中国激光
第15卷 第10期

激光大气传输光束漂移的双色相关

张 逸 新
(华东工学院)

提要: 研究了强湍流起伏区域内光束漂移的频率相关函数、准相位共轭镜等对激光束漂移频率相关函数及漂移方差的补偿、反射放大效应。

Two-colour correlation of laser beam displacement in turbulent atmosphere

Zhang Yixin

(East China Institute of Technology, Nanjing)

Abstract: Compensation and reflection amplification effects of the quasi-conjugate mirrors *etc* on the frequency correlation function of the light beam displacement and displacement variance of the laser beam in the turbulent atmosphere were studied.

一、引 言

光波双频 MCF[1]、双频对数振幅及相位起伏结构函数和双频强度起伏概率分布[2]等湍流大气中传输的光波双频统计特性已有较多研究成果报道。在前文[3]我们曾在微扰近似下，讨论了聚焦激光束在湍流大气中传输时的光束抖动频率相关函数。本文将利用马尔柯夫近似进一步讨论适用于包含强湍流起伏区域在内的双频激光束漂移(即抖动)的相关问题，同时分析经准相位共轭镜(角反射器)反射后回波光束抖动频率相关函数的补偿和平面镜的反射放大特性。

二、漂移的频率相关函数

由光束漂移理论可知，光束通过湍流大气后传播方向与原方向的角偏离为：[4]：

$$\sigma_c=\frac{1}{p_0L}\int_0^L d\xi(L-\xi)\times\int d^2\rho I(\xi,\ \boldsymbol{\rho})\nabla_\rho n_1(\xi,\ \boldsymbol{\rho}) \quad (1)$$

式中 $p_0=\int I(\xi,\ \boldsymbol{\rho})\,d^2\rho$ 为光束的总光通量，$I(\xi,\ \boldsymbol{\rho})$ 为光束在 ξ=常数平面处的光强，∇_ρ 为横向梯度算子，$\boldsymbol{\rho}$ 为接收面内的矢径，$n_1=n-\langle n\rangle$ 是大气折射率起伏，L 是光束通过的

收稿日期：1987年6月19日。

距离。

假设大气折射率起伏 n_1 是统计均匀的高斯随机量，并且在光束传播方向上满足 delta 相关条件。这样由(1)式和"马尔柯夫近似"[5]我们可以得到光束漂移频率相关函数：

$$B_c(L, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{2\pi}{(p_0L)^2}\int_0^L d\xi(L-\xi)^2\int d^2K K^2\phi_n(K) \times \int d^2\rho_1 d^2\rho_2 \exp[i\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2)] \times \langle I(\xi, \boldsymbol{\rho}_1, \lambda_1)I(\xi, \boldsymbol{\rho}_2, \lambda_2)\rangle \quad (2)$$

上式的 $\phi_n(K)$ 是三维湍流谱密度，K 是空间频率，$\langle\ \rangle$ 表示对湍流介质的系综平均。

在弱湍流起伏区域和强湍流起伏区域(光束等效半径远大于光强起伏空间相关尺度)内，对光束漂移而言取近似 $I(\xi, \boldsymbol{\rho})\approx\langle I(\xi, \boldsymbol{\rho})\rangle$ 是合适的[4~5]。那么由此近似可把(2)式简化为：

$$B_c(L, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{2\pi}{(p_0L)^2}\int_0^L (L-\xi)^2 d\xi\int d^2K K^2\phi_n(K) \times \int d^2\rho_1 d^2\rho_2 \exp[i\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2)] \times \langle I(\xi, \boldsymbol{\rho}_1, \lambda_1)\rangle\langle I(\xi, \boldsymbol{\rho}_2, \lambda_2)\rangle \quad (3)$$

苏联学者 A.I.Kon 等通过分析求得在"平方近似"下的平均光强[6]：

$$\langle I(x, \boldsymbol{\rho})\rangle = \frac{A_0^2\alpha_0^2}{\alpha_{\rm eff}^2(x)}\exp\left[-\frac{\rho^2}{\alpha_{\rm eff}^2(x)}\right] \quad (4)$$

