

# 具有轴向磁场的自由电子激光器中的 电子轨道、色散和增益

陈 继 红

(兰州大学物理系)

**提要:** 应用单粒子轨道理论讨论了存在轴向磁场的自由电子激光器中电子轨道的稳定性及辐射场的振幅变化、色散和增益; 导出了辐射场变化和色散方程。

## Electron trajectories, gain and dispersion of FELs with axial guided magnetic fields

Chen Jihong

(Physics Department, Lanzhou University, Lanzhou)

**Abstract:** The electron trajectories, gain, and dispersion of FEL's with axial guided magnetic field are discussed based on single-particle orbits. More attention is paid to the analysis of the orbit solutions.

### 一、引 言

实验表明, 如果在空间周期场上叠加一个轴向磁场, 可以使自由电子激光器的能量转换效率获得可观的提高<sup>[1]</sup>。然而这时电子的运动较无轴向磁场的情形要复杂得多。文献[2]详尽地讨论了电子能量及相的变化。本文在单粒子模型的基础上, 应用微扰论讨论了电子轨道的稳定性, 应用波动方程讨论了辐射场的振幅与色散。分析表明, 在满足稳定性的要求下, 轴向磁场可使自由电子接近共振时的增益增强。

### 二、单粒子运动方程及其解

考虑一束相对论电子束在磁场中的运动, 忽略电子间的库仑作用, 即电子束产生的空间电荷波, 用单粒子轨道理论进行分析。磁场  $\mathbf{B}$  由轴向磁场  $\mathbf{B}_0$  和  $\mathbf{B}_\omega$  组成:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_\omega \\ &= B_0 \mathbf{e}_z - B_\omega \left[ \mathbf{e}_x \cos \left( \int k_\omega(z) dz \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{e}_y \sin \left( \int k_\omega(z) dz \right) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

收稿日期: 1986年10月14日。

辐射场为:

$$\mathbf{E}_s = E_s(z) [\mathbf{e}_x \cos(\omega_s t - k_s z) + \mathbf{e}_y \sin(\omega_s t - k_s z)] \quad (2)$$

$$\mathbf{B}_s = B_s(z) [-\mathbf{e}_x \sin(\omega_s t - k_s z) + \mathbf{e}_y \cos(\omega_s t - k_s z)] \quad (3)$$

由于色散很小, 可以假设:

$$k_s \approx \frac{\omega_s}{c},$$

这个近似条件以后将定量讨论。在实验中, 通常轴向磁场将远远大于螺旋磁场, 而辐射场将远远小于螺旋磁场, 即:

$$|\mathbf{B}_z| \gg |\mathbf{B}_\omega| \gg |\mathbf{B}_s|。$$

电子的运动方程为:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -e \left[ \mathbf{E}_s + \frac{\mathbf{v}}{c} (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_\omega + \mathbf{B}_s) \right] \quad (4)$$

将(1)~(3)式代入(4)式中, 并注意近似条件即可导出:

$$\begin{cases} \frac{dP_\perp}{dt} = -\omega_\omega P_s \sin \theta & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 - k_\omega v_z - \omega_\omega \frac{P_z}{P_\perp} \cos \theta & (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dP_z}{dt} = \omega_\omega P_\perp \sin \theta & (7) \end{cases}$$

式中  $\omega_0 = \frac{eB_0}{m\gamma c}$  是电子对应于轴向磁场  $B_0$  的回旋频率;  $\omega_\omega = \frac{eB_\omega}{m\gamma c}$  是电子对应于摆动器磁场  $B_\omega$  的回旋频率;  $\omega_s = \frac{eB_s}{m\gamma c}$  是电子对应于辐射场分量  $B_s$  的回旋频率;

