $\omega(E,t)$ 的Fokker-Planck方程，即振幅 $E(t)$ 的几率分布为：

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial E}[(\alpha E-\beta E^3+\gamma E^7)\omega]+\frac{1}{2}d\left(\frac{\nu}{\partial\varepsilon_0}\right)^2\frac{\partial^2\omega}{\partial E^2} \tag{31}$$

有

$$d\langle E\rangle/dt=\alpha\langle E\rangle-\beta\langle E^3\rangle+\gamma\langle E^7\rangle \tag{32}$$

$$\frac{d\langle E^2\rangle}{dt}=2\alpha\langle E^2\rangle-2\beta\langle E^4\rangle+2\gamma\langle E^8\rangle+d\left(\frac{\nu}{\partial\varepsilon_0}\right)^2 \tag{33}$$

与散粒噪声相同，有

$$\omega(E,\ t)=\frac{(\partial\pi)^{-1/2}}{\sigma(t)}\exp\left[-\frac{[E-\varepsilon(t)]^2}{2\sigma^2(t)}\right] \tag{34}$$

和满足初始条件的方程：

$$\dot{\varepsilon}=\alpha\varepsilon-\beta\varepsilon^3+\gamma\varepsilon^7 \tag{35}$$

可得

$$\frac{d}{dt}(\sigma^2)=\frac{d(E^2)}{dt}-2\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}=d\left(\frac{\nu}{2\varepsilon_0}\right)^2+2(\alpha-3\beta\varepsilon^2+7\gamma\varepsilon^6)\sigma^2 \tag{36}$$

可求得热噪声存在时

$$\langle E\rangle=\varepsilon$$

$$\begin{aligned}(\langle E^2\rangle-\langle E\rangle^2)/\langle E\rangle^2
&=\frac{d\nu^2}{\varepsilon_0^2}\Bigg[\left(\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}+\sqrt{\left(\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}\right)^2-\frac{4\beta}{\gamma}}\right)\\
&\times\Bigg[\left(\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}+\sqrt{\left(\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}\right)^2-\frac{4\beta}{\gamma}}\right)\\
&\times\Bigg(\alpha_0\beta-\frac{7\beta^2}{\alpha}\Bigg(\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}\\
&+\sqrt{\left(\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}\right)^2-\frac{4\beta}{\gamma}}\Bigg)-4\alpha\Bigg)\Bigg]\Bigg\}^{-1}\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\frac{\langle E^4\rangle-\langle E\rangle^4}{\langle E\rangle^4}&=\frac{1}{2}\left(\frac{d}{\varepsilon_0}\right)^2\nu\\
&\times\Bigg\{d\left(\frac{\nu}{2\varepsilon_0}\right)^2+\frac{1}{4}\\
&\times\left(\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}+\sqrt{\left(\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}\right)^2-\frac{4\beta}{\gamma}}\right)\\
&\times\Bigg[\left(\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}+\sqrt{\left(\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}\right)^2-\frac{4\beta}{\gamma}}\right)\Bigg(3\beta-7\gamma\\
&\times\Bigg(\frac{\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}+\sqrt{\left(\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}\right)^2-\frac{4\beta}{\gamma}}}{2}\Bigg)^2\Bigg)-2\alpha\Bigg]\Bigg\}^{-1}\end{aligned} \tag{39}$$

故热噪声存在时的场强涨落及归一化的四阶矩阵均与双光子激光参数 α、β 和 γ 有关，而单光子激光热噪声存在时的

$$\frac{\langle E\rangle^2-\langle E\rangle^2}{\langle E\rangle^2}=\frac{\alpha\beta}{16\alpha^2}\left(\frac{\nu}{\varepsilon_0}\right)^2$$

仅与 α、β 有关而与 γ 无关。

（下转第 84 页）

(此时 J_0/J_1 为 0.79)，足以产生对系统位相检测灵敏度的限制。这与我们对光纤陀螺系统性能的实验观察和记录结果相一致。实验中，激光与陀螺系统之间未加任何隔离器件，发现耦合功率越强，信号光功率越强，位相检测灵敏度反而降低，与 Shot Noise 限制或是 Rayleigh 散射噪声限制情况矛盾，说明信号光反馈对光源的干扰产生了对光纤陀螺系统性能的实际限制。

