

双透镜像散光学系统摄制彩虹和像面 全息图的像匹配理论

厉志明 刘淑辉

(浙江大学物理系)

摘要: 从理论上推导了双透镜像散光学系统全息像匹配的普遍公式, 并讨论了

在全息白光显示术中一步彩虹、像散一步彩虹和像面全息中的应用。

Image matching theory of two lens astigmatic system for fabricating rainbow and image-plane holograms

Li Zhiming, Liu Shuhui

(Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract: A general matching formula for holographic images of two lens astigmatic system is derived theoretically, and its applications to some repects of holographic display with white light, one-step rainbow, astigmatic rainbow and image plane holography are discussed.

一般情况下用像散光学系统作为成像系统是无可取的, 但在全息的白光显示中, 如一步彩虹^[1]、像散彩虹^[2,3]、像面全息^[4,5]等, 像散光学系统应有其特殊地位。

我们曾建议在全息的白光显示术中采用双透镜像散光学系统来摄制全息图^[6,7], 并在实验上取得了满意的结果。像散光学系统成像的关键问题是如何选取光路参量, 使二个像散像的放大率匹配, 否则三维物体的再现像会产生严重畸变。本文从理论上推导了双透镜像散光学系统全息像匹配的普遍公式, 并讨论了在全息白光显示术中的应用。(页 20 未完)

一、理 论

双薄透镜成像系统的全息记录光路如图 1 所示, 此处只画出 $y-z$ 面内的成像关系, $x-z$ 面内的情况可类推。 T_1, T_2 为二薄透镜, 它们沿 y 方向的曲面所对应的焦距分别为 f_{1y}, f_{2y} ; 沿 x 方向的曲面所对应的焦距分别为 f_{1x}, f_{2x} 。物点 $O(x_0, y_0)$ 经透镜 T_1 在 $y-z$ 面内成像 I'_y ; 而后经 T_2 成像 I_y 。 HI_y 为 I_y 的再现像; SP 为光缝; SI 为光缝经 T_2 后的像; HSI 为其再现像。当光路用于彩虹全息时,

收稿日期: 1986 年 9 月 24 日。

SP 为一实际狭缝, 缝像位置就是观察者看再现像时双目所处位置; 当用于其他全息术时, 没有狭缝, 但图中的缝像位置仍表示观看再现像双目所处位置。 R 和 C 分别为参考点光源和再现点光源。

先计算透镜系统在 $y-z$ 平面内像点 I_y 的距离 d_y 和横向放大率 M_y 。由成像的几何关系:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_{1y}} \quad \text{和} \quad -\frac{y'}{y_0} = \frac{b}{r};$$

$$\frac{1}{D-b} + \frac{1}{d_y} = \frac{1}{f_{2y}} \quad \text{和} \quad -\frac{y}{y'} = \frac{d_y}{D-b},$$

解得

$$d_y = [D(r - f_{1y}) - rf_{1y}]f_{2y} / [(D - f_{2y})(r - f_{1y}) - rf_{1y}], \quad (1)$$

$$M_y = \frac{\partial y}{\partial y_0} = [(d_y - f_{2y})(D - f_{1y}) - d_y f_{2y}] / (f_{1y} f_{2y}). \quad (2)$$

同理得 $x-z$ 面内的像点距离和横向放大率

$$d_x = [D(r - f_{1x}) - rf_{1x}]f_{2x} / [(D - f_{2x})(r - f_{1x}) - rf_{1x}], \quad (3)$$

$$M_x = \frac{\partial x}{\partial x_0} = [(d_x - f_{2x})(D - f_{1x}) - d_x f_{2x}] / (f_{1x} f_{2x}). \quad (4)$$

