

压缩态光场与原子的双光子相互作用*

姚丹

(福建师范大学物理系)

郭光灿

(中国科技大学物理系)

提要: 本文采用时移算符的方法讨论压缩态光场与原子的双光子相互作用, 研究了双光子相互作用后光场的压缩效应及统计分布特性。

Two-photon interaction of squeezed state with an atom

Yao Dan

(Department of Physics, Fujian Teacher's University, Fuzhou)

Guo Guangcan

(Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei)

Abstract: Two-photon interaction of squeezed state with an atom is discussed by using the method of evolutionary matrix and squeezing effect and photon statistic properties of the field after two-photon interaction are studied.

一、引言

量子光学领域中压缩态光场的产生的机制是近年来引人注目的问题。Loudon^[1]计算相干光经过双光子吸收后产生压缩态, 且只近似到相互作用时间的二次幂项。G. S. Agarwal 和 G.P. Hildred^[2]发展了 Loudon 的工作, 计算了长时间范围内相干光经双光子吸收后的性质, 得到相干光与原子进行双光子相互作用产生压缩效应的结论。

我们曾讨论了压缩光与原子进行单光子相互作用后的性质, 发现单光子作用后的光场不存在压缩特性^[3]。压缩光与原子进行双

光子相互作用后的性质如何呢? 这便是本文要讨论的问题。

我们采用时移算符的方法, 通过求时移么正算符的矩阵元来求出密度算符的所有矩阵元, 然后用来求出光场的压缩特性、统计分布特性及反聚束特性。

二、压缩光与原子的双光子相互作用

一束频率为 ω 的压缩光通过能级间隔为 $\hbar\omega_0$ 的两能级原子介质, 系统的总哈密顿量为

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega_0 R_3 + \hbar(K R^+ a a + K^* a^\dagger a^\dagger R^-) \quad (1)$$

收稿日期: 1987年4月17日。

* 中国科学院科学基金资助的课题。

式中 a^+ 、 a 为光场的产生、消灭算符, R^+ 、 R^- 是原子的升、降算符, R_3 为原子的布居数反转, K 是光场与原子的耦合常数, 为方便起见, 在下面的计算中 K 取实数。时移算符 U 可写成:

$$\begin{aligned} U(t) &= \exp[-iHt/\hbar] \\ &= \exp[-i(\omega a^+ a + \omega_0 R_3 + K R^+ a a \\ &\quad + K a^+ a^+ R^-)t] \end{aligned} \quad (2)$$

系统的密度算符 $\rho(t)$ 为:

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^+(t) \quad (3)$$

式中

$$\rho(0) = \rho_F(0) \otimes \rho_A(0) \quad (4)$$

$\rho_F(0)$ 、 $\rho_A(0)$ 分别是光场、原子的初始约化密度算符, 光场的约化密度算符 $\rho_F(t)$ 为:

$$\rho_F(t) = T_{r_A} \rho(t) = \sum_{m=1}^2 \langle m | \rho(t) | m \rangle \quad (5)$$

式中 $|m\rangle$ 代表原子的本征态, $|n\rangle$ 代表光子数态, $\rho_F(t)$ 的矩阵元可表示为:

$$\begin{aligned} \langle n | \rho_F(t) | n' \rangle &= \sum_{m=1}^2 \langle m, n | \rho(t) | m', n' \rangle \\ &= \sum_{\substack{m=1,2 \\ k,l,k',l'}} \langle m, n | U(t) | K, \\ &\quad t \rangle \langle K, t | \rho(0) | K', t' \rangle \langle K', \\ &\quad t' | U^+(t) | n', m' \rangle \end{aligned} \quad (6)$$

这样就把求光场约化密度的矩阵元转化为求时移么正算符的矩阵元。根据光与原子的双光子相互作用的能量守恒定律知道除有四种么正时移算符的矩阵元不等零外, 其余都为零, 这些矩阵元表示为:

$$A_n = \langle 2, n-2 | U(t) | n, 1 \rangle \quad (7)$$

$$B_n = \langle 1, n | U(t) | n-2, 2 \rangle \quad (8)$$

$$C_n = \langle 2, n-2 | U(t) | n-2, 2 \rangle \quad (9)$$

$$D_n = \langle 1, n | U(t) | n, 1 \rangle \quad (10)$$

根据附录的计算, A_n 、 B_n 、 C_n 、 D_n 的具体表示式为:

$$A_n = \frac{K \sqrt{n(n-1)}}{\alpha_n - B_n} (e^{-i\alpha_n t} - e^{-iB_n t}) \quad (11)$$

