

自由电子激光器中的电子运动

方洪烈 傅淑芬

(中国科学院上海光机所)

提要: 用相对论量子力学对自由电子激光器中的电子运动作了分析, 求得了螺旋泵浦磁场中 Klein-Gordon 方程的严格解析解。结果表明自由电子激光的增益饱和和来源于出现退聚束效应及高阶聚束。

Electron movement in FELs

Fang Honglie, Fu Shufeng

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai)

Abstract: Movement of electrons in FELs is analysed with the theory of relativistic quantum mechanics, and rigorous analytic solution on Klein-Gordon equation has been obtained under the condition of helical magnetic field for pumping. The results show that gain saturation of free electron laser light comes from the effects of high order bunch and dibunch effect.

引言

在自由电子激光器中, 一般视 Wiggler 场为泵浦波。关于相对论电子束在 Wiggler 场中的运动形成辐射或对辐射的放大的研究已经很多^[1~3], 但大多处理都是经典的, 然而用相对论量子力学描述将有希望揭示更深刻的物理实质。

一、螺旋泵浦磁场中的 Klein-Gordon 方程

对 Compton 型自由电子激光器来说, 电

子的运动可用单粒子 Klein-Gordon 方程来描述^[4]。对于实际的自由电子激光器, 泵浦磁场比辐射场强得多。辐射场对电子运动的影响甚小, 可做微扰处理。略去辐射场的单电子, Klein-Gordon 方程为

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi^{(0)}(\mathbf{r}, t) = [(-i\hbar c \nabla + e\mathbf{A}_0)^2 + m_0^2 c^4] \Psi^{(0)}(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

其中 \mathbf{A} 是螺旋泵浦磁场的矢势^[4]

$$\mathbf{A}_0(z) = A_0 [e_x \cos(k_w z) + e_y \sin(k_w z)], \quad (2)$$

与时间 t 无关。因此满足方程 (1) 的波函数 Ψ 可分离变量。设

收稿日期: 1986 年 7 月 11 日。

七六七九

$$\Psi^{(0)}(\mathbf{r}, t) = T(t)\Psi^{(0)}(\mathbf{r}), \quad (3)$$

则

$$T(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right), \quad (4)$$

式中 E 为分离变量常数, 即电子的总能量。 $\Psi^{(0)}$ 满足如下定态方程

$$\begin{aligned} [(-i\hbar c\nabla + e\mathbf{A}_0)^2 + m_0^2c^4]\Psi(\mathbf{r}) \\ = E^2\Psi^{(0)}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (5)$$

用 \hat{H} 来表示 $[(-i\hbar c\nabla + e\mathbf{A}_0)^2 + m_0^2c^4]$ 并将 \mathbf{A}_0 的具体表示式(2)代入(5)式得

$$\begin{aligned} \hat{H} = -\hbar^2c^2\nabla^2 + M^2c^4 \\ - i2e\hbar c A_0 \left[\cos(k_w z) \frac{\partial}{\partial x} \right. \\ \left. + \sin(k_w z) \frac{\partial}{\partial y} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$M^2 = m_0^2 + \frac{e^2 A_0^2}{c^4}, \quad (7)$$

$e^2 A_0^2/c^4$ 与电子在磁场中的质量移动有关^[5]。

由表示式(6)可知, 动量算符 \mathbf{p} 的 x 、 y 分量 \hat{p}_x 、 \hat{p}_y 均与 \hat{H} 对易:

$$[\hat{p}_x, \hat{H}] = [\hat{p}_y, \hat{H}] = 0 \quad (8)$$

这表明算符 \hat{H} 、 \hat{p}_x 和 \hat{p}_y 具有共同的完整本征函数系, 因此 $\Psi(\mathbf{r})$ 可表示为如下形式

$$\Psi^{(0)}(\mathbf{r}) = f(z) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_y y)\right]. \quad (9)$$

而 $f(z)$ 满足方程

$$\begin{aligned} f''(z) + \left[\frac{E^2 - c^2(p_x^2 + p_y^2) - M^2c^4}{\hbar^2c^2} \right. \\ \left. - 2\frac{eA_0c}{\hbar^2c^2} [p_x \cos(k_w z) \right. \\ \left. + p_y \sin(k_w z)] \right] f(z) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

