中国激光
第15卷 第10期

螺旋泵浦场自由电子激光理论

荀 三 奎
(兰州大学物理系)

提要： 从相对论电子的经典动力学方程出发，导知了一种有效的求解程序，其所得增益曲线与以前结论有显著不同。此外，还发现激光饱和场正比于电子初始能量平方而反比于泵浦场模，这是本文新结果。

Theory of FELs with a helical pump field

Gou Sankui

(Physics Department, Lanzhou University, Lanzhou)

Abstract: An effective procedure to solve the equation is derived by starting from the classical dynamic equation of relativistic electrons. The gain curve obtained here is remarkably different from that of the previous conclusions. Moreover, it was found that the saturated laser field is directly proportional to the square of the initial electron energy and inversely proportional to the wiggler field, which is the new result of this paper.

一、引 言

自由电子激光器(FEL)的性能[1~3]，很多研究者已用经典方法讨论过，但由于基本方程是耦合的非线性方程组，因而人们不得不采用比较粗糙的近似处理方法，故有必要进行更精确的理论探讨，本文的目的便在于此。我们分析了单电子在 FEL 中的经典运动方程，提出一种到任意阶近似都行之有效的处理方法。作为最简单实例，所得的结果在所要求的量级近似中与文献[1~3]等的结果是不同的。也讨论了饱和现象，得到本文的新结果。

二、基本场方程

对于螺旋磁场自由电子激光器，Wiggler 场在 Cartesian 坐标系中表为[2,3]:

$$\boldsymbol{B}_w=B_w[\boldsymbol{e}_x\sin K_w z+\boldsymbol{e}_y\cos K_w z]. \quad (1)$$

式中 B_w=常数，$K_w=2\pi/\lambda_w$，λ_w 为泵浦场的空间周期。激光场选作沿 z 方向传播的圆偏振平面波。假定激光器增益比较小，因而激光场振幅可以近似地看作常数[2~4]:

$$\boldsymbol{B}_r=\frac{E_0}{c}[\boldsymbol{e}_x\cos(K_r z-\omega_r t+\phi_r)+\boldsymbol{e}_y\sin(K_r z-\omega_r t+\phi_r)] \quad (2)$$

收稿日期：1987年4月27日。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_r=E_0[&\boldsymbol{e}_x\sin(K_rz-\omega_rt+\phi_r)\\&-\boldsymbol{e}_y\cos(K_rz-\omega_rt+\phi_r)]\end{aligned}\qquad(2)$$

式中 $E_0\simeq$常数，$K_r=2\pi/\lambda_r$，λ_r 为激光波长，ϕ_r 为初相。再假定相对论电子束团中电子数密度足够小，可忽略各电子间的相互作用。则单电子相对论轨道由 Lorentz 方程决定：

$$\begin{aligned}\frac{d(\gamma\boldsymbol{\beta})}{dt}&=-\frac{e}{mc}(\boldsymbol{E}+c\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B})\\\frac{d\gamma}{dt}&=-\frac{e}{mc}\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}\end{aligned}\qquad(3)$$

式中 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_r$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_r+\boldsymbol{B}_w$，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{v}/c$，$m$ 为电子静质量，e 为质子电荷。由(3)式进一步可得：

$$\begin{aligned}\gamma\boldsymbol{\beta}_\perp=-\frac{e}{mc}\Big\{&\boldsymbol{e}_x\Big[-\frac{B_w}{K_w}\sin K_wz\\&+\frac{E_0}{cK_r}\cos(K_rz-\omega_rt+\phi_r)\Big]\\&+\boldsymbol{e}_y\Big[-\frac{B_w}{K_w}\cos K_wz\\&+\frac{E_0}{cK_r}\sin(K_rz-\omega_rt+\phi_r)\Big]\Big\}\end{aligned}\qquad(4.a)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\beta_z}{dt}=\frac{e^2E_0B_w}{m^2c^2\gamma^2}&\Big[\Big(\frac{1}{K_r}+\frac{1}{K_w}\Big)-\frac{\beta_z}{K_w}\Big]\\&\times\cos[(K_r+K_w)z-\omega_rt+\phi_r]\end{aligned}\qquad(4.b)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dt}=&\frac{e^2E_0B_w}{m^2c^2K_w\gamma}\\&\times\cos[(K_r+K_w)z-\omega_rt+\phi_r]\end{aligned}\qquad(4.c)$$