这里 A_0 为源平面(0, 0)处光场的振幅。而 $\alpha_{\rm eff}^2(\xi)$ 为：

$$\alpha_{\rm eff}^2(\xi) = \alpha_0^2\left[\left(1-\frac{\xi}{F}\right)^2+\frac{1}{\Omega^2}+\frac{8\sigma_0^{12/5}}{\Omega}\right];$$

$$\Omega = \frac{k\alpha_0^2}{\xi};\ \sigma_0^2 = 0.308\,C_n^2k^{7/6}\xi^{11/6}$$

这里 α_0 为光源等效发射半径，F 为光束波阵面曲率半径，C_n^2 为折射率起伏结构常数，$k=\frac{2\pi}{\lambda}$ 是光场的波数。

利用关系式(4)可把方程(3)中的 $\langle I(\xi, \boldsymbol{\rho}_1, \lambda_1)\rangle\langle I(\xi, \boldsymbol{\rho}_2, \lambda_2)\rangle$ 用下列解析式表示：

$$\langle I(\xi, \boldsymbol{\rho}_1, \lambda_1)\rangle\langle I(\xi, \boldsymbol{\rho}_2, \lambda_2)\rangle = \frac{A_0^4\alpha_0^4}{\alpha_{\rm eff}^2(\lambda_1)\alpha_{\rm eff}^2(\lambda_2)} \times \exp\left\{-\left[\frac{\alpha_{\rm eff}^2(\lambda_1)+\alpha_{\rm eff}^2(\lambda_2)}{\alpha_{\rm eff}^2(\lambda_1)\alpha_{\rm eff}^2(\lambda_2)} \times\left(\frac{\rho^2}{4}+R^2\right)+[\alpha_{\rm eff}^{-2}(\lambda_1)-\alpha_{\rm eff}^{-2}(\lambda_2))]\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{R}\right\} \quad (5)$$

式中 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2$, $\boldsymbol{R}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\rho}_1+\boldsymbol{\rho}_2)$。

在(3)式中应用包含湍流外尺度的指数型湍谱[4]：

$$\phi_n(K) = 0.033\,C_n^2K^{-11/3}\left[1-\exp\left(-\frac{K^2}{K_0^2}\right)\right] \quad (6)$$

这里的 $K_0=\frac{2\pi}{L_0}$，$L_0=\nu h$ 是湍涡外尺度，h 为光束发射端离地高度[4]，ν 为取值范围在 0.1 到 1 之间的比例系数[7]。由关系式(5)和(6)式我们即得到同时也适用于包含强湍流起伏区域的漂移频率相关函数：

$$B_c(L, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{0.066\pi^2C_n^2\Gamma(1/6)}{L^2}\int_0^L (L-\xi)^2 d\xi \times\left[\left(\frac{\alpha_1^2}{2}\right)^{-1/6}-\left(\frac{\alpha_1^2}{2}+\frac{1}{K_0^2}\right)^{-1/6}\right] \quad (7)$$

(7)式中 α_1^2 的具体表达式为：

$$\alpha_1^2(\lambda_1, \lambda_2) = \left\{\frac{1}{2}\left[\alpha_{\rm eff}^{-2}(\lambda_1)+\alpha_{\rm eff}^{-2}(\lambda_2) - \frac{[\alpha_{\rm eff}^{-2}(\lambda_1)+\alpha_{\rm eff}^{-2}(\lambda_2)]^2}{\alpha_{\rm eff}^{-2}(\lambda_1)\alpha_{\rm eff}^{-2}(\lambda_2)}\right]\right\}^{-1} = \frac{\alpha_{\rm eff}^2(\lambda_1)+\alpha_{\rm eff}^2(\lambda_2)}{2}$$