$$B_n = \frac{\left[(n-2)\omega + \frac{1}{2}\omega_0 \right] - B_n}{\alpha_n - B_n} e^{-i\alpha_n t}$$

$$+ \frac{\alpha_n - \left[(n-2)\omega + \frac{1}{2}\omega_0 \right]}{\alpha_n - B_n} e^{-iB_n t} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{-\left(n\omega - \frac{1}{2}\omega_0 \right) + \alpha_n}{\alpha_n - B_n} e^{-i\alpha_n t} \\ &\quad + \frac{\left(n\omega - \frac{1}{2}\omega_0 \right) - B_n}{\alpha_n - B_n} e^{-iB_n t} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{\left(n\omega - \frac{1}{2}\omega_0 \right) - B_n}{\alpha_n - B_n} e^{-i\alpha_n t} \\ &\quad + \frac{\alpha_n - \left(n\omega - \frac{1}{2}\omega_0 \right)}{\alpha_n - B_n} e^{-iB_n t} \end{aligned} \quad (14)$$

这里入射光是压缩相干光, 为方便起见, 令压缩角为零, α 取实数, 令 $\alpha=3$, 故有

$$\rho_F(0) = |\alpha, T\rangle \langle \alpha, \gamma| \quad (15)$$

下面分别讨论原子初始处于基态或激发态两种情况。

1. 原子初态为基态的情况

$$\rho_A(0) = |1\rangle \langle 1| \quad (16)$$

我们有

$$\begin{aligned} \langle n | \rho_F(t) | n' \rangle &= \sum_{\substack{m,k,l \\ k',l'}} \langle m, n | U(t) | l, k \rangle \langle k, l | \alpha, \gamma \rangle \\ &\quad \times |1\rangle \langle 1| \langle \alpha, \gamma | l', k' \rangle \langle k', l' | U^+(t) | m, n' \rangle \\ &= D_n \psi_n \psi_{n'}^* D_n^* + A_{n+2} \psi_{n+2} \psi_{n'+2}^* A_{n'+2}^* \end{aligned} \quad (17)$$

式中 ψ_n 为压缩相干态在粒子数态的投影:

$$\begin{aligned} \psi_n &= (n! \mu)^{-\frac{1}{2}} (\nu/2\mu)^{n/2} H_n [B(2\mu\nu)^{\frac{1}{2}}] \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{1}{2}|B|^2 + (\nu^*/2\mu)B^2\right] \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $\mu = \text{ch } \gamma$, $\nu = \text{sh } r$, $B = \mu\alpha + \nu\alpha^*$

2. 原子初态为激发态的情况

$$\rho_A(0) = |2\rangle \langle 2| \quad (19)$$

我们有

$$\begin{aligned} \langle n | \rho_F(t) | n' \rangle &= \sum_{\substack{m,k,l \\ k',l'}} \langle m, n | U(t) | k, l \rangle \langle k, l | \alpha, \gamma \rangle |2\rangle \\ &\quad \times \langle 2 | \langle \alpha, \gamma | l', k' \rangle \langle k', l' | U^+(t) | m, n' \rangle \\ &= B_n \psi_{n-2} \psi_{n'-2} B_n^* + C_{n+2} \psi_n \psi_{n'} C_{n'+2}^* \end{aligned} \quad (20)$$

三、光场的压缩特性和光子统计分布

为了讨论光场的压缩特性及光子统计分布特性,引入 $F_1, F_2, g_{(0)}^{(2)}$

$$F_1 = \langle (\Delta x_1)^2 \rangle - 1/4 \quad (21)$$

$$F_2 = \langle (\Delta x_2)^2 \rangle - 1/4 \quad (22)$$

$$g_{(0)}^{(2)} = \frac{\langle a^+ a^+ a a \rangle}{\langle a^+ a \rangle^2} \quad (23)$$

式中 $x_1 = \frac{a + a^+}{2}, x_2 = \frac{a - a^+}{2i}$,

利用 $\rho_F(t)$ 的矩阵元表示,可得到:

$$\begin{aligned} F_{1,2} = & 1/4 \left\{ \pm 2 \operatorname{Re} \left[\sum_n \sqrt{(n+1)(n+2)} \right. \right. \\ & \times \langle n | \rho_f(t) | n+2 \rangle \\ & - \left. \left. \left(\sum_n \sqrt{n+1} \langle n | \rho_f(t) | n+1 \rangle \right)^2 \right. \right. \\ & + 2 \sum_n n \langle n | \rho_f(t) | n \rangle \\ & + \left. \left. - 2 \sum_n \sqrt{n+1} \langle n | \rho_f(t) \right. \right. \\ & \times \left. \left. | n+1 \rangle \right]^2 \right\} - 1/4 \quad (24) \end{aligned}$$

$$g_{(0)}^{(2)} = \frac{\sum_n n(n-1) \rho_{n,n}}{\left(\sum_n n \rho_{n,n} \right)^2} \quad (25)$$