在(4.a)中忽略了积分常数，这对最后结果并不产生实质性影响。由(4)式得：

$$\gamma=\frac{\gamma_0[(K_r+K_w)-K_r\beta_{z0}]}{[(K_r+K_w)-K_r\beta_z]}\qquad(5)$$

式中 γ_0、β_{z0} 分别是电子的初始相对论因子和初始纵向速度，将(5)代入(4.b)即得：

$$\begin{aligned}\frac{d\beta_z}{dt}=&\frac{E_0B_w}{K_rK_w}\\&\times\Big\{\frac{e}{mc\gamma_0[(K_r+K_w)-K_r\beta_{z0}]}\Big\}^3\\&\times[(K_r+K_w)-K_r\beta_z]^3\\&\times\cos[(K_r+K_w)z-\omega_rt+\phi_r]\end{aligned}\qquad(6)$$

这一严格的非线性方程有别于其他文献中的"摆方程"(那时在推导"摆方程"时曾局部用到 $\beta_z\simeq1$，$\boldsymbol{\beta}_z\times\boldsymbol{B}_w\gg(1-\beta_z)\boldsymbol{E}_r$ 等近似)，它将给出显著不同于"摆方程"的更严格结论。若定义：

$$A=\frac{E_0B_w}{cK_rK_w}\Big\{\frac{e}{mc\gamma_0[(K_r+K_w)-K_r\beta_{z0}]}\Big\}^2$$

$$\alpha_3=\frac{\left\{\begin{array}{c}K_r[(K_r+K_w)\beta_{z0}-K_r]\\-(K_r+K_w)\\\times[(K_r+K_w)-K_r\beta_{z0}]\end{array}\right\}}{2AK_r^2[(K_r+K_w)-K_r\beta_{z0}]^2}-\sin[(K_r+K_w)z_0+\phi_r]$$

$$Z=\alpha_3+\sin[(K_r+K_w)z-\omega_rt+\varphi_r]\qquad(7)$$

则从(6)得：

$$\begin{aligned}&2AK_r^4Z\beta_z^2-2K_r(K_r+K_w)\\&\quad\times[1+2AK_r^2Z]\beta_z+2AK_r^2\\&\quad\times(K_r+K_w)^2Z+[K_r^2\\&\quad+(K_r+K_w)^2]=0\end{aligned}\qquad(8)$$

可将(8)式看作是关于 β_z 的一元二次方程，得：

$$\begin{aligned}\beta_z=\frac{(K_r+K_w)}{2AZK_r^3}\Big\{&(1+2AZK_r^2)\\&\pm\sqrt{1+\frac{2AZK_r^2[(K_r+K_w)^2-K_r^2]}{(K_r+K_w)^2}}\Big\}\end{aligned}\qquad(9)$$

另一方面，由(4.c)和(5)两式可得：

$$\begin{aligned}&[(K_r+K_w)^2-K_r^2](\gamma-\gamma_0)^2\\&\quad-2\gamma_0K_r[K_r-(K_r+K_w)\beta_{z0}]\\&\quad\times(\gamma-\gamma_0)-\frac{2e^2K_rE_0B_w}{m^2c^3K_w}\\&\quad\times\{\sin[(K_r+K_w)z-\omega_rt+\phi_r]\\&\quad-\sin[(K_r+K_w)z_0+\phi_r]\}=0\end{aligned}\qquad(10)$$

这是一个关于$(\gamma-\gamma_0)$的一元二次方程，与(8)式类似，可得：

$$\begin{aligned}\gamma-\gamma_0=&\frac{\gamma_0K_r[K_r-(K_r+K_w)\beta_{z0}]}{[(K_r+K_w)^2-K_r^2]}\\&\times\left\{1\pm\sqrt{\left\{\begin{array}{c}1+\dfrac{2A[(K_r+K_w)^2-K_r^2][(K_r+K_w)-K_r\beta_{z0}]^2}{[K_r-(K_r+K_w)\beta_{z0}]^2}\\\times\{\sin[(K_r+K_w)z-\omega_rt+\phi_r]-\sin[(K_r+K_w)z_0+\phi_r]\}\end{array}\right\}}\right\}\end{aligned}\qquad(11)$$