其中 p_x 、 p_y 为常数, 是动量在 x 、 y 方向上的分量。我们引入如下表式

$$p_x = p_1 \cos\theta, \quad p_y = p_1 \sin\theta \quad (11)$$

并作变换

$$2\xi = k_w z - \theta. \quad (12)$$

那么方程(10)变为

$$f''(\xi) + [a - 2q \cos 2\xi] f(\xi) = 0 \quad (13)$$

其中

$$a = 4[E^2 - c^2(p_x^2 + p_y^2) - M^2c^4] / (\hbar^2 k_w^2 c^2), \quad (14)$$

$$q = 4eA_0cp_1 / (\hbar^2 k_w^2 c^2). \quad (15)$$

方程(13)即所谓的 Mathieu 方程。它的解是已知的 Mathieu 函数^[6]。

一般说来满足方程(13)的 a 是 q 的函数。因此 $a(q)$ 称为方程(13)的本征值。对于 $q=0$ 时

$$a = m^2. \quad (16)$$

对于全周期解有两类不同的本征值 $a_{2n}(q)$ 和 $b_{2n+2}(q)$ 。对于半周期解来说亦有两类不同的本征值 $a_{2n+1}(q)$ 和 $b_{2n+1}(q)$ 。而且

$$a_{2n+1}(q) = b_{2n+1}(-q). \quad (17)$$

这些本征值具体写出如下:

$$a_0 = -\frac{1}{2}q^2 + \frac{7}{128}q^4 - \frac{29}{2304}q^6$$

$$+ \frac{68687}{18874368}q^8 + O(q^{10}),$$

$$b_1 = 1 - q - \frac{1}{8}q^2 + \frac{1}{64}q^3 - \frac{1}{1536}q^4$$

$$- \frac{11}{36864}q^5 + \frac{49}{589824}q^6$$

$$- \frac{55}{9437184}q^7 - \frac{83}{35389440}q^8$$

$$+ O(q^9),$$

$$a_1(q) = b_1(-q),$$

$$b_2 = 4 - \frac{1}{12}q^2 + \frac{5}{13824}q^4$$

$$- \frac{289}{79626240}q^6 + \frac{21391}{458647142400}q^8$$

$$+ O(q^{10}),$$

$$a_2 = 4 + \frac{5}{12}q^2 - \frac{763}{13824}q^4$$

$$+ \frac{1002401}{79626240}q^6 - \frac{1669068401}{458647142400}q^8$$

$$+ O(q^{10}),$$

$$b_3 = 9 + \frac{1}{16}q^2 - \frac{1}{64}q^3 + \frac{13}{20480}q^4$$

$$- \frac{1961}{23592960}q^6 + \frac{609}{104857600}q^7$$

$$+ O(q^8),$$

$$a_3(q) = b_3(-q),$$

$$b_4 = 16 + \frac{1}{30}q^2 - \frac{317}{864000}q^4$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{10049}{272160000} q^6 + O(q^8), \\
a_4 = & 16 - \frac{1}{30} q^2 + \frac{433}{864000} q^4 \\
& - \frac{37}{272160000} q^6 + O(q^8), \\
b_5 = & 25 + \frac{1}{48} q^2 + \frac{11}{774144} q^4 \\
& - \frac{1}{147456} q^6 + \frac{37}{891813888} q^8 \\
& + O(q^7), \\
a_5(q) = & b_5(-q), \\
b_6 = & 36 + \frac{1}{70} q^2 + \frac{187}{43904000} q^4 \\
& - \frac{5861633}{92935987200000} q^6 + O(q^8), \\
a_6 = & 36 + \frac{1}{70} q^2 + \frac{187}{43904000} q^4 \\
& + \frac{6743617}{92935987200000} q^6 + O(q^8),
\end{aligned} \tag{18}$$

当 $m \geq 7$ 时

$$\begin{aligned}
a_m, b_m = & m^2 + \frac{1}{2(m^2-1)} q^2 \\
& + \frac{5m^2+7}{32(m^2-1)^2(m^2-4)} q^4 \\
& + \frac{9m^4+58m^2+29}{64(m^2-1)^3(m^2-4)(m^2-9)} q^6 \\
& + O(q^7).
\end{aligned} \tag{19}$$