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

为相对论因子,  $\omega_s, k_s$  为辐射场的频率和波矢,

$$\theta = \phi - \int k_\omega(z) dz + \pi$$

代表  $\mathbf{v}_\perp$  与  $\mathbf{B}_\omega$  间的夹角, 而  $\phi$  代表  $\mathbf{v}_\perp$  与  $\mathbf{v}_\parallel$  轴间的夹角,  $\mathbf{v}_\perp = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y$ 。

方程(5)~(7)有特解<sup>[2]</sup>:

$$\begin{aligned} P_\perp &= P_s \omega_\omega / (\omega_0 - k_\omega v_z), \\ \theta &= 0, \quad P_z = \text{const.} \end{aligned} \quad (8)$$

另外:

$$\frac{dP^2}{dt} = \frac{d}{dt} (P_z^2 + P_\perp^2) = 2P_\perp \dot{P}_\perp + 2P_z \dot{P}_z \quad (9)$$

将(5)、(7)式代入(9)式后得:

$$\frac{dP^2}{dt} = 0 \quad (10)$$

由于总能量

$$\varepsilon = \sqrt{m_0^2 c^4 + P^2 c^2} = m_0 c^2 \gamma \quad (11)$$

即能量守恒, 或  $\gamma = \text{const.}$  式中  $m_0$  是电子静止质量。这是忽略辐射场对电子轨道影响的必然结果。

### 三、解的讨论

粒子轨道的稳定性可直接用解的微小变动分析办法来研究。文献[3]用速度的三个分量来作微扰, 讨论了轨道的稳定性。我们是用动量的两个分量以及  $\mathbf{v}_\perp$  与  $\mathbf{B}_\omega$  之间的夹角  $\theta$  来作微扰, 讨论粒子轨道的稳定性, 可以得到与文献[3]类似的结果。

为了讨论解的稳定性, 我们假设  $\theta, P_\perp, P_z$  有一微小变动:

$$\begin{cases} \theta = \delta\theta \\ P_\perp = P_{\perp 0} + \delta P_\perp \\ P_z = P_{z 0} + \delta P_z \end{cases} \quad (12)$$

式中  $P_{\perp 0} = \frac{P_{z 0} \omega_\omega}{(\omega_0 - k_\omega v_{z 0})}$ 。由于  $\theta$  变化很小, 则方程(5)~(7)应写成:

$$\begin{cases} \dot{P}_\perp = -\omega_\omega P_z \theta & (13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega_0 - k_\omega v_z - \omega_\omega \frac{P_z}{P_\perp} & (14) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{P}_z = \omega_\omega P_\perp \theta & (15) \end{cases}$$

将(12)代入上述方程组中得:

$$\begin{cases} \delta \dot{P}_\perp = -\omega_\omega P_{z 0} \delta\theta & (16) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta \dot{P}_z = \omega_\omega P_{\perp 0} \delta\theta & (17) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta \dot{\theta} = -\left(\frac{\omega_\omega}{P_{\perp 0}} + \frac{k_\omega}{m\gamma}\right) \delta P_z \\ \quad + \frac{\omega_\omega P_{z 0}}{P_{\perp 0}^2} \delta P_\perp & (18) \end{cases}$$

再对(18)式求时间微商, 并利用(16)、(17)式可得:

$$\delta\dot{\theta} = - \left[ \frac{\omega_\omega \omega_0 P_{\perp 0}}{P_{z0}} + \frac{\omega_\omega^2 P_{z0}^2}{P_{\perp 0}^2} \right] \delta\theta \quad (19)$$

(19)式表示电子处于稳定轨道的必要条件是:

$$\frac{\omega_\omega \omega_0 P_{\perp 0}}{P_{z0}} + \frac{\omega_\omega^2 P_{z0}^2}{P_{\perp 0}^2} > 0 \quad (20)$$

即:

$$\frac{\omega_0 P_{\perp 0}^3}{\omega_\omega P_{z0}^3} > -1 \quad (21)$$

也就是说微扰时,  $\mathbf{v}_\perp$  与  $\mathbf{B}_\omega$  间的夹角  $\theta$  只在零附近来回摆动, 不能偏离太远。