为方便起见, 以后简称 $y-z$ 面内的像为 y 维像, $x-z$ 面内的像为 x 维像。

由全息学基本原理知道, y 维像和 x 维像的全息放大率为

$$H_y = [1 + (\lambda_1/\lambda_2)(l_y/L_2) - (l_y/L_1)]^{-1}, \quad (5)$$

和

$$H_x = [1 + (\lambda_1/\lambda_2)(l_x/L_2) - (l_x/L_1)]^{-1}. \quad (6)$$

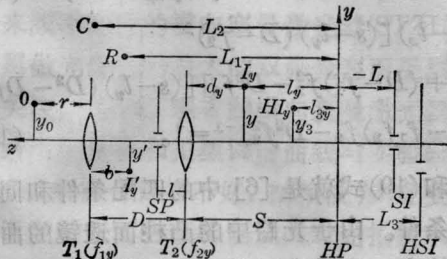


图1 双薄透镜成像系统全息记录光路

y 维、 x 维和狭缝的再现像位置各有

$$l_{3y} = L_2 L_1 l_y / [l_y L_1 + (\lambda_2/\lambda_1) L_2 (L_1 - l_y)], \quad (7)$$

$$l_{3x} = L_2 L_1 l_x / [l_x L_1 + (\lambda_2/\lambda_1) L_2 (L_1 - l_x)], \quad (8)$$

$$L_3 = L_2 L_1 L / [L L_1 + (\lambda_2/\lambda_1) L_2 (L_1 - L)]. \quad (9)$$

式中 λ_1 为物光和参考光波长, λ_2 为再现光波长。

为了能得到无畸变的再现像, y 维和 x 维再现像的放大率必需满足匹配条件:

$$(\partial y_3 / \partial y_0) / (l_{3y} - L_3) = \pm (\partial x_3 / \partial x_0) / (l_{3x} - L_3). \quad (10)$$

“+”、“-”号由透镜系统的放大率 M 的正负决定。注意到

$$(\partial y_3 / \partial y_0) = (\partial y_3 / \partial y) (\partial y / \partial y_0) = H_y \cdot M_y$$

$$\text{和} \quad (\partial x_3 / \partial x_0) = H_x \cdot M_x,$$

当光路排列使 y 和 y_0 同向及 x 和 x_0 同向时, M_y 和 M_x 皆为正, (10) 式取“+”号; 使二者都反向时, M_y 和 M_x 皆为负, (10) 式也取“+”号; 使二者有一对同向, 而另一对为反向, 则取“-”号。将(2)式和(4)~(9)式代入(10)式, 并利用关系 $d_y = s - l_y$ 和 $d_x = s - l_x$, 得匹配条件为

$$\pm \frac{\left\{ \begin{array}{l} (l_x - L) [(s - l_y - f_{2y})(D - f_{1y})] \\ - (s - l_y) f_{2y} f_{1x} f_{2x} \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} (l_y - L) [(s - l_x - f_{2x})(D - f_{1x})] \\ - (s - l_x) f_{2x} f_{1y} f_{2y} \end{array} \right\}} = 1. \quad (11)$$

除此之外, l_y 和 l_x 还应满足同一点源的成像条件, 即 I_y 和 I_x 是由同一点源 O 经像散光学系统后形成的一对像散像。这个条件可由(1)、(3)式消去 r 得到:

$$\frac{(s - l_x)(D - f_{2x})f_{1x} - Df_{1x}f_{2x}}{(s - l_x)(D - f_{1x} - f_{2x}) - (D - f_{1x})f_{2x}} = \frac{(s - l_y)(D - f_{2y})f_{1y} - Df_{1y}f_{2y}}{(s - l_y)(D - f_{1y} - f_{2y}) - (D - f_{1y})f_{2y}}. \quad (12)$$

(11) 和 (12) 式就是双透镜像散光学系统全息像匹配的普遍公式。令人感到有趣的是匹配

条件不仅与物光和再现光的波长无关,而且与参考点光源和再现点光源的位置也无关。这就给我们在安排光路和再现时带来较大的宽容条件。

二、应用

2.1 像散一步彩虹全息

2.1.1 单个凸柱面透镜成像系统: 焦距为 F 的单只凸柱面透镜的具体匹配公式可令 $f_{1x} = \infty, f_{1y} = 2F; f_{2x} = \infty, f_{2y} = 2F; D = 0$ 代入(11)和(12)而得。注意到物点经凸柱面透镜后形成的 x 维像就在原物点的 x_0 位置, 而 y 维像在透镜后方, 所以 x 和 x_0 同向而 y 和 y_0 反向, (11)式中应取“-”号。经简单的代换后得

$$(1 - l_x/L)(s - l_y - F)(1 - l_y/L)^{-1}F^{-1} = 1, \quad (13)$$

$$-(s - l_x)(F + l_y - s)(s - l_y)^{-1}F^{-1} = 1. \quad (14)$$

若被摄物为一平面物体, 全息干板放在 y 维像的位置上, 即 $l_y = 0$ 。设透镜焦距 $F = 10$ cm, 取 $|L|$ 为明视距离或 $L = -40$ cm, 由(13)和(14)式计得 x 维像或物的位置 $l_x = 46$ cm 和 y 维像或干板到透镜的距离 $s = 14.7$ cm。这组光路参量值使 x 维像和 y 维像得到完全匹配, 像深度为 46 cm。

