

自聚焦棒外腔单频半导体激光器

张建平 陶尚平

(北京邮电学院)

提要: 本文提出了用振幅耦合因子描述激光器谐振腔与自聚焦棒光波导结构的差异及耦合腔的衍射损耗;讨论了自聚焦棒相对激光器作微小偏移对振幅耦合因子的影响。对自聚焦棒外腔半导体激光器的选模理论进行了实验验证。实现了单纵模运转,其边模抑制比大于 35 dB,线宽小于 21 MHz,最大的波长调谐范围为 11 nm。

A single frequency semiconductor laser with graded-index-rod external cavity

Zhang Jianping, Tao Shangping

(Beijing Institute of Posts and Telecommunications, Beijing)

Abstract: The amplitude coupling factor is suggested to describe the difference and diffraction loss of the coupling cavity, the influence on amplitude coupling factor caused by GRINROD's slight deviation is discussed. In our experiment single-longitudinal-mode operation has been obtained. The mainside mode ratio is greater than 35 dB, the linewidth less than 21 MHz, and the maximum wavelength tuning range is about 11 nm.

一、引言

相干光纤通信的研究开始于七十年代末,八十年代初,是迅速发展中的极有希望的下一代光纤通信系统。相干光纤通信系统的接收灵敏度在目前光纤通信系统的水平上提高了约 20 dB,同时大大改善了系统的频率选择性,进而可以实现频分复用,充分利用光纤的低色散窗口,提高通信容量^[1]。但相干光纤通信系统对光源及本地振荡源有极为严格的要求^[2]。普通自由运转激光器是多模运转,谱线宽,易受注入电流、环境温度变化的

影响,不能满足相干光纤通信的要求。

近几年,国内外广泛开展了对单频半导体激光器的研究。人们一方面不断改进半导体激光器的内部结构,做出了分布反馈(DFB)激光器、Bragg 反射激光器、解理耦合激光器等形式的半导体激光器,改善了半导体激光器的输出光谱特性。另一方面在半导体激光器的外部附加各种形式的外腔以达到选模和压窄谱线的目的。发展出了光栅外腔、平面镜外腔、光纤外腔、球面镜外腔、自聚焦棒外腔^[3]等一系列结构。由于长外腔结构的激光器调制性能不好,因而短外腔激光器

收稿日期:1987年6月4日。

受到人们越来越多的注意。目前有趋势把对内部结构的改进与加外腔这两者结合起来,以获得性能更好的激光器。

L. A. Coldren, C. L. Lin 等人在短外腔半导体激光器选模理论方面做了大量的工作^[3,4]。他们用谐振腔损耗调制理论,分析了短外腔半导体激光器的选模机理,提出了短外腔半导体激光器的设计原则。图1是短外腔半导体激光器的散射矩阵模型示意图。容易求出半导体激光器与外腔相对端面的等效振幅反射系数^[3]:

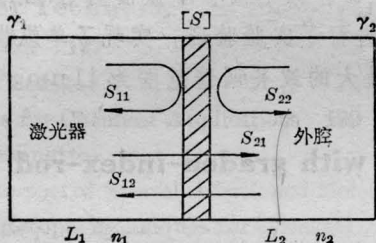


图1 散射矩阵模型

$$R_{\text{eff}} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\gamma_2 t_2^2}{1 - S_{22}\gamma_2 t_2^2} \quad (1)$$

外腔半导体激光器的阈值增益条件为:

$$G = \alpha_0 + \frac{1}{2l_1} \ln \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2} + \frac{1}{2l_1} \ln \frac{\gamma_2}{R_{\text{eff}}} \quad (2)$$

其中 γ_1, γ_2 是半导体激光器两端面的振幅反射系数; l_1 是半导体激光器的腔长; α_0 是半导体激光器谐振腔的损耗系数。附加损耗项 $\frac{1}{2l_1} \ln (\gamma_2 / R_{\text{eff}})$ 增加了主-边模净增益差, 如图2所示^[3]。第 i 个边模与主模的净增益差由自由运转时的 $\Delta g_{\text{net}} = \Delta g^i$ 增加为 $\Delta g_{\text{net}} = \Delta \alpha^i + \Delta g^i$, 使主模在模式竞争中大大超过边模, 因而边模能得到有效的抑制, 形成单纵模运转。