显然，由于 $\alpha_{\rm eff}^2(\lambda_i)$ $(i=1, 2)$ 是光源波长的函数，漂移的频率相关函数 $B_c(L, \lambda_1, \lambda_2)$ 也应是光源波长的函数，由 $B_c(L, \lambda_1, \lambda_2)$ 的定义我们可以进一步得出光束漂移是光源波长函数的结论。

如果考虑聚焦和准直激光束在弱湍流区域传输。忽略湍流起伏导致光强起伏，则可近似取 $I(\xi, \boldsymbol{\rho})\approx I\left(\frac{L}{2}, \boldsymbol{\rho}\right)$，在此近似下我

们可得到 B_c 的近似解析式:

$$B_c(L,\ \lambda_1,\ \lambda_2)$$
$$=0.022\Gamma(1/6)C_n^2\pi^2 L$$
$$\times\left[\left(\frac{\alpha_1^2}{2}\right)^{-1/6}-\left(\frac{\alpha_1^2}{2}+\frac{1}{K_0^2}\right)^{-1/6}\right] \quad (8)$$

如果两束重叠光束的发射波长相同($\lambda_1=\lambda_2$),则由(6)式可得到单色光束漂移方差公式[6]:

$$\sigma_c^2=\frac{0.066\Gamma(1/6)C_n^2\pi^2}{L^2}\int_0^L (L-\xi)^2 d\xi$$
$$\times\left[\left(\frac{\alpha_{\rm eff}^2}{2}\right)^{-1/6}-\left(\frac{\alpha_{\rm eff}^2}{2}+\frac{1}{K_0^2}\right)^{-1/6}\right] \quad (9)$$

由(9)式我们可求得与光束漂移最大相对应的光源波长:

$$\lambda_D=4.23\alpha_0^{5/6}C_n L^{1/2} \quad (10)$$

三、补偿与放大

为方便起见,我们仅限于讨论光束经准相位共轭镜(角反射器)和平面镜反射后的光束漂移的反射效应,这两种反射器也是实验中常用的反射器。

假设在发射端光场复振幅为:

$$u^+|_{x=0}=v(\boldsymbol{\rho}) \quad (11)$$

而经反射器反射后,回波光场的复振幅则为:

$$u^-|_{x=L}=u^-(L,\ \boldsymbol{\rho})=\int T(\boldsymbol{\rho}',\ \boldsymbol{\rho})u^+(L,\ \boldsymbol{\rho}')d^2\rho' \quad (12)$$

上式包含核 T 的积分变换反映了反射器的反射作用,我们将采用下列反射核函数 T 描述反射器的反射作用[8]:

$$T(\boldsymbol{\rho}',\ \boldsymbol{\rho})=e^{i\varphi}\delta(\boldsymbol{\rho}'-\Lambda\boldsymbol{\rho}) \quad (13)$$

这里 φ 是由于反射引起的常相移。$\delta(\boldsymbol{\rho})$ 是两维狄拉克 delta 函数,Λ 是二维方阵。

$$\Lambda=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ \lambda_2\},\ \lambda_i=\pm1,\ i=1,\ 2 \quad (14)$$

当反射器为平面镜 $\lambda_1=\lambda_2=1$, 即 $\Lambda=I$(单位方阵)。而 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 表示光束经角反射器反射。

忽略大气吸收和湍流的后向散射损耗,由关系式(1)和上述讨论,可得到反射回波在 $L\leqslant\xi\leqslant 2L$ 范围内传输时束心的角漂移:

$$\boldsymbol{\sigma}_{cr}=\frac{1}{Lp_0}\int_L^{2L}(2L-\xi)d\xi$$
$$\times\iint_{-\infty}^{\infty}d^2\rho I_r(2L-\xi,\ \Lambda\boldsymbol{\rho})$$
$$\times\nabla_\rho n_1(2L-\xi,\ \boldsymbol{\rho})$$
$$=\frac{1}{Lp_0}\int_0^L(L-\xi)d\xi$$
$$\times\iint_{-\infty}^{\infty}d^2\rho I_r(L-\xi,\ \Lambda\boldsymbol{\rho})\nabla_\rho n_1(L-\xi,\ \boldsymbol{\rho}) \quad (15)$$