注意, (19) 并不意味着 $a_m = b_m$, 而是它们的差别为 $O(q^7)$ 。

方程(13)与本征值 a_{2n}, b_{2n+2} 相对应的全周期本征函数分别为 $ce_{2n}(\xi)$ 和 $se_{2n+2}(\xi)$; 与本征值 a_{2n+1}, b_{2n+1} 相应的半周期本征函数分别为 $ce_{2n+1}(\xi)$ 和 $se_{2n+1}(\xi)$ (详见 [6])。这些本征函数具有如下的正交关系:

$$\left. \begin{aligned}
\int_0^{2\pi} ce_m(\xi, q) ce_{m'}(\xi, q) d\xi &= 0, \quad m \neq m'; \\
\int_0^{2\pi} se_m(\xi, q) se_{m'}(\xi, q) d\xi &= 0, \quad m \neq m'; \\
\int_0^{2\pi} se_m(\xi, q) ce_m(\xi, q) d\xi &= 0.
\end{aligned} \right\} \tag{20}$$

通常采用如下的归一化标准

$$\left. \begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} ce_m^2(\xi, q) d\xi &= 1, \\
\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} se_m^2(\xi, q) d\xi &= 1.
\end{aligned} \right\} \tag{21}$$

二、螺旋泵浦磁场中电子的运动

由如下等式

$$m\xi = \frac{1}{\hbar} p_z \left(z - \frac{\theta}{k_w} \right) \tag{22}$$

可求得

$$m = \frac{2p_z}{\hbar k_w} \tag{23}$$

将(23)式代入 $a(q)$ 中求得

$$\begin{aligned}
a_m(q) &= m^2 + \delta(q) \\
&= 4[E^2 - c^2(p_x^2 + p_y^2) \\
&\quad - M^2 c^4] / (\hbar^2 k_w^2 c^2)
\end{aligned} \tag{24}$$

或写为

$$E^2 = c^2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + M^2 c^4 + \delta(q) \hbar^2 k_w^2 c^2. \tag{25}$$

当横向动量 $p_\perp(p_x, p_y) = 0$ 时, 此时 $q = 0$, 因此 $\delta(q) = 0$, (25) 式给出

$$\begin{aligned}
E^2 &= c^2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + M^2 c^4 \\
&= c^2 p^2 + M^2 c^4
\end{aligned} \tag{26}$$

这是一个自由电子的运动状态。所不同的是电子的静止质量 m_0 被 M 所取代。

静止质量为 m_0 的自由电子, 其能量可表示为

$$E = \gamma m_0 c^2, \tag{27}$$

进入螺旋泵浦磁场后为

$$E \approx \gamma_s M c^2. \tag{28}$$

考虑到一个沿 z 轴运动的相对论电子束, 电子在 z 方向的动量远远大于横向动量。我们得

$$\gamma_s \approx \gamma \frac{m_0}{M} \tag{29}$$

或

$$\gamma_s^2 \approx \gamma^2 / \left(1 + \frac{e^2 A_0^2}{m_0^2 c^4} \right) \tag{30}$$

这表明: 一个沿 z 方向传播的平面电子波, 进入螺旋周期静磁场后, 仍为一沿 z 轴方

向传播的平面波,不同的是粒子的静质量发生了一个移动,其值与静磁场振幅有关

$$\Delta m \approx \frac{e^2 A_0^2}{2c^4} \quad (31)$$

在经典电动力学中,一个沿 z 轴运动的电子进入螺旋静磁场后,将产生一个横向动量,其数值为 $+eA_0$,且绕 z 轴以角速度 ω_w 旋转,因此电子在作螺旋运动。

三、激光场的影响

加入激光场之后, Klein-Gordon 方程变为

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\mathbf{r}, t) = [(-i\hbar(\nabla + e\mathbf{A}_0))^2 + m_0^2 c^4 + \hat{H}'(t)] \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (32)$$

它很难求得解析解。考虑到激光场远小于静磁场,我们可用微扰论来求解。微扰哈密顿为^[4]

$$\hat{H}'(t) = 2e^2 \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{A}_s. \quad (33)$$