但他们在散射矩阵中没有考虑激光器谐振腔和外腔光波导结构差异的影响。笔者认为这种影响不可忽略。本文第二部分提出振幅耦合因子描述这种差异, 重新写出散射矩阵元的表达式。并以自聚焦棒外腔半导体激光器为例, 求出自聚焦棒相对半导体激光器

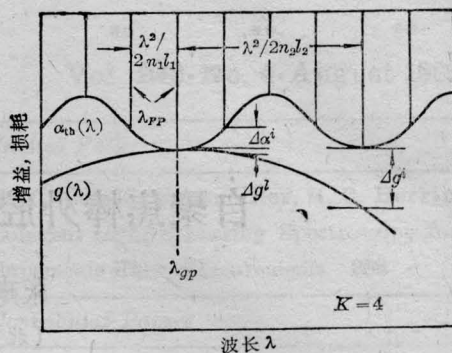


图2 增益曲线、损耗调制曲线随波长变化示意图

有横向和角偏移之下的振幅耦合因子表达式。本文第三部分, 报道在国内首次实现 $1.3 \mu\text{m}$ 自聚焦棒外腔半导体激光器单频运转的主要实验结果。

二、理 论

如图3所示, 自聚焦棒外腔半导体激光器是一个由三腔组成的复合腔结构。 n_1, n_c, n_2 分别是激光器谐振腔、耦合腔、自聚焦棒外腔中介质的折射率; l_1, d, l_2 分别是上述三腔的腔长; γ_3, γ_4 是自聚焦棒腔两端面的振幅反射系数。为便于考察耦合腔的作用, 将图3所示的自聚焦棒外腔半导体激光器等效为图1所示的模型。下面求出等效散射矩阵模型的矩阵元表达式。

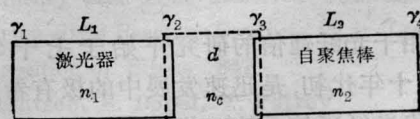


图3 自聚焦棒外腔半导体激光器示意图

2.1 自聚焦棒相对半导体激光器有横向偏移

设半导体激光器端面上出射光束是椭圆高斯光。在与有源层垂直及平行的两个方向上光束宽度分别为 ω_{e0}, ω_{y0} 。这样, 半导体激光器端面上的光场分布可表示为

$$\psi^1(x, y, 0) = A_0 e^{-\left(\frac{x^2}{\omega_{x_0}^2} + \frac{y^2}{\omega_{y_0}^2}\right)} \quad (3)$$

设自聚焦棒端面上出射光基模是高斯光, 而光束宽度为 $\omega_0^{[5]}$,

$$\omega_0 = \left(\sqrt{\frac{2}{V}} + \frac{0.23}{V^{3/2}} + \frac{18.01}{V^6}\right) a \quad (4)$$

其中 V 是归一化频率, a 是自聚焦棒芯径, 自聚焦棒端面光场分布为^[5],

$$\psi^2(x, y, 0) = \frac{2}{\omega_0} \left(\frac{P}{n_2 \pi}\right)^{1/2} \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/4} e^{-\left[\frac{(x-\delta)^2}{\omega_x^2} + \frac{y^2}{\omega_y^2}\right]} \quad (5)$$

其中 δ 是横向偏移量。

尽管半导体激光器有源层截面很小, 但激光器端面相对有源区截面要大得多, 为能得到解析表达, 简化计算, 忽略光束超出端面而造成衍射的损耗。

$\psi^1(x, y, 0)$ 及 $\psi^2(x, y, 0)$ 传播 nd 距离后分别为 $\psi^1(x, y, nd)$ 及 $\psi^2(x, y, nd)$ 。结合图 1、图 3 容易求得耦合腔的散射矩阵元 (S_{ij}), $i, j=1, 2$ (参见附录)。