由能量守恒的结果可以导出:

$$1 - \left( \frac{v_z}{c} \right)^2 - \left[ \frac{v_\omega \omega_\omega}{(\omega_0 - k_\omega v_z) c} \right]^2 = \gamma^{-2} \quad (22)$$

即:

$$\frac{1 - \gamma^{-2}}{\beta_z^2} = 1 + \left( \frac{\omega_\omega}{\omega_0 - k_\omega c \beta_z} \right)^2 \quad (23)$$

引入:

$$F_1(\beta_z) = \frac{1 - \gamma^{-2}}{\beta_z^2} \quad (24)$$

$$F_2(\beta_z, \omega_0) = 1 + \left( \frac{\omega_\omega}{\omega_0 - k_\omega c \beta_z} \right)^2 \quad (25)$$

用作图的办法来解方程(23)即:

$$F_1 = F_2 \quad (26)$$

当  $\gamma$  足够大时, 假设  $\frac{\omega_\omega}{k_\omega c} < 1 - \gamma^{-2}$ 。固

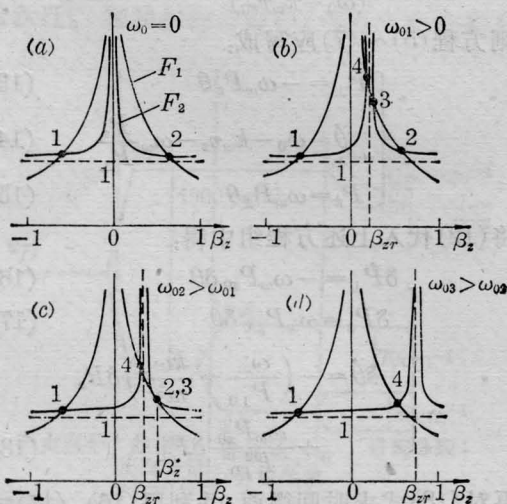


图1 对不同的  $\omega_0$ , 作出  $F_1$ 、 $F_2$  图, 求解方程(23)

定  $\gamma$ , 对于不变的  $\omega_0$  (即不同的  $B_0$ ) 作  $F_1$ 、 $F_2$  的图解 (如图 1 所示),  $F_1$ 、 $F_2$  的交点即为方程的解, 其中  $\beta_{zr} = \frac{\omega_0}{k_\omega c}$  为谐振速度。横向速度很大时电子的运动是不稳定的, 因为当空间周期场对电子的周期性扰动与纵向磁场引起的回旋运动谐振时, 电子横向运动的幅值就越来越大。这与文献[3]所讨论的一致。

由图 1(a) 可以看出, 当  $\omega_0 = 0$  时, 有两个解, 它们对应于电子束的不同传播方向; 在较弱的轴向磁场  $\omega_{01}$  时 (如图 1(b) 所示), 在正的传播方向上, 又增加两个解, 它们位于  $\beta_{zr} = \omega_0 / k_\omega c$  谐振速度的两侧; 当继续增加轴向磁场达到  $\omega_{02}$  时, 则 2 解和 3 解重叠, 在  $\beta_z > 0$  的方向上, 只有两个解; 再增加  $\omega_0$ , 最后在  $\beta_z > 0$  的方向上只剩下一个解。  $\beta_z$  与  $\omega_0$  的具体关系可由方程(23)直接导出。对方程(23)简单运算后得到:

$$\omega_0 = \pm \frac{\omega_\omega}{\sqrt{\frac{1 - \gamma^{-2}}{\beta_z^2} - 1}} + k_\omega c \beta_z \quad (27)$$