$I_r(L-\xi,\ \Lambda\boldsymbol{\rho})$ 为回波光强。

光束返回接收端的总角漂移则由下式表示:

$$\boldsymbol{\sigma}_r=\frac{1}{Lp_0}\int_0^L(L-\xi)d\xi$$
$$\times\iint_{-\infty}^{\infty}d^2\rho[I(\xi,\ \boldsymbol{\rho})\nabla_\rho n_1(\xi,\ \boldsymbol{\rho})$$
$$+I_r(L-\xi,\ \Lambda\boldsymbol{\rho})\nabla_\rho n_1(L-\xi,\ \boldsymbol{\rho})] \quad (16)$$

类似于(2)式的推导,利用 n_1 的 delta 相关性质由"马尔柯夫近似"和(16)式我们可得到激光在折迭光路上传输时光束漂移的频率相关函数:

$$B_r(2L,\ \lambda_1,\ \lambda_2)$$
$$=\langle\boldsymbol{\sigma}_r(2L,\ \lambda_1)\cdot\boldsymbol{\sigma}_r(2L,\ \lambda_2)\rangle$$
$$=B_c(2L,\ \lambda_1,\ \lambda_2)$$
$$+\frac{2\pi L}{p_0^2}\int_0^1(1-\xi)\xi d\xi$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\int d^2\rho_1 d^2\rho_2 K^2 d^2K$$
$$\times\phi_n(K)\{\langle I(\xi,\ \boldsymbol{\rho}_1,\ \lambda_1)$$
$$\times I_r(\xi,\ \Lambda\boldsymbol{\rho}_1,\ \lambda_2)\rangle\exp[i\boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{\rho}_1-\Lambda\boldsymbol{\rho}_2)]$$
$$+\langle I(\xi,\ \boldsymbol{\rho}_2,\ \lambda_2)I_r(\xi,\ \Lambda\boldsymbol{\rho}_1,\ \lambda_1)\rangle$$
$$\times\exp[i\boldsymbol{K}\cdot(\Lambda\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2)]\} \quad (17)$$

与单色激光在湍流大气中传输时受平面镜反射后光束漂移有放大一样[9],在 $\Lambda=I$ 的条件下漂移频率相关函数也有平面镜反射增

大效应，即 $B_r(2L, \lambda_1, \lambda_2) \geqslant B_c(2L, \lambda_1, \lambda_2)$，这里 $B_c(2L, \lambda_1, \lambda_2)$ 在光束直接通过 $2L$ 湍层时光束漂移频率相关函数。而在 $\Lambda=-I$（准相位共轭镜反射）的条件下，则光束漂移频率相关函数有反射补偿现象，即

$$B_r(2L, \lambda_1, \lambda_2) \leqslant B_c(2L, \lambda_1, \lambda_2),$$

而 $B_r(2L, \lambda_1, \lambda_2)$ 的具体表达式为：$(\Lambda=-I)$

$$\begin{aligned} B_r(2L, \lambda_1, \lambda_2) &= B_c(2L, \lambda_1, \lambda_2) - \frac{2\pi L}{p_0^2}\int_0^1 (1-\xi)\xi d\xi \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int d^2\rho_1 d^2\rho_2 d^2K \\ &\times K^2\phi_n(K)\{\langle I(\xi, \boldsymbol{\rho}_1, \lambda_1) \\ &\times I_r(\xi, \boldsymbol{\rho}_2, \lambda_2)\rangle \exp[i\boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2)] \\ &+\langle I(\xi, \boldsymbol{\rho}_2, \lambda_2) I_r(\xi, \boldsymbol{\rho}_1, \lambda_1)\rangle \\ &\times \exp[i\boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2)]\} \end{aligned} \tag{18}$$