其中 $\mathbf{A}_s(t)$ 为激光场矢势,它具有如下形式

$$\mathbf{A}_s(t) = A_s [\mathbf{e}_x \cos(\omega_s t - k_s z) + \mathbf{e}_y \sin(\omega_s t - k_s z)] \quad (34)$$

方程(32)精确至二级的微扰解为:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi^{(0)} + \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)}. \quad (35)$$

式中 $\Psi^{(0)}$ 是方程(1)的解,而

$$\Psi^{(n)}(\mathbf{r}, t) = \int d^3 p' a^{(n)}(\mathbf{p}', t) \Psi^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t), \quad (36)$$

$$n=1, 2;$$

$$a^{(1)}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{i\hbar M c^2} \int_0^t dt' H'(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0, t') \times \exp\left[\frac{i}{\hbar} (E - E_0) t'\right], \quad (37)$$

$$a^{(2)}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{i\hbar M c^2} \times \int_0^t dt' \int d^3 p' H'(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t') \times \exp\left[\frac{i}{\hbar} (E - E') t'\right] a^{(1)}(\mathbf{p}', t'). \quad (38)$$

微扰哈密顿矩阵元为:

$$H'(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) = \int d^3 x \Psi^{(0)*}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \hat{H}'(t) \Psi^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}'). \quad (39)$$

电子的空间率分布为

$$\begin{aligned} \Psi^*(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) &= \Psi^{(0)*} \Psi^{(0)} + (\Psi^{(0)*} \Psi^{(1)} + \Psi^{(0)} \Psi^{(1)*}) \\ &+ \Psi^{(1)*} \Psi^{(1)} + (\Psi^{(0)*} \Psi^{(2)} + \Psi^{(0)} \Psi^{(2)*}) \\ &+ \Psi^{(2)*} \Psi^{(2)} + (\Psi^{(1)*} \Psi^{(2)} + \Psi^{(1)} \Psi^{(2)*}). \end{aligned} \quad (40)$$

从文献[4]可知,上式右端第1、3、4、5项只给出一些高频振荡项,对时间平均的结果为零。第二项是给出增益的项。略去此项中的高频振荡部分得

$$\Psi^{(0)*} \Psi^{(1)} + \Psi^{(0)} \Psi^{(1)*} = G \cos(Kz), \quad (41)$$

其中

$$G = \frac{e^2 A_0 A_s}{M c^2 \sqrt{\gamma_{s0}}} \left[\frac{1}{\sqrt{\gamma_{s-}} (E_- - E_0 + \hbar\omega_s)} + \frac{1}{\sqrt{\gamma_{s+}} (E_+ - E_0 - \hbar\omega_s)} \right], \quad (42)$$

$$K = k_w + k_{s0}. \quad (43)$$

E_{\pm} 分别为当 $p = p_0 \pm \hbar K$ 时的能量 E 。 $\gamma_{s\pm}$ 为 E_{\pm} 时的 γ 值。(41)式表明,电子束产生了聚束。既然它是给出增益的项,因此增益来源于电子束的聚束。(40)式右端第六项中略去高频振荡项给出

$$\Psi^{(0)*} \Psi^{(2)} + \Psi^{(1)} \Psi^{(2)*} = \Pi_1 \cos(Kz) + \Pi_3 \cos(3Kz) \quad (44)$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= -\frac{e^6 A_0^3 A_s^3}{4M^2 c^6 \gamma_{s0}} \\ &\times \left[\frac{1}{\left\{ \sqrt{\gamma_{s-}^3} \sqrt{\gamma_{s-}} (E_- - E_0 + \hbar\omega_s)^2 \right\}} \right. \\ &\left. + \frac{1}{\left\{ \sqrt{\gamma_{s+}^3} \sqrt{\gamma_{s+}} (E_+ - E_0 - \hbar\omega_s)^2 \right\}} \right], \end{aligned} \quad (45)$$

(下转第 21 页)