上述方程对  $\beta_z$  求导, 并令  $\frac{\partial \omega_0}{\partial \beta_z} = 0$ , 当方程(27)中的第一项取“-”号时, 可以导出此时的  $\beta_z$ 、 $\omega_0$  为下面的形式:

$$\beta_z = \beta_z^* = \alpha^{1/2} (1 - \gamma^{-2})^{1/2} = \frac{\omega_0 c}{k_\omega c \alpha} \quad (28)$$

$$\omega_0 = \omega_{0c} = k_\omega c \alpha^{3/2} (1 - \gamma^{-2})^{1/2} \quad (29)$$

式中  $\alpha = 1 - \left[ \left( \frac{\omega_\omega}{k_\omega c} \right)^2 \frac{1}{1 - \gamma^{-2}} \right]^{1/3}$ 。

由于  $\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \beta_z^2} \Big|_{\beta_z = \beta_z^*, \omega_0 = \omega_{0c}} > 0$ ,

得到  $(\beta_z^*, \omega_{0c})$  是一个极大值点, 以  $(\omega_0, \beta_z)$  为变量, 画出方程(27)的变化得到图 2。图 2 有两条曲线, 其中右面的一条对应于方程(27)取“+”号, 左面的一条对应于方程(27)取“-”号。另外, 从物理意义上来看, 图 2 曲线对应于图 1 曲线上不同的解, 根据  $\omega_0$  的取值范围, 在图 2 上分别用 2、3、4 标出。在  $\Delta$  点, 2 和 3 解的曲线重合, 并且



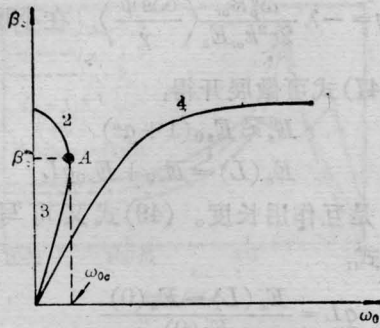


图2  $\beta_z$  与  $\omega_0$  的关系 ( $\beta_z > 0$ )

$$\omega_0 = \omega_{0c}, \quad \beta_z = \beta_{zc}^*$$

方程(26)的4个根分别在  $(-1, 0)$ 、 $(0, \beta_{cr})$ 、 $(\beta_{cr}, \beta_z^*)$ 、 $(\beta_z^*, 1)$  间隔内。

下面利用(21)式即稳定性的必要条件来讨论解的稳定性。将(28)、(29)式代入(21)式的左端可得:

$$\frac{\omega_{0c}}{\omega} \frac{P_{10}^3}{P_{z0}^3} = -1 \quad (30)$$

可以看到在2、3解的重叠处即A点, 不等式(21)的左端等于-1。

很清楚图2中的分支4满足不等式(21), 这是由于(8)式给出  $P_{10}$  在这个分支上总是大于零的。在分支2上, 由前面的计算可得(21)的左端最小等于-1, 所以分支2满足不等式(21)式。但是在分支3上, 不等式(21)的左端最大等于-1, 所以分支3不满足(21)式。由此可以得出, 分支2、4所代表的解是稳定的, 分支3代表的解是不稳定的轨道。

实际上, 电子在 Wiggler 中的运动情况远比以上分析的复杂。因为 Wiggler 场并不象所假设的那样是理想的正弦分布, 同时还存在着其它的磁场分量。同时, 以上所有讨论都未考虑到电子互作用, 这也是单粒子轨道理论的缺点。

#### 四、辐射方程的讨论

我们首先考虑上述稳定轨道的运动电子为流, 运用辐射场方程

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}_s = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_\perp \quad (31)$$

讨论辐射场的振幅变化及色散。对应于磁场(2)、(3)式相应的矢势为:

$$\mathbf{A}_s = -\frac{cB_s(z)}{\omega_s} [\mathbf{e}_x \sin(\omega_s t - p_s z) - \mathbf{e}_y \cos(\omega_s t - k_s z)] \quad (32)$$