在相互作用之前,我们知道^[3]

$$F_{1,2} = 1/4 (e^{\pm 2\gamma} - 1) \quad (26)$$

为方便起见计算时把光场频率 ω 固定取为 $100k$, k 取实数, α 取实数 3。由(17)式和(20)式,当 $n=n'$ 时即给出出射光场的光子数分布几率,图 1(a)、(b) 为初始原子处于基态,共振相互作用 ($\omega_0 = 200k, kT = 6$), 在入射光的压缩参数 γ 不同的情况下,出射光的光子数分布。可以看出,不同的压缩参数其出射光的光子数分布变化显然不同。当 $\gamma > 0$ 时, γ 越大,光子数分布变化越小,而 $\gamma < 0$ 时, $|\gamma|$ 越大,光子数分布变化越小。对 $\gamma = 0$,即相干光入射时,光子数分布变化最小。对于原子初态为激发态的情况,光子数分布也有类似的情形。

图 2(a)、(b) 分别为原子初态为基态 (a) 和激发态 (b) 情况下,出射光的光子数分布随时间的演化。可以看到,随着时间的演化,光子数分布出现多峰结构。

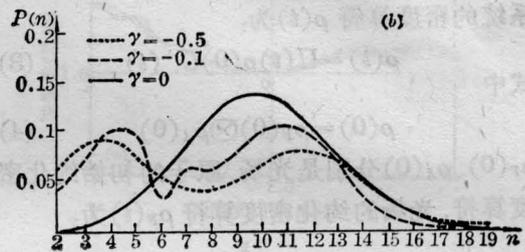
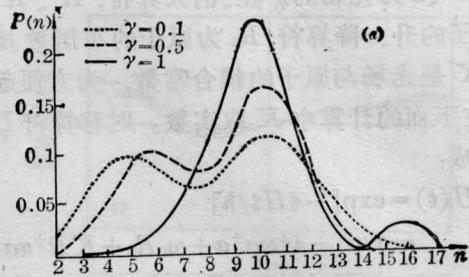


图 1

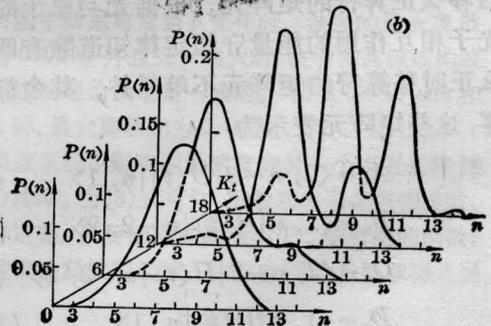
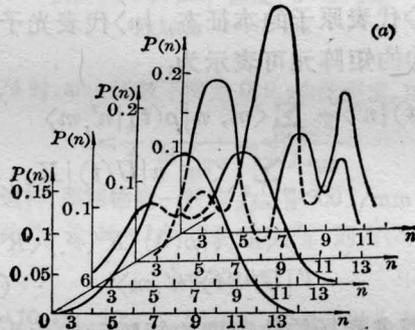


图 2

($\omega_0 = 200k, \gamma = 0.5, kT = 0.6, 12, 18$)

图 3 为光子数分布与失谐 $\delta\omega \left(= \frac{\omega_0}{2} - \omega \right)$ 的变化关系。随着失谐量的增大,光子数分布逐渐还原到相互作用之前的光子数分布。由此可得到:失谐量增大时,光与原子的

相互作用减弱，这与单光子相互作用的情况一样^[3]。

当 $\gamma > 0$ 时，入射光场具有反聚束特性，服从亚泊松统计；当 $\gamma = 0$ 时，入射光场服从泊松统计，而当 $\gamma < 0$ 时，入射光场服从超泊松统计。光与原子进行双光子相互作用后的情况见图 4(a)、(b)。图 4(a) 为共振相互作用 ($\omega_0 = 200k$) 情况。 $g^{(2)}$ 随时间 t 略有变化，在相干光输入时，出射光具有聚束性质，服从超泊松统计，而不再是泊松统计。而在非共振相互作用时， $g^{(2)}$ 几乎不发生变化(图 4(b))，由此亦可见随失谐量增大，光与原子的双光子相互作用减弱。