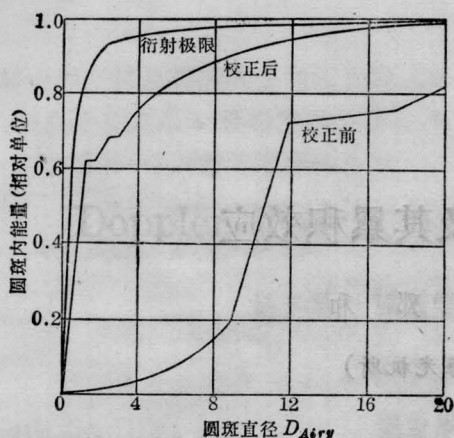


图 10 积分能量分布(像散)

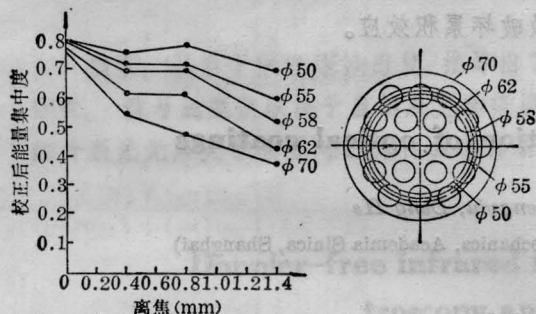


图 11 不同通光孔径下的校正效果

是最外层的致动器外侧的变形影响曲线与内

圈有较大的不同(图4),对衍射斑将有较大的影响。

我们在系统中加入光阑,分别缩小通光孔径。在不同的像差量下,测量校正后的能量集中度,以爱里斑直径内能量为代表得曲线(图11)。从图中可见,当通光孔径缩小到外圈致动器中心时,能量集中度就有很大改善,雪花状衍射斑也基本消失,说明主要是外圈驱动器外侧与被校正波前拟合不够造成残余波前误差。

实验证明,系统经过二、三次循环后即可实现最佳控制。

实验中所用的变形反射镜由凌宁提供,高压放大器由李明全提供;与上海光机所邓锡铭、余文炎、胡绍衣、范滇元等同志进行了有益的讨论。特此一并致谢。

参 考 文 献

- 1 Pearson J E et al. *Applied Optics and Optical Engineering*, 1979; **7**: 245~340
- 2 Pearson J E et al. *JOSA*, 1977; **67**: 325~333
- 3 Viswanathan V K. *Proc. SPIE*, 1979; **190**: 251~257
- 4 Budgor A B. *Proc. SPIE*, 1981; **288**: 83~92

(上接第4页)

$$\begin{aligned} \Pi_3 = & -\frac{e^6 A_0^3 A_s^3}{4M^8 c^6 \gamma_{s0}} \\ & \times \left[\frac{1}{\sqrt{\gamma_{s-} \gamma_{s+}} \sqrt{\gamma_{s-}} (E_- - E_0 + \hbar\omega_s)} \right. \\ & \quad \times (E_+ - E_0 - 2\hbar\omega_s) \\ & \quad \times (E_+ - E_+ - \hbar\omega_s) \left. \right] \\ & + \frac{1}{\sqrt{\gamma_{s+} \gamma_{s-}} \sqrt{\gamma_{s-}} (E_+ - E_0 - \hbar\omega_s)} \\ & \quad \times (E_- - E_0 + 2\hbar\omega_s) \\ & \quad \times (E_- - E_- + \hbar\omega_s) \end{aligned} \quad (46)$$

其中 E_+ 、 E_- 、 γ_+ 、 γ_- 为 $p=p_0 \pm 2K\hbar$ 时的能量和 γ 值。注意, Π_1 与 G 的符号相反。因此(44)式给出了一阶退聚束项和三阶聚束项。因为这一项是给增益饱和的项。因此,

增益饱和来源于: ①退聚束效应降低了增益,产生饱和; ②三阶聚束的出现,它给出三次谐波的产生,从而降低了基波的增益,也产生饱和。

参 考 文 献

- 1 Colson W B. *Phys. Lett.*, 1977; **64A**: 190
- 2 Al-Abawi et al. *Phys. Rev. A*, 1977; **16**: 666
- 3 Fnedland L. *Phys. Fluids*, 1980; **23**: 2376
- 4 Fang H, Fu S. *Scientia Sinica A*, 1986; **20**: 290
- 5 Hopf F A et al. *Opt. Commun.*, 1976; **18**: 413
- 6 Abramowith M, Stegun I A. *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover Pub., 1980: 722