因为物总有一定景深, 所以 x 维像和 y 维像也有一定景深, 在摄制全息图时将干板置于 y 维像的中心平面上, 这样, 在 y 维像中心平面上的像点都满足 $l_y = 0$, 被摄物上距干板 46 cm 处的那些物点能获得完全匹配。但是, 其他的物点则是失配的。当这些点的失配程度不大时, 仍可获得视感无畸变的再现现象。下面介绍一种计算失配程度的方法。我们定义匹配式(11)等号左边的值对 1 的偏差为失配度 δ , 此处

$$\delta = (1 - l_x/L)(s - l_y - F) \times (1 - l_y/L)^{-1}F^{-1} - 1. \quad (15)$$

假定观察者容许的失配度为 $\pm 5\%$, 由方程(14)和(15)解得 $l_x = 45.1$ cm 和 47.6 cm, 被摄物的景深只有 2.5 cm。否则再现像就有明显畸变。

2.1.2 两只凸柱面透镜成像系统: 为了获得深像、深景的像散彩虹全息图, 可采用两只凸柱面透镜组成的成像系统或 L-S-L 系统。令 $f_{1x} = \infty, f_{1y} = f_1; f_{2x} = \infty, f_{2y} = f_2; D = -f_1 + f_2$, 代入(11)式(取“-”)和(12)式得

$$(1 - l_x/L)f_2(1 - l_y/L)^{-1}f_1^{-1} = 1, \quad (16)$$

$$[(s - l_y)f_1^2 - (s - l_x)f_2^2](f_1 + f_2)^{-2}f_2^{-1} = 1. \quad (17)$$

根据我们的实验条件: $f_1 = 15.6$ cm, $f_2 = 7.3$ cm, 并取 $L = -40$ cm。类似于 2.1.1 的计算, 失配度仍取 $\pm 5\%$, 得 $l_x \approx 36$ cm 和 55 cm。被摄物的景深达 20 cm 左右仍可获得视感无畸变的再现像。

2.2 一步彩虹全息

用一只凸球面透镜将物成像在全息干板附近来摄制一步彩虹全息图, 因其再现像也在全息图附近, 体视性很差。我们曾建议在典型的一步彩虹正像光路中插入一曲率半径较大的凹柱面透镜构成像散光学系统^[6], 以改善一步彩虹全息的体视特性。设 T_1 为凹柱面透镜, T_2 为凸球面透镜, 即 $f_{1x} = \infty, f_{1y} = f_1$ (负值); $f_{2x} = f_{2y} = f_2$ 。代入(11)和(12)式, 并注意到此时 y 和 y_0, x 和 x_0 二者都反向, 得

$$-(l_x - L)[(s - l_y - f_2)(D - f_1) - (s - l_y)f_2] \times [(l_y - L)(s - l_x - f_2)f_1]^{-1} = 1, \quad (18)$$

$$(s - l_x)[(s - l_y)(D - f_2)^2 + (D - f_1)f_2^2 - D^2f_2] [(s - l_y)(D^2 - Df_2 - f_1f_2)f_2 - D^2f_2^2]^{-1} = 1. \quad (19)$$

(18)和(19)式就是[6]中的匹配条件和同一点源条件。由于光路中的凸柱面透镜的曲率半径较大, 这种光路的像散性远比像散彩虹光路的为小。合适的像散量能使再现现象具有

一定的像深和景深,能基本上保持一步彩虹全息图的清晰度。例如取 $f_1 = -22\text{ cm}$, $f_2 = 9\text{ cm}$, $D = 11\text{ cm}$ 和 $L = -30\text{ cm}$, 由 (18)、(19) 式计得,若使再现像在全息图后方景深为 4.6 cm 时,失配度 $-0.2\% < \delta < 0.7\%$ 。