如果辐射场还存在色散,  $\mathbf{A}_s$  可写成:

$$\mathbf{A}_s = A_s(z) \left[ \mathbf{e}_x \sin \left( \int k_s(z) dz - \omega_s t \right) + \mathbf{e}_y \cos \left( \int k_s(z) dz - \omega_s t \right) \right] \quad (33)$$

假定:  $A_s(z) = \frac{cB_s(z)}{\omega_s}$  是  $z$  的缓变函数, 即:

$$\frac{dA_s}{dz} \ll k_s A_s \ll k_\omega A_s \quad (34)$$

引入旋转坐标:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_x \sin \varphi_s - \mathbf{e}_y \cos \varphi_s \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_x \cos \varphi_s - \mathbf{e}_y \sin \varphi_s \end{cases} \quad (35)$$

式中  $\varphi_s = \int k_s(z) dz - \omega_s t$ 。

将(33)式代入方程(31)中, 在零级近似下经过运算得到:

$$\frac{dA_s}{dz} \mathbf{e}_2 + A_s \delta k_s \mathbf{e}_1 = -\frac{2\pi}{\omega_s} \mathbf{J}_\perp \quad (36)$$

$\delta k_s = k_s - \frac{\omega_s}{c}$  表示辐射场的色散, 并假定色散很弱。

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\perp &= -\sum_i \rho_i \mathbf{v}_\perp i \\ &= -e \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \frac{\mathbf{p}_\perp i}{m \gamma_i} \\ &= -\frac{e}{m} \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \\ &\quad \times \frac{1}{\gamma_i} (P_{\perp i} \cos \phi_i \mathbf{e}_x + P_{\perp i} \sin \phi_i \mathbf{e}_y) \end{aligned} \quad (37)$$

上式是对所有稳定轨道上的电子求和,  $\phi_i$  是第  $i$  个电子的  $\mathbf{v}_\perp i$  与  $\mathbf{e}_x$  间的夹角。将(37)式代入(36)式得:

$$\begin{aligned} \frac{dA_s}{dz} \mathbf{e}_2 + A_s \delta k_s \mathbf{e}_1 &= \frac{2\pi e}{m \omega_s} \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \\ &\quad \times \frac{1}{\gamma_i} (P_{\perp i} \cos \phi_i \mathbf{e}_x + P_{\perp i} \sin \phi_i \mathbf{e}_y) \end{aligned} \quad (38)$$

分别用  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  点乘方程(38)的两边得:

$$\delta k_s = -\frac{2\pi e}{m\omega_s A_s} \times \sum_i \frac{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{\gamma_i} P_{1i} \sin(\phi_i + \varphi_s) \quad (39)$$

$$\frac{dA_s}{dz} = \frac{2\pi e}{m\omega_s} \times \sum_i \frac{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{\gamma_i} P_{1i} \cos(\phi_i + \varphi_s) \quad (40)$$

假定电子的纵向速度差别不大,将(8)式代入(39)、(40)式中,并对所有稳定轨道上的电子求平均后得到:

$$\delta K_s = -\frac{2\pi e \omega_\omega P_z n_e}{m\omega_s A_s (\omega_0 - k_\omega v_z)} \left\langle \frac{\sin \psi}{\gamma} \right\rangle \quad (41)$$

$$\frac{dA_s}{dz} = \frac{2\pi e \omega_\omega P_z n_e}{m\omega_s (\omega_0 - k_\omega v_z)} \left\langle \frac{\cos \psi}{\gamma} \right\rangle \quad (42)$$