$$\left\{ \begin{aligned} S_{11} &= \gamma_2 + (1 - \gamma_2^2) \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_3^m (-\gamma_2)^{m-1} \xi'_{11} \\ &\quad \times (2m) e^{-ik_0 2md + \frac{i}{2} \eta_1 (2m) - \alpha_c 2m d} \\ S_{22} &= -\gamma_3 + (1 - \gamma_3^2) \sum_{m=1}^{\infty} (-\gamma_2)^m \gamma_3^{m-1} \\ &\quad \times \xi'_{22} (2m) e^{-i(k_0 + \alpha_c) 2md + \frac{i}{2} \eta_2 (2m)} \\ S_{12} &= [(1 - \gamma_2^2)(1 - \gamma_3^2)]^{1/2} \sum_{m=1}^{\infty} (-\gamma_2)^{m-1} \\ &\quad \times \gamma_3^{m-1} \xi'_{12} (2m-1) e^{-ik_0 (2m-1)d} \\ &\quad \times e^{\frac{i}{2} \eta_1 (2m-1) - \alpha_c (2m-1)d} \\ S_{21} &= [(1 - \gamma_2^2)(1 - \gamma_3^2)]^{1/2} \sum_{m=1}^{\infty} (-\gamma_2)^{m-1} \\ &\quad \times \gamma_3^{m-1} \xi'_{21} (2m-1) e^{-ik_0 (2m-1)d} \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{i}{2} \eta_{21} (2m-1) - \alpha_c\right. \\ &\quad \left. \times (2m-1)d\right\} \end{aligned} \right. \quad (6)$$

其中 α_c 为耦合腔的损耗系数, k_0 为光在耦合腔中的波数。

$$\left\{ \begin{aligned} \eta_1 (2m) &= \text{tg}^{-1}(2m z_{1x}) + \text{tg}^{-1}(2m z_{1y}) \\ \eta_2 (2m) &= 2 \text{tg}^{-1}(2m z_2) \\ \eta_{21} (2m-1) &= \text{tg}^{-1}[(2m-1) z_{1x}] \\ &\quad + \text{tg}^{-1}[(2m-1) z_{1y}] \\ \eta_{12} (2m-1) &= 2 \text{tg}^{-1}[(2m-1) z_2] \end{aligned} \right. \quad (7)$$

且 $z_{1x}, z_{1y}, z_2, z_x, z_y$ 是由下列各式定义的归一化距离

$$\left\{ \begin{aligned} z_{1x} &= \frac{2d}{k_0 \omega_{x_0}^2} \\ z_{1y} &= \frac{2d}{k_0 \omega_{y_0}^2} \end{aligned} \right. \quad (8)$$

$$z_2 = \frac{2d}{k_0 \omega_0^2} \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{aligned} z_x &= \frac{d}{k_0 \omega_{x_0} \omega_0} \\ z_y &= \frac{d}{k_0 \omega_{y_0} \omega_0} \end{aligned} \right. \quad (10)$$

(6) 式中的 $\xi'_{ij}(n)$ 为振幅耦合因子, 定义为:

$$\xi'_{ij}(n) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{i*}(x, y, 0) \psi^j(x, y, nd) dx dy}{\left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{i*}(x, y, 0) \psi^i(x, y, 0) dx dy \right] \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{j*}(x, y, nd) \psi^j(x, y, nd) dx dy \right]^{1/2} \right\}} \quad (11)$$

其中 $i, j=1, 2$

振幅耦合因子综合反映了激光器谐振腔与自聚焦棒波导的结构差异, 它们的相对位置及光束在耦合腔中传播而产生的衍射损耗等因素的作用。由于衍射损耗, 振幅耦合因子随 n 的增加而迅速减小。在通常情况下计算散射矩阵元只需对前几项求和, 而 $\xi'_{11}(2)$ 、 $\xi'_{22}(2)$ 、 $\xi'_{12}(1)$ 、 $\xi'_{21}(1)$ 最为重要。