以下我们是在弱场条件下分别得到(9)和(11)两式关于 A 的二级和三级增益公式。

三、二级增益公式

在弱场 E_r 情形下[2~4]，将有：

$$B\equiv\frac{AK_r^2[(K_r+K_w)^2-K_r^2]}{(K_r+K_w)^2}\ll 1 \quad (12)$$

这允许我们将(9)式中的根号作级数展开到 B 的二阶，且因 $\beta_z<1$，因而(9)式中只能取“—”号：

$$\frac{d\Phi}{dt}=a+b\sin\Phi \quad (13)$$

式中 $\alpha=c(K_r+K_w)\beta_{z0}-cK_r$,

$$\beta=\frac{cAK_r[(K_r+K_w)^2-K_r^2]^2}{4(K_r+K_w)^2},$$

而 $a=\alpha-\beta\sin\Phi_0,\quad b=\beta,$

$$\Phi=(K_r+K_w)z-\omega_r t+\phi_r,$$

$$\Phi_0=(K_r+K_w)z_0+\phi_r,$$

对所讨论类型的 FEL，与文献[5]类似可得：

$$\delta\equiv\left[1+\left(\frac{eB_w}{mcK_w}\right)^2\right]\Big/(2\gamma_0^2)\ll 1 \quad (14)$$

同时： $K_r\simeq\dfrac{K_w}{\delta}\gg K_w,$

$$\beta_{z0}\simeq 1-\delta\simeq 1,$$

因而弱场条件(12)给出 $\dfrac{b}{a}\ll 1$，故得(13)的解为：

$$\operatorname{tg}\left[\frac{\dfrac{\pi}{2}-\Phi}{2}\right]=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\times\operatorname{tg}\left\{-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}t+\operatorname{arc\,tg}\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\left(\frac{\dfrac{\pi}{2}-\Phi_0}{2}\right)\right]\right\} \quad (15)$$

同样地也可将(11)式中根号项展到 B 的相应量级，有：

$$\gamma-\gamma_0=-\frac{A\gamma_0K_r[(K_r+K_w)-K_r\beta_{z0}]^2}{[K_r-(K_r+K_w)\beta_{z0}]}\times\left\{(\sin\Phi-\sin\Phi_0)-\frac{\left\{\begin{array}{l}A[(K_r+K_w)^2-K_r^2]\\ \times[(K_r+K_w)-K_r\beta_{z0}]^2\end{array}\right\}}{2[K_r-(K_r+K_w)\beta_{z0}]^2}\times(\sin\Phi-\sin\Phi_0)^2\right\}。 \quad (16)$$

至此，在所要求的量级近似中已将 $(\gamma-\gamma_0)$ 用 $\sin\Phi$ 表出，问题便归于求 $\sin\Phi$ 如何随时间变化，而这可由(15)式经一较繁的计算后得知在与(13)式相应量级上有：

$$\sin\Phi=\sin(\alpha t+\Phi_0)-\beta t\cdot\sin\Phi_0\times\cos(\alpha t+\Phi_0)+\frac{\beta}{\alpha}\cos\Phi_0\times\cos(\alpha t+\Phi_0)-\frac{\beta}{\alpha}\times\cos^2(\alpha t+\Phi_0)+O_{(A)} \quad (17)$$

然而，我们的结果还需对初位相 Φ_0 取由下式所定义的平均值：

$$\langle\cdots\cdots\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\Phi_0(\cdots) \quad (18)$$

注意到我们可忽略电子间相互作用，因而能量交换只能发生在相对论电子和激光场之间，由能量守恒，电子损失的能量全部转化为辐射场能，故此得增益为：

$$G_{(t)}=\frac{-\langle\gamma-\gamma_0\rangle mc^2\rho_e V}{\epsilon_0 VE_0^2} \quad (19)$$

$$=\frac{-e^4B_w^2[(K_r+K_w)^2-K_r^2]\rho_e}{\left\{\begin{array}{l}2\epsilon_0m^3c^4\gamma_0^3K_w^2K_r\\ \times[K_r-(K_r+K_w)\beta_{z0}]^3\end{array}\right\}}\times\left\{[1-\cos(\alpha t)]-\frac{\left\{\begin{array}{l}K_r[(K_r+K_w)^2-K_r^2]\\ \times[(K_r+K_w)\beta_{z0}-K_r]\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}4(K_r+K_w)^2\\ \times[(K_r+K_w)-K_r\beta_{z0}]^2\end{array}\right\}}\times[\alpha t\sin(\alpha t)+\cos(\alpha t)-1]\right\}$$