图 4 给出了激光光源在调制基频处的归一化强度噪声与位相调制幅度 Φ_m 的关系曲线，实验结果能很好地符合理论分析结果式(5)。由该图可见，位相调制幅度 Φ_m 从 1.83 rad 附近($J_1(\Phi_m)$ 极大)增加到 3.83 rad 附近($J_1(\Phi_m)$ 为零)时，RIN 的抑制可达三个数量级。

图 5 是附加一位相调制器于图 1 中 B 位置处情况下得到的实验数据与由式(7)给出的理论曲线的比较。图中给出的在调制基频处归一化强度噪声与位相调制幅度 $'_m$ 的关得系，显示了实验和理论分析符合相当好。在此实验中，$\Phi_m=2.1\text{rad}(J_1(\Phi_m)=0.57)$，$\omega'_m$ 对应的调制频率为 54 kHz，满足 $\omega'_m \gg \omega_m$ (对应的调制频率 10.1 kHz)。实验数据表明，此位相调制器亦可很好地抑制调制基频处的 RIN。

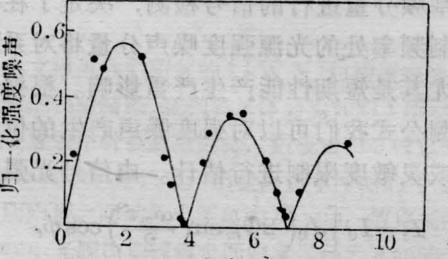

图 4 探测频率处的归一化强度噪声与图 1 中位相调制器的调制振幅 ϕ_m 的关系

曲线——理论值；•——实验值

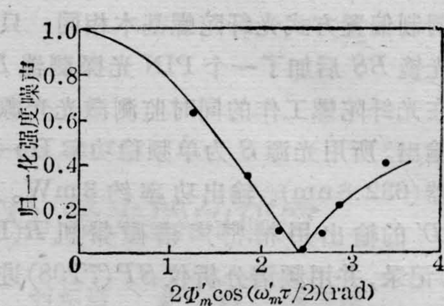

图5 探测频率处归一化强度噪声与图 1 中 B 点上附加位相调制器调制振幅 ϕ'_m 的关系

——理论曲线；•••实验值

参 考 文 献

1 Ulrich R. *Opt. Lett.*, 1980; **5:** 173

2 Dandridge A *et al.* *Appl. Phys. Lett.*, 1980; **37:** 526

3 Hirota O *et al. IEEE J. Quant. Electr.*, 1981; **QE-17:** 1014

4 Goldberg L *et al.* IEEE Trans on Microwave Theory and Tech., 1982; MTTT-30: 409

5 Variv A. *Quant. Electr.* New York: John Wiley & Sons. 1975: 187

6 Yoshikuni Y *et al. Proc. IEEE*, 1985; **132**(1): 21

(上接第 79 页)

四、讨 论

双光子激光中，噪声对激光谱线线型的影响较单光子复杂，这是因为方程(16)没有解析形式的瞬态解。从定性上讲，双光子激光中是单模激光场和偶极子 μ_{aj}、μ_{bj} 作用，而不是单光子激光时的 μ_{ab}，故 β、γ 通过 σ_1 和 σ_3 相应地与 K^2_{ab} 和 K^4_{ab} 相关而不是单光子激光时与 μ_{ab} 相关，随着场强的增大，噪声对激光场的影响随之增大，故双光子激光中噪声对激光谱线的增宽比相应单光子激光大。至于噪声影响的定量数值计算将另文讨论。

参 考 文 献

1 Margaret *et al. Phys. Rev. A*, 1983; **28**(1): 332

2 Wang Y K *et al. Phys. Rev. A*, 1973; **8**(2): 873

3 McCall S L. *IEEE J. Quant. Electr.*, 1985; **QE-21**(9): 1441

4 汪志诚。《光学学报》, 1983; **3**(1): 36

5 Naducci M *et al. Phys. Rev. A*, 1977; **16**(4): 1665

6 Chandrasker S. *Rev. Mod. Phys.*, 1943; **15:** 1