如(5)式及图 4 所设, 自聚焦棒在 x 方向上有 δ 偏移。求得振幅耦合因子为

$$\left\{ \begin{aligned} \xi'_{11}(2m) &= \xi_{11}(2m) \\ \xi'_{22}(2m) &= \xi_{22}(2m) \\ \xi'_{21}(2m-1) &= \xi_{21}(2m-1) \exp \left\{ -\delta^2 \frac{\frac{\omega_{x_0}^2 + \omega_0^2}{\omega_0^2} + 4z_x^2(2m-1)^2 \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_{x_0}^2}\right)}{\left[4(2m-1)^2 z_x^2 + \frac{\omega_{x_0}^2 + \omega_0^2}{\omega_0^2}\right]^2 + \left[2(2m-1)z_x \frac{\omega_0}{\omega_{x_0}}\right]^2} \right\} \\ \xi'_{12}(2m-1) &= \xi_{12}(2m-1) \exp \left\{ -\delta^2 \frac{\frac{\omega_{x_0}^2 + \omega_0^2}{\omega_{x_0}^2} + 4z_x^2(2m-1)^2 \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_{x_0}^2}\right)}{\left[4(2m-1)^2 z_x^2 + \frac{\omega_{x_0}^2 + \omega_0^2}{\omega_{x_0}^2}\right]^2 + \left[2(2m-1)z_x \frac{\omega_{x_0}}{\omega_0}\right]^2} \right\} \end{aligned} \right. \quad (12)$$

式中 $\xi_{11}(2m)$ 、 $\xi_{22}(2m)$ 、 $\xi_{21}(2m-1)$ 、 $\xi_{12}(2m-1)$ 是无偏移理想状态下的振幅耦合因子 (见附录二)。

(12) 式不难推广到任意横向偏移的情况。图 5 中的曲线 1、曲线 2 分别对应于 $\xi'_{21}(1)$ 、 $\xi'_{12}(1)$ 随 δ 的变化曲线。

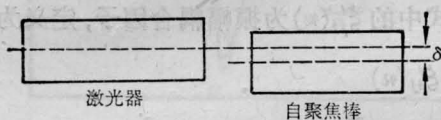


图 4 自聚焦棒有横向偏移

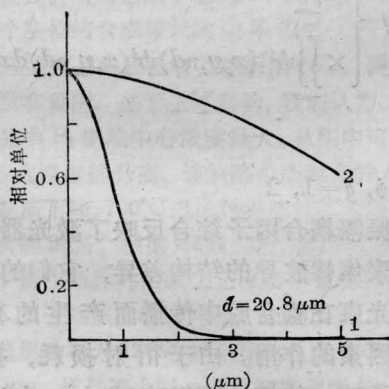


图 5. $\xi'_{21}(1)$ 、 $\xi'_{12}(1)$ 随 δ 的变化曲线

2.2 角偏移

图 6 所示的是自聚焦棒相对激光器有角偏移的情况。为讨论方便, 设自聚焦棒在 $x-z$ 平面内有 θ 角的倾斜 (θ 很小), 不难求得此

时的振幅耦合因子为:

$$\begin{aligned} \xi''_{11}(2m) &= \xi_{11}(2m) \exp \left\{ -\frac{(2\pi\omega_{x_0}\theta)^2}{[2 + (2mz_{1x})^2]\lambda} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \xi''_{22}(2m) &= \xi_{22}(2m) \exp \left\{ -\frac{(2\pi\omega_0\theta)^2}{[2 + (2mz_{2z})^2]\lambda} \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \xi''_{12}(2m-1) &= \xi_{12}(2m-1) \\ &\times \exp \left\{ -\frac{(\pi\theta\omega_{x_0})^2 [\omega_0^2 + 4(2m-1)^2\omega_{x_0}^2]}{\lambda [\omega_0^2 + (4(2m-1)^2 z_x^2 + 1)\omega_{x_0}^2]} \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \xi''_{21}(2m-1) &= \xi_{21}(2m-1) \\ &\times \exp \left\{ -\frac{(\pi\theta\omega_0)^2 [\omega_{x_0}^2 + 4(2m-1)^2\omega_0^2]}{\lambda [\omega_{x_0}^2 + (4(2m-1)^2 z_x^2 + 1)\omega_0^2]} \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

图 7 中曲线 1、2、3、4 分别对应于 $\xi''_{11}(2)$ 、 $\xi''_{22}(2)$ 、 $\xi''_{21}(1)$ 、 $\xi''_{12}(1)$ 的变化曲线。