(19)中[…]之内后两项为文献[1~3]等所没有。后面要讨论到，(19)将对以前文献中由“摆方程”给出的结果产生显著的修正。

四、三级增益公式

为求得三级增益，可将(9)式根号项展到 B 的三阶：

$$\frac{d\Phi}{dt}=f+g\sin\Phi+h\sin^2\Phi \tag{20}$$

其中：$f=\alpha-(\beta+2\alpha_3 h)\sin\Phi_0-h\sin^2\Phi_0$

$$g=\beta+2\alpha_3 h,$$

$$h=-\frac{cA^2K_r^3[(K_r+K_w)^2-K_r^2]^3}{4(K_r+K_w)^4}$$

其余记号与前面相同。在弱场条件(12)和(14)下：$|h|\ll\beta\ll\alpha$，或$|h|\ll g\ll f$且$g^2-4fh>0$。以下的等式都是在与(20)相对应的量级上成立的，这样可得(20)的解为：

$$\Phi+\frac{g}{f}\cos\Phi-\frac{(g^2-fh)}{4f^2}\sin 2\Phi$$
$$=\Phi_0+\left[1-\frac{(g^2-fh)}{2f^2}\right]ft$$
$$+\frac{g}{f}\cos\Phi_0-\frac{(g^2-fh)}{4f^2}\sin 2\Phi_0 \tag{21}$$

这一方程一般认为是比较难于求解的，但若取其两边的 sin 和 cos 函数作展开再分别乘以$\sin\Phi$与$\cos\Phi$后相加并记(21)右边为λ_0便得：

$$1-\sin\lambda_0\sin\Phi-\frac{g^2}{2f^2}\cos^2\Phi=\cos\lambda_0\cos\Phi \tag{22}$$

如果令：

$$\sin\Phi=\sin\lambda_0+u_{(A,\Phi_0,t)}+v_{(A^2,\Phi_0,t)}$$
$$\cos\Phi=\cos\lambda_0-[u_{(A,\Phi_0,t)}+v_{(A^2,\Phi_0,t)}]$$
$$\times\operatorname{tg}\lambda_0-\frac{u^2_{(A,\Phi_0,t)}}{2\cos^3\lambda_0} \tag{23}$$
$$\Phi=\lambda_0+\frac{u_{(A,\Phi_0,t)}+v_{(A^2,\Phi_0,t)}}{\cos\lambda_0}$$
$$+\frac{u^2_{(A,\Phi_0,t)}\operatorname{tg}\lambda_0}{2\cos^2\lambda_0}$$

其中：$u_{(A,\Phi_0,t)}$是A的量级，$v_{(A^2,\Phi_0,t)}$是A^2的量级，将(23)分别代入(21)和(22)后便有：

$$u_{(A,\Phi_0,t)}=-\frac{p\beta}{\alpha}\cos^2(\Phi_0+\alpha t)$$
$$v_{(A^2,\Phi_0,t)}=-\left[\frac{h}{2\alpha}+\frac{p^2\beta^2}{\alpha^2}\right] \tag{24}$$
$$\times\sin(\Phi_0+\alpha t)\cos^2(\Phi_0+\alpha t)$$

式中：

$$p=1-\frac{\left\{\begin{array}{c}[(K_r+K_w)^2-K_r^2]\\ \times\{K_r[(K_r+K_w)\beta_{z0}-K_r]\\ -(K_r+K_w)[(K_r+K_w)-K_r\beta_{z0}]\end{array}\right\}}{(K_r+K_w)^2[(K_r+K_w)-K_r\beta_{z0}]^2}$$