在弱湍流起伏区，当考虑准直和聚焦于反射器上的聚焦光束($F=L$)传输时，我们以反射器处的光强近似等于光路上各点的光强：

$$I_r(\xi, \boldsymbol{\rho}, \lambda_i) \approx I(\xi, \boldsymbol{\rho}, \lambda_i) \approx I(L, \boldsymbol{\rho}, \lambda_i), \quad i=1, 2 \tag{19}$$

在此近似下我们可得到反射回波光束漂移频率相关函数的近似解析式：

$$\begin{aligned} B_r(2L, \lambda_1, \lambda_2) &= \Gamma(1/6) C_n^2 \pi^2 L \times \left[\left(\frac{\alpha_1^2}{2}\right)^{-1/6} - \left(\frac{\alpha_1^2}{2}+\frac{1}{K_0^2}\right)^{-1/6}\right]\begin{cases}0.033\\0.011\end{cases} \\ &= B_c(2L, \lambda_1, \lambda_2)\begin{cases}\dfrac{3}{2}; & (\Lambda=I)\\[2mm] \dfrac{1}{2}; & (\Lambda=-I)\end{cases} \end{aligned} \tag{20}$$

当单色波传输时由(20)式可得到经准相位共轭镜反射后的光束漂移方差：

$$\sigma_r^2(2L) = \frac{1}{2}\sigma_c^2(2L) \tag{21}$$

$\sigma_c^2(2L)$ 是激光直线通过 $2L$ 厚湍层的漂移方差。

从分析光束漂移频率相关函数 $B_r(2L, \lambda_1, \lambda_2)$ 可以看到，在弱湍流扩展区域，当传输准直和聚焦光束时，$B_r(2L, \lambda_1, \lambda_2) \geqslant B_c(2L, \lambda_1, \lambda_2)$ $(\Lambda=I)$ 和 $B_r(2L, \lambda_1, \lambda_2) \leqslant B_c(2L, \lambda_1, \lambda_2)$ $(\Lambda=-I)$ 的反射效应主要来自于单色光经反射器反射后回波束心漂移的放大($\Lambda=I$)和补偿($\Lambda=-I$)效应，即：

$$\frac{B_r(2L, \lambda_1, \lambda_2)}{\sigma_r^2(2L, \lambda)} = \frac{B_c(L, \lambda_1, \lambda_2)}{\sigma_c^2(L, \lambda)} \tag{22}$$

上面讨论表明由平面镜反射的回波光束漂移频率相关函数检测光束漂移的波长依赖性要较直接传输同样距离的漂移频率相关函数更灵敏。因此，在实验上可以利用本文所得的结果设计经平面镜反射的光路去研究光束漂移的波长依赖性。

另外，(21)式表明相位共轭镜能补偿大气湍流导致的光束随机抖动，同时也表明即使在弱湍流起伏区域，这种补偿也是不彻底的，不能完全消除湍流造成的光束传播方向的随机偏折。

参 考 文 献

1 A 石丸。随机介质中波的传播和散射，北京科学出版社，1986: 439
2 Tamir M *et al*. *Appl. Opt.*, 1984; **23**(4): 2359
3 张逸新。激光杂志，1987; **8**(1): 31
4 Mironov V L *et al*. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977; **67**(8): 1073
5 Zuev V E. Laser Beams in the Atmosphere, Plenum Press, New York; 1984: Charpt 4
6 Kon A I *et al*. *Izv. Vuz. SSSR Radio fizika*, 1974; **17**(10): 1501
7 Fante R L *et al*. *Proc. IEEE*, 1975; **63**(12): 1669
8 Kopilevvich Yu. I. *et al*. *Sov. J. Quant. Electr.*, 1984; **14**(2): 217
9 张逸新 *et al*. 光学学报，1986; **6**(12): 1111