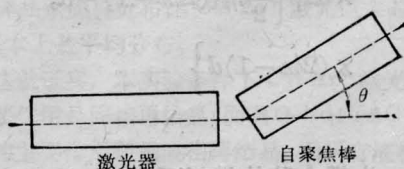


图 6 自聚焦棒有 θ 角度的偏移

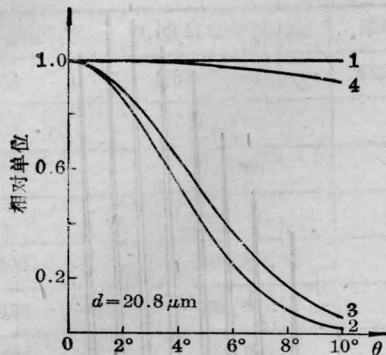


图7 振幅耦合因子随 θ 的变化曲线

三、实验

图8是自聚焦棒外腔激光器的结构示意图。我们用普通渐变折射率多模光纤制作了自聚焦棒。首先把多模光纤固定在毛细管中，然后经切片、研磨、抛光等工序使自聚焦棒的长度恰好稍小于 $1/4$ 周期(约 $180\mu\text{m}$)。并使自聚焦棒的两端面达到一定的光洁度，最后在自聚棒的一端面镀全反膜，而在另一端面镀增透膜，其反射率可根据实际需要选择。在我们的实验中， $|\gamma_4|^2 > 98\%$ ， $|\gamma_3|^2 < 1\%$ 。自聚焦棒固定在压电陶瓷上，改变加在压电陶瓷上的电压即可对耦合腔腔长作细微调节。

激光器的边模抑制比和谱线宽度是衡量单频激光器的两个重要指标。由于仪器性能的限制，我们用两套测谱系统测量上述两参数。由单色仪组成的测谱系统测量边模抑制比，由扫描干涉仪组成的系统测量谱宽。扫

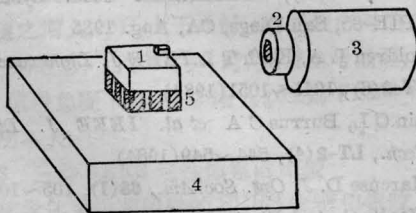


图8 自聚焦棒外腔激光器结构示意图

1—激光器；2—自聚焦棒；3—压电陶瓷；
4—热沉；5—半导体致冷器

描干涉仪是共焦型的，自由光谱范围 1.82GHz ，分辨率是 9MHz ，测量系统框图如图9所示。

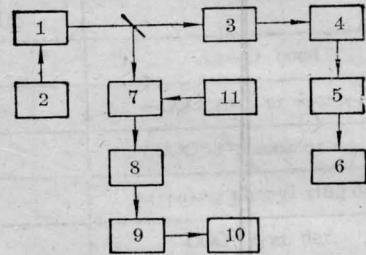


图9 测量系统框图

1—自聚焦棒外腔半导体激光器；2—恒流源；3—单色仪；4、8—Ge探测器；5、9—放大器；6—X-Y记录仪；7—扫描干涉仪；10—示波器；11—锯齿波发生器

1. 实现高边模抑制比的单纵模运转。实验测得其边模抑制比大于 35dB 。图10是 $105\text{-}89^\#$ 激光器自由运转时的光谱。图11是同一激光器在相同工作条件下(注入电流 60.1mA ，工作温度 18°C)加自聚焦棒光反馈后的光谱，从图示谱线几乎找不到边模。自聚焦棒外腔激光器可稳定工作4小时而不发生跳模，但为研究的方便，没有对自聚焦棒作固化处理，外界因素(如振动、环境温度变化)所引起的自聚焦棒位置变化，使激光器发生跳模式边模抑制比下降。

2. 获得了较窄的谱线。图12是用共焦扫描干涉仪获得的光谱图。注入电流 $I = 53.0\text{mA}$ ($I/I_{th} = 1.1$)，单端输出功率 1.89mW ，