图 5 为相干光入射情况下，出射光的涨

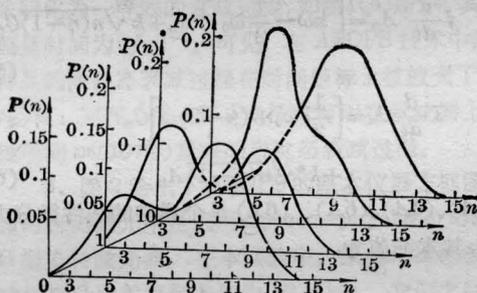


图 3 原子初态为基态, 光子数分布随 δ 的变化 ($\gamma = 0.5, kT = 6$)

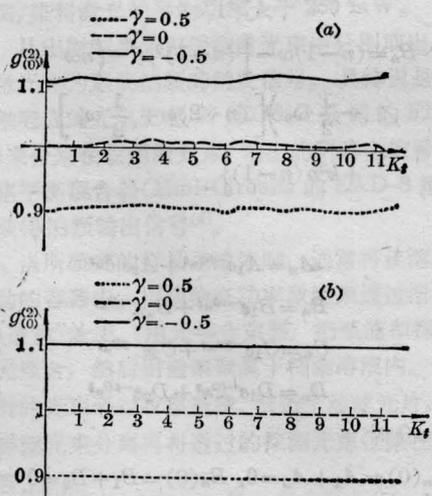


图 4 原子初态为基态, 光场 $g^{(2)}$ 随时间的演化 (a) $\omega = 200k$ (b) $\omega = 400k$

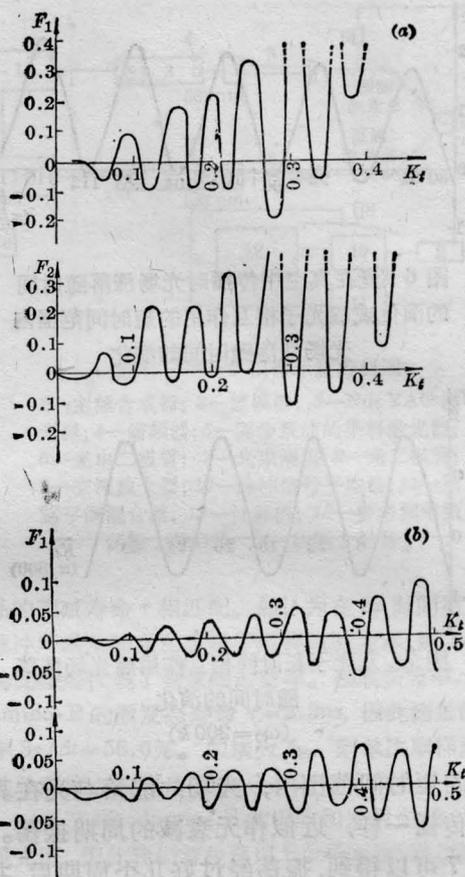


图 5 原子初态为基态时, 出射光的涨落随时间的演化 ($\gamma = 0$)

(a) $\omega_0 = 200k$ (b) $\omega_0 = 400k$

落 (F_1) 随时间的演化。由图可见，相干光与原子进行双光子相互作用后可产生压缩态光场，在共振相互作用时能产生较大的压缩量，但相互作用时间增大到一定程度，压缩效应就减弱、甚至消失了(如图 5(a))。在非共振相互作用时，失谐量越大，产生的压缩量越小，但维持压缩态存在的相互作用时间越长(图 5(b))。我们的结论与 Loudon^[1] 和 G. S. Agarwal^[2] 在定性上相符，但定量上不一致。我们认为这是因为他们忽略了光场和原子的自由哈密顿量所致。

图 6 和图 7 为压缩光入射的情况下出射光的压缩性质。由图 6 可见，不论是共振还是非共振情况，光与原子进行双光子相互作用

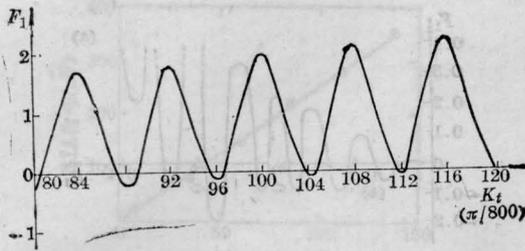


图6 光在真空中传播时光场涨落随时间的演化或双光子相互作用的短时间范围内光场涨落随时间的演化

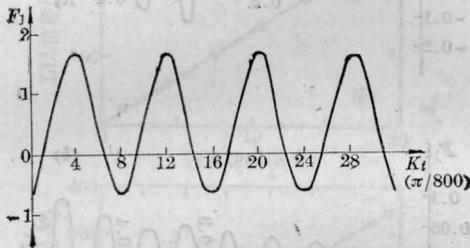


图7 双光子长时间相互作用后光场涨落随时间的演化
($\omega_0 = 200k$)