将所求得的u和v代入$\sin\Phi$的表式即得：

$$\sin\Phi=\sin(\Phi_0+\alpha t)-p\beta t\sin\Phi_0$$
$$\times\cos(\Phi_0+\alpha t)+\frac{p\beta}{\alpha}\cos\Phi_0$$
$$\times\cos(\Phi_0+\alpha t)-\frac{p\beta}{\alpha}\cos^2(\Phi_0+\alpha t)$$
$$+ht\sin^2\Phi_0\cdot\cos(\Phi_0+\alpha t)$$
$$+\frac{ht}{2}\cos(\Phi_0+\alpha t)+\frac{h}{4}\sin 2\Phi_0$$
$$\times\cos(\Phi_0+\alpha t)-\frac{h}{\alpha}\sin 2\Phi_0$$
$$\times\cos(\Phi_0+\alpha t)-\frac{h}{2\alpha}\sin(\Phi_0+\alpha t)$$
$$\times\cos^2(\Phi_0+\alpha t)-\frac{p^2\beta^2t^2}{2}\sin(\Phi_0+\alpha t)$$
$$\times\sin^2\Phi_0-\frac{p^2\beta^2t}{2\alpha}\cos(\Phi_0+\alpha t)$$
$$+\frac{p^2\beta^2t}{2\alpha}\sin 2\Phi_0\cdot\cos(\Phi_0+\alpha t)$$
$$-\frac{p^2\beta^2}{4\alpha}\sin 2\Phi_0\cdot\cos(\Phi_0+\alpha t)$$
$$+\frac{p^2\beta^2}{2\alpha^2}\sin 2\Phi_0\cdot\cos(\Phi_0+\alpha t)$$
$$-\frac{p^2\beta^2}{2\alpha^2}\sin(\Phi_0+\alpha t)\cdot\cos^2\Phi_0$$
$$-\frac{p^2\beta^2}{\alpha^2}\sin(\Phi_0+\alpha t)\cdot\cos^2(\Phi_0+\alpha t) \tag{25}$$

与此相应将(11)式中根号项也多展一阶，便可得到三级增益为：

$$G_{(t)}=-\frac{e^4B_w^2[(K_r+K_w)^2-K_r^2]\rho_e}{\left\{\begin{array}{c}2\epsilon_0 m^3c^4\gamma_0^3K_w^2K_r\\ \times[K_r-(K_r+K_w)\beta_{z0}]^3\end{array}\right\}}$$
$$\times\left\{[1-\cos(\alpha t)]\right.$$
$$-\frac{\left\{\begin{array}{c}pK_r[(K_r+K_w)^2-K_r^2]\\ \times[(K_r+K_w)\beta_{z0}-K_r]\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}4(K_r+K_w)^2\\ \times[(K_r+K_w)-K_r\beta_{z0}]^2\end{array}\right\}}$$
$$\left.\times[\alpha t\sin(\alpha t)+\cos(\alpha t)-1]\right\} \tag{26}$$

此式与(19)不同之处仅在于出现了p因子。

在$K_r\gg K_w$，$\beta_{z0}\simeq1$时，注意到

$$[(K_r+K_w)^2-K_r^2]\simeq 2K_rK_w,$$

$$(K_r+K_w)\simeq K_r,$$
$$c[(K_r+K_w)-K_r\beta_{z0}]\simeq[2cK_w-\alpha],$$

则(19)、(26)两式均可给出如下形式的激光器终端增益:

$$G_{(T)}\cong -G_0 f_{(\theta)} \tag{27}$$

式中 $G_0=\dfrac{e^3B_v^2L^3\lambda_w J}{2\pi\epsilon_0 m^3\gamma_0^3c^5}$。

J 为电子束流密度, L 为泵浦场长度, T 为电子通过泵浦场所用时间, $\theta=\alpha T$。对(19)式:

$$f^{(1)}_{(\theta)}=\frac{1}{\theta^3}\left\{[1-\cos\theta]-\frac{\pi N\theta}{[\theta-4\pi N]^2}[\theta\sin\theta+\cos\theta-1]\right\} \tag{28}$$

对(26)式:

$$f^{(2)}_{(\theta)}=\frac{1}{\theta^3}\left\{[1-\cos\theta]-\frac{\pi N\theta[2(\theta-4\pi N)^2-\theta^2]}{[\theta-4\pi N]^4}\times[\theta\sin\theta+\cos\theta-1]\right\} \tag{29}$$