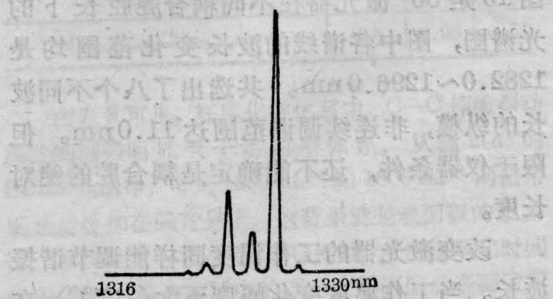


图10 $105\text{-}89^\#$ 激光器自由运转时光谱图

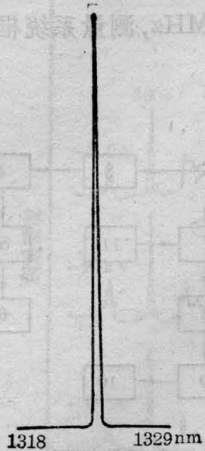


图 11 105-89# 激光器加自聚焦棒光反馈后的光谱图

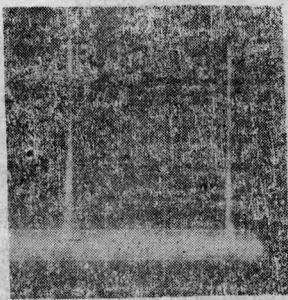


图 12 扫描干涉仪测得的自聚焦棒外腔半导体激光器光谱

测得其谱宽小于 21 MHz。线宽功率积小于 39.6 MHz·mW, 自由运转时, 单纵模线宽功率乘积为 123.6 MHz·mW。

3. 实现了对激光器谐振波长的调谐。适当调节耦合腔长能使激光器单纵模运转。图 13 是 56# 激光器在不同耦合腔长下的光谱图, 图中各谱线的波长变化范围均是 1282.0~1296.0 nm。共选出了八个不同波长的纵模, 非连续调谐范围达 11.0 nm。但限于仪器条件, 还不能确定是耦合腔的绝对长度。

改变激光器的工作温度同样能调节谐振波长。当工作温度变化幅度不大 ($<1^{\circ}\text{C}$), 在单纵模运转状态下的半导体激光器谐振波长

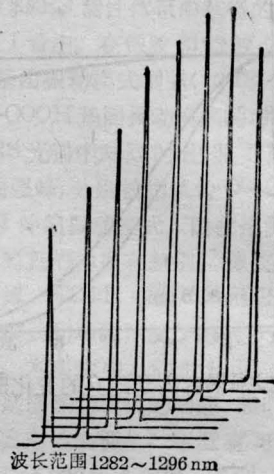


图 13 不同耦合腔长下自聚焦棒外腔半导体激光器的光谱图

作连续变化; 当工作温度变化超出一定的幅度, 激光器发生跳模, 这时模式竞争剧烈, 输出不稳定; 温度进一步变化, 又一次形成单纵模运转(不同纵模)。从稳定的单纵模运转到形成另一纵模的稳定单纵模运转, 温度变化幅度约为 $1.5\sim 2^{\circ}\text{C}$ 。

本文的工作得到了中国科学院半导体研究所庄婉如、彭怀德同志, 中国计量科学院夏永健同志的热情帮助, 在此表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- 1 Okosh T. *IEEE J. Lightwave Tech.*, **LT-2**(4), 341~346(1984)
- 2 Kazovsky L G. "Coherent optical receiver: Performance analysis and linewidth requirements", (Invited talk), International Tech. Symposium SPIE-85, San Diego, CA, Aug. 1985
- 3 Coldren L A, Koch T L. *IEEE J. Lightwave Tech.*, **LT-2**(6), 1045~1051(1984)
- 4 Lin C L, Burrus C A *et al.* *IEEE J. Lightwave Tech.*, **LT-2**(4), 544~549(1984)
- 5 Marcuse D. *J. Opt. Soc. Am.*, **68**(1), 105~109(1978)
- 6 Wenke G *et al.* *Electron. Lett.*, **22**, 206~207(1986)
- 7 Lion K Y. *Electron. Lett.*, **19**(19), 750~751(1983)

附 录

一、求耦合腔散射矩阵元 S_{11}

从半导体激光器出射的光束经自聚焦棒端面反射回到激光器端面时的相对振幅强度为

$$(1-\gamma_2^2)^{1/2}\gamma_3\xi_{11}(2d)e^{-ik_0 2d + \frac{i}{2}\eta_1(2d) - \alpha_c \cdot 2d}$$

经自聚焦棒端面二次反射再回到激光器端面时的相对振幅强度为

$$(1-\gamma_2^2)^{1/2}(-\gamma_2)\gamma_3^2\xi_{11}(4d)e^{-ik_0 4d + \frac{i}{2}\eta_1(4d) - \alpha_c \cdot 4d}$$