其中  $\psi = \phi_i + \varphi_s$  是  $\mathbf{v}_\perp$  与  $\mathbf{E}_s$  间的夹角。引入  $\lambda = \frac{k_\omega v_z}{\omega_0 - k_\omega v_z}$  并注意到  $\omega_\omega = \frac{eB_\omega}{m\gamma c}$ , 则(41)、(42)可写成:

$$\delta K_s = \lambda \frac{\omega_p^2}{2c\omega_s} \frac{A_\omega}{A_s} \left\langle \frac{\sin \psi}{\gamma} \right\rangle \quad (43)$$

$$\frac{dA_s}{dz} = -\lambda \frac{\omega_p^2}{2c\omega_s} A_\omega \left\langle \frac{\cos \psi}{\gamma} \right\rangle \quad (44)$$

其中  $\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_e}{m}$  是等离子体频率。

与文献[4]相比较,注意到(1)、(3)式所取的形式,我们可以看出,存在轴向磁场与不存在轴向磁场的差别主要在于因子  $\lambda$ , 也就是说,引入轴向磁场就相当于引入了  $\lambda$  因子。当  $B_0=0$ ,  $\lambda=1$  时, 就与 Kroll 等人的结果一致了。但要注意,波动方程中的流是稳定轨道上的电子的贡献。下面简单地讨论一下增益、色散。

将(44)式化成电场强度的形式:

$$\frac{dE_s}{dz} = -\lambda \frac{\omega_p^2}{2c^2} \frac{B_\omega}{k_\omega} \left\langle \frac{\cos \psi}{\gamma} \right\rangle \quad (45)$$

$$= -gE_s \quad (46)$$

所以:

$$E_s = E_{s0} e^{gs} \quad (47)$$

式中:  $g = -\lambda \frac{\omega_p^2 B_\omega}{2c^2 k_\omega E_s} \left\langle \frac{\cos \psi}{\gamma} \right\rangle$ , 在小增益近

似下,(47)式可做展开得:

$$E_s \approx E_{s0} (1 + gs) \quad (48)$$

$$\text{所以} \quad E_s(L) = E_{s0} + E_{s0} gL \quad (49)$$

其中  $L$  是互作用长度。(49)式又可写成下面的形式:

$$\begin{aligned} gL &= \frac{E_s(L) - E_s(0)}{E_s(0)} \\ &= \frac{[E_s(L) - E_s(0)] 2E_s(0)}{2E_s^2(0)} \\ &= \frac{E_s^2(L) - E_s^2(0)}{2E_s^2(0)} \end{aligned} \quad (50)$$

所以,按照通常形式下定义的增益为:

$$\begin{aligned} G &= \frac{E_s^2(L) - E_s^2(0)}{E_s^2(0)} = 2gL \\ &= -\lambda \frac{\omega_p^2 B_\omega L}{c^2 k_\omega E_s} \left\langle \frac{\cos \psi}{\gamma} \right\rangle \end{aligned} \quad (51)$$

另外,由(43)、(44)式可以得到:

$$\frac{dA_s}{dz} = A_s \delta K_s \frac{\langle \cos \psi / \gamma \rangle}{\langle \sin \psi / \gamma \rangle} \quad (52)$$

将(34)式代入(52)式中得:

$$\delta K_s \ll k_\omega \quad (53)$$

由(53)式可见,色散是很小的,这与前面的假设是一致的。由(51)式可以看出,适当地选择 FEL 的参数,使  $\lambda > 1$  和  $\left\langle \frac{\cos \psi}{\gamma} \right\rangle < 0$ , 从而提高增益,但要满足稳定性要求,即求和时,应当只对那些解是稳定性允许的电子状态求和。

作者对刘盛纲、陈耀华、方洪烈等先生及导师葛墨林教授所给予的鼓励和指导表示感谢。

## 参 考 文 献

- 1 Jackron R H et al. *IEEE J. Quant. Electr.*, 1983; QE-19: 346
- 2 王元殿.《中国激光》, 1986; 13(3): 147
- 3 Freund H P, Drobot A T. *Phys. Fluids*, 1982; 25: 736
- 4 Kroll N M et al. *IEEE J. Quant. Electr.*, 1981; QE-17: 1436