用的短时间范围内,光场的涨落与光在真空中传播一样,近似作无衰减的周期振荡。由图7可以得到,振荡经过好几个周期后,共振相互作用的出射光的压缩效应逐渐减弱直至消失,对失谐量较小的相互作用,相互作用后出射光压缩效应也要减弱,并趋于消失,但压缩效应存在相对应的相互作用时间比共振情况要长。而对失谐量较大的相互作用,如 $\delta = 100k$ 时,出射光的压缩效应不会改变,出射光性质与在真空中传播一样,这再次表明失谐增大,光与原子的双光子相互作用减弱。

参 考 文 献

- 1 Loudon R. *Opt. Commun.*, **49**, 67 (1984)
- 2 Agarwal G S, Hildred G P. *Opt. Commun.*, **58**, 287 (1986)
- 3 邹明亮,郭光灿。第二次全国量子光学会议论文,青岛,1986

附 录

我们由时移么正算符的运动方程出发,求时移

么正算符的矩阵元。由(1),

$$U(t) = \exp[-iHt/\hbar] \\ = \exp[-i(\omega a^\dagger a + \omega_0 B_3 + kR^+ a a + k^* a^\dagger a^\dagger R^-)t] \quad (1A)$$

由(1A)得:

$$\frac{d}{dt} \langle m, n | U(t) | l, k \rangle \\ = (-i) \langle m, n | U(t) [\omega_0 B_3 + \omega a^\dagger a + kR^+ a a + k^* a^\dagger a^\dagger R^-] | l, k \rangle \quad (2A)$$

由(2A)可得:

$$i \frac{d}{dt} D_n = \left(n\omega - \frac{1}{2} \omega_0 \right) D_n + k \sqrt{n(n-1)} B_n \quad (3A)$$

$$i \frac{d}{dt} B_n = \left[\frac{1}{2} \omega_0 + (n-2)\omega \right] B_n + k^* \sqrt{n(n-1)} D_n \quad (4A)$$

$$i \frac{d}{dt} A_n = \left[n\omega - \frac{1}{2} \omega_0 \right] A_n + k \sqrt{n(n-1)} C_n \quad (5A)$$

$$i \frac{d}{dt} C_n = \left[\frac{1}{2} \omega_0 + (n-2)\omega \right] C_n + k^* \sqrt{n(n-1)} A_n \quad (6A)$$

(3A)、(4A)、(5A)、(6A)是个通常的线性微分方程组,其本征值为:

$$\alpha_n = (n-1)\omega + \left\{ (n-1)^2 \omega^2 - \left(n\omega - \frac{1}{2} \omega_0 \right) \left[(n-2)\omega + \frac{1}{2} \omega_0 \right] + k^2 n(n-1) \right\} \quad (7A)$$

$$B_n = (n-1)\omega - \left\{ (n-1)^2 \omega^2 - \left(n\omega - \frac{1}{2} \omega_0 \right) \left[(n-2)\omega + \frac{1}{2} \omega_0 \right] + k^2 n(n-1) \right\} \quad (8A)$$

令

$$A_n = A_1 e^{-i\alpha_n t} + A_2 e^{iB_n t} \quad (9A)$$

$$B_n = B_1 e^{-i\alpha_n t} + B_2 e^{-iB_n t} \quad (10A)$$

$$C_n = C_1 e^{-i\alpha_n t} + C_2 e^{-iB_n t} \quad (11A)$$

$$D_n = D_1 e^{-i\alpha_n t} + D_2 e^{-iB_n t} \quad (12A)$$

当 $t=0$ 时

$$A_n(0) = A_1 + A_2 = 0, \quad B_n(0) = B_1 + B_2 = 0 \quad (13A)$$

$$C_n(0) = C_1 + C_2 = 1, \quad D_n(0) = D_1 + D_2 = 1 \quad (14A)$$

(9A)~(12A)代入(3A)~(8A),利用(13A)、(14A)即求出 A_n, B_n, C_n, D_n 。