因此有

$$\begin{aligned} S_{11} &= \gamma_2 + (1-\gamma_2^2)\gamma_3\xi_{11}(2d) \\ &\quad e^{-ik_0 2d + \frac{i}{2}\eta_1(2d) - \alpha_c \cdot 2d} \\ &\quad + \dots + (1-\gamma_2^2)\gamma_3^m(-\gamma_2)^{m-1}\xi_{11}(2md) \\ &\quad \times e^{-ik_0 2md + \frac{i}{2}\eta_1(2md) - \alpha_c \cdot 2md + \dots} \\ &= \gamma_2 + (1-\gamma_2^2) \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_3^m (-\gamma_2)^{m-1} \xi_{11} \\ &\quad \times (2md) e^{-ik_0 2md + \frac{i}{2}\eta_1(2md) - \alpha_c \cdot 2md} \end{aligned}$$

二、自聚焦棒位置为理想状态时的振幅

耦合因子

$$\begin{aligned} \xi_{11}(2m) &= \left\{ \frac{(1+(2mz_{1x})^2)(1+(2mz_{1y})^2)}{[(1+2(mz_{1x})^2)^2+(mz_{1x})^2][(1+2(mz_{1y})^2)^2+(mz_{1y})^2]} \right\}^{1/4} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{i}{2}\left[\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{mz_{1x}}{1+2(mz_{1x})^2}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{mz_{1y}}{1+2(mz_{1y})^2}\right)\right]\right\} \\ \xi_{22}(2m) &= \left\{ \frac{1+(2mz_2)^2}{1+2(mz_2)^2+(mz_2)^2} \right\} \exp\left\{-i \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{mz_2}{1+2(mz_2)^2}\right)\right\} \\ \xi_{21}(2m-1) &= 2 \left\{ \frac{\left[4(2m-1)^2z_x^2 + \frac{\omega_{x0}^2}{\omega_0^2}\right]\left[4(2m-1)^2z_y^2 + \frac{\omega_{y0}^2}{\omega_0^2}\right]}{\left\{ \left[\left(4(2m-1)^2z_x^2 + \frac{\omega_{x0}^2 + \omega_0^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4(2m-1)^2z_x^2 \frac{\omega_{x0}^2}{\omega_0^2} \right] \right.} \right. \\ &\quad \left. \times \left[\left(4(2m-1)^2z_y^2 + \frac{\omega_{y0}^2 + \omega_0^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4(2m-1)^2z_y^2 \frac{\omega_{y0}^2}{\omega_0^2} \right] \right\}^{1/4} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{i}{2} \operatorname{tg}^{-1}\left[\frac{2z_x(2m-1)\omega_0}{\omega_{x0}\left(4(2m-1)^2z_x^2 + 1 + \frac{\omega_{x0}^2}{\omega_0^2}\right)}\right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2} \operatorname{tg}^{-1}\left[\frac{2z_y(2m-1)\omega_0}{\omega_{y0}\left(4(2m-1)^2z_y^2 + 1 + \frac{\omega_{y0}^2}{\omega_0^2}\right)}\right] \right\} \\ \xi_{12}(2m-1) &= 2 \left\{ \frac{\left(4(2m-1)^2z_x^2 + \frac{\omega_{x0}^2}{\omega_0^2}\right)\left(4(2m-1)^2z_y^2 + \frac{\omega_{y0}^2}{\omega_0^2}\right)}{\left\{ \left[\left(4(2m-1)^2z_x^2 + \frac{\omega_{x0}^2 + \omega_0^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4(2m-1)^2z_x^2 \frac{\omega_{x0}^2}{\omega_0^2} \right] \right.} \right. \\ &\quad \left. \left\{ \left[\left(4(2m-1)^2z_y^2 + \frac{\omega_{y0}^2 + \omega_0^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4(2m-1)^2z_y^2 \frac{\omega_{y0}^2}{\omega_0^2} \right] \right\} \right\}^{1/4} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{i}{2} \operatorname{tg}^{-1}\left[\frac{2(2m-1)z_x\omega_{x0}}{\omega_0\left(4(2m-1)^2z_x^2 + 1 + \frac{\omega_{x0}^2}{\omega_0^2}\right)}\right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2} \operatorname{tg}^{-1}\left[\frac{2(2m-1)z_y\omega_{y0}}{\omega_0\left[4(2m-1)^2z_y^2 + 1 + \frac{\omega_{y0}^2}{\omega_0^2}\right]}\right] \right\} \end{aligned}$$