式中 $N=L/\lambda_w$ 为 Wiggler 周期的数目, 实质上, (19)、(26)成立有两条件: i)小增益 Compton 型, 电子束密度很小, 大体要求 $G_0\lesssim 1$, $E_{0(t)}\simeq$常数, ii)弱场情形, 要求 $|\beta/\alpha|\ll 1$, 或 $|\theta|\gg\dfrac{e^2E_0B_wL^2}{8\pi Nm^2\gamma_0^2c^3}$。在实际工作的器件中, Wiggler 场参数和电子束参数均确定, 因而 G_0 确定, 增益大小完全由 $f_{(B)}$ 确定, 对 $N=50$ 的情形发现精确到 10^{-3} 后 $f^{(1)}_{(\theta)}$、$f^{(2)}_{(\theta)}$ 几乎相同, 为能得到最佳增益, 必须尽量使激光波长从负方向满足谐振条件 $\alpha=0^-$, 此外有一极点出现在

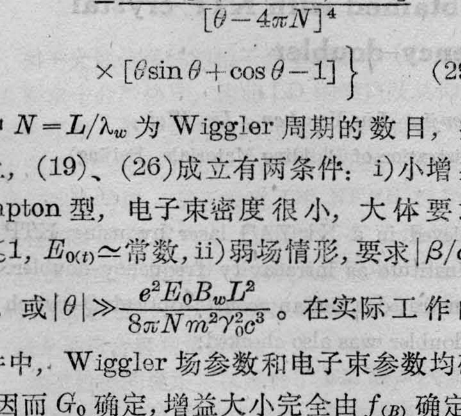

图1 对 $N=50$ 的 $f_{(\theta)}$ 图

$$f^{(1)}_{(-8.74)}=-0.268\times10^{-2},$$
$$f^{(2)}_{(-8.71)}=-0.27\times10^{-2},$$

其余极点更小, 而"摆方程"结论是

$$f_{(\theta)}=\frac{1}{\theta^3}\left[1-\cos\theta-\frac{1}{2}\theta\sin\theta\right]$$

在 $\theta=-2.6$ 处有唯一极点值 0.54。两者有显著差别。

五、饱和现象

在得到(19)、(26)曾用小增益及弱场条件, 实质上可以认为 $E_0(t)$ 随时间变化, 甚至还可以是大信号情形, 但只要满足:

$$\left|\frac{dE_0(t)}{dt}\right|\ll|\alpha E_0(t)|,$$

则(8)、(10)两式仍成立, 此时有物理意义的解要求(8)、(10)两一元二次方程的判别式:

$$\triangle^{(1)}=4\gamma_0^2K_r^2[(K_r+K_w)\beta_{z0}-K_r]^2+\frac{\left\{\begin{array}{c}8e^2E_0(t)B_wK_r\\ \times[(K_r+K_w)^2-K_r^2]\end{array}\right\}}{m^2c^3K_w}\times(\sin\Phi-\sin\Phi_0)$$

$$\triangle^{(2)}=\frac{K_r^2\triangle^{(1)}}{\gamma_0^2[(K_r+K_w)-K_r\beta_{z0}]^2} \tag{30}$$

$(\sin\Phi-\sin\Phi_0)$的所有可能取值不<0, 即:

$$E_0(t)\leqslant E_0^{\max}=\frac{\left\{\begin{array}{c}m^2c^3\gamma_0^2K_rK_w\\ \times[K_r-(K_r+K_w)\beta_{z0}]^2\end{array}\right\}}{4e^2B_w[(K_r+K_w)^2-K_r^2]}$$

上式表明激光场存在上限, 当 $E_0(t)>E_0^{\max}$ 时 β_z 和$(\gamma-\gamma_0)$的实数性将被破坏, 电子运动状态较复杂, 可以认为其进一步效果最多是保持住 $E_0^{\max}$。而不能超越它, 这即意味着饱和现象发生。激光饱和场正比于电子初始能量平方而反比于泵浦场模。

参考文献

1 Colson W B. *Phys. Lett.*, 1977; **A64**: 190

2 陈建文 *et al.* 中国激光, 1986; **13**: 385

3 张大可 *et al.* 中国科学 1986; **A7**: 749

4 秦克琪 *et al.* 中国激光, 1987; **14**: 129

5 Henke H. *Frequenz.*, 1985; **39**: 14