2.3 像面全息

在摄制三维物体的像面全息图时,通常将物的像跨立在全息底片上。这样,在再现时位于全息图前方的那部分像,会引起观看者的视觉混乱,即所谓像平面运动视差效应。利用双透镜像散光学系统来摄制像面全息图,可使再现像全部落在全息图后面,免除了这一效应。

2.3.1 采用与一步彩虹相类似的系统^[7]:令 $f_{1x} = \infty$, $f_{1y} = f_1$; $f_{2x} = f_{2y} = f_2$; 因为是像面全息图,被摄物的景深很浅,即 $l_y \approx 0$ 。代入 (11) 式(取“+”)和 (12) 式中,并注意到 $d_x = s - l_x$, $d_y = s - l_y$, 得

$$(-L + d_y - d_x) [(d_y - f_2)(D - f_1) - d_y f_2] \times [L(d_x - f_2)f_1]^{-1} = 1, \quad (20)$$

和

$$d_x [d_y(D - f_2)^2 + (D - f_1)f_2^2 - D^2 f_2] \times [d_y(D^2 - Df_2 - f_1 f_2)f_2 - D^2 f_2^2]^{-1} = 1. \quad (21)$$

(20) 和 (21) 式就是 [7] 中的匹配条件和同一点源条件。我们取 $f_1 = -27\text{ cm}$, $f_2 = 9\text{ cm}$, $D \approx 12\text{ cm}$ 和 $L = -30\text{ cm}$, 由 (20) 和 (21) 式计得,若使再现像在全息图后方约 2 cm 处,失配度 $\delta = 1.5\%$ 。

2.3.2 采用正交柱面透镜系统^[8]:令 $f_{1x} = f_1$, $f_{1y} = \infty$; $f_{2x} = \infty$, $f_{2y} = f_2$; $l_y \approx 0$, 代入 (11) 式(取“+”)和 (12) 式得到

$$(l_x - L)(s - f_2)f_1 [(D + s - l_x - f_1) \times (-L)f_2]^{-1} = 1, \quad (22)$$

和

$$(D + s - l_x)(s - f_2)f_1 [(D + s - l_x - f_1) \times (sf_2 + Df_2 - sD)]^{-1} = 1. \quad (23)$$

比较本文和文献 [8] 中的光路图知道, $s = s_2'$, $l_x = \overline{ST}$, $D = s_1' + \overline{ST} - s_2'$, $-L = d$, 并利用成像关系 $1/s_1' + 1/s_1' = 1/f_1$ 和 $1/s_2 + 1/s_2' = 1/f_2$, 代入 (22) 和 (23) 式, 得匹配条件和同一点源成像条件为

$$s_1' s_2 d [s_1 s_2' (d + \overline{ST})]^{-1} = 1, \quad (24)$$

和

$$s_1 + s_1' + \overline{ST} = s_2' + s_2. \quad (25)$$

得到了完全一致的结果。根据作者选用的光路参量值,若取 $d = 30\text{ cm}$, 由 (24) 式计得失配度 $\delta = 5.7\%$ 。

三、讨 论

采用这一成像系统可以摄制出深景的像散彩虹全息图、有良好体视特性的一步彩虹全息图和无像平面运动视差的像面全息图。由于这种系统用二只透镜成像,视场较狭。另外,像散虽能加大再现像的像深和景深,但像散较大时再现像的清晰度会下降。需要处理好像深、景深和清晰度之间的关系。

参 考 文 献

1. Chen H, Yu F T S. *Opt. Lett.*, 1978; 2(4): 85
2. Chen H. *Appl. Opt.*, 1979; 18(22): 3728
3. Chen H. *et al. Appl. Opt.*, 1981; 20(20): 3557
4. Roson L. *Appl. Phys. Lett.*, 1969; 9(9): 337
5. Bazargan K, Forshaw M R B. *Opt. Commun.*, 1980; 31(1): 45
6. 厉志明, 刘淑辉. *光学学报*, 1986; 6(5): 440
7. 刘淑辉, 厉志明. *中国激光*, 1986; 13(7): 424
8. 朱建平, 杨旭光. *中国激光*, 1986; 13(1): 23