

带电粒子面沟道辐射的混沌行为

邵明珠 罗诗裕 刘曾荣

(重庆交通学院) (安徽大学)

提要: 考虑了带电粒子沟道辐射的衰减和晶格场的周期性,把粒子运动方程化为具有弱阻尼和弱激励的摆方程。讨论了带电粒子面沟道辐射的混沌(Chaos)行为,计算了系统的 Melnikov 函数,导出了系统的阈值和通向混沌的可能途径。

Chaotic behaviour in planar channeling radiation of charged particles

Shao Mingzhu, Luo Shiyu

(Chongqing Institute of Communication, Chongqing)

Liu Zengrong

(Ahhui University, Hefei)

Abstract: The damping of channeling radiation and the periodicity of crystal lattice field were considered. The motion equation of particles is simplified to the pendulum equation with weak damping and weak excitation. The chaotic behaviour of the system is discussed, Melnikov function in various cases is calculated, the threshold and possible approach to chaotic condition are derived.

一、引言

人们在研究带电粒子的面沟道辐射时,常引入了下面两条假设:

(1) 带电粒子同晶面之间的相互作用势是平面连续势;

(2) 无辐射阻尼。在高能和小振幅情况下,这两条假设是很好成立的,而且在这种近似下粒子的运动方程可化为

$$\frac{d^2 X}{ds^2} + \frac{1}{2} \epsilon^2 W'(X) = 0 \quad (1)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} X &= 2x/d_p, s = \frac{2v}{d_p} t, \epsilon^2 = \frac{K_1}{E} \\ E &= m_0 \gamma c^2, K_1 = \pi z_1 z_2 e^2 N d_p^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

x 是粒子偏离沟道中心的距离; d_p 是晶面间距, z_1 和 z_2 分别是带电粒子和晶体原子的原子序数; e 是电子电荷; $N d_p^2$ 是晶体的原子面密度; v 是粒子的纵向(沿着沟道方向)速度; c 是光速; γ 是相对论因子; m_0 是带电粒子的静止质量; $W'(X) = \frac{\partial W(X)}{\partial X}$, $W(X)$ 是无

收稿日期:1986年2月22日。

修改稿收到期:1986年9月10日。

量纲的粒子-晶体相互作用势。根据第二条假设,运动方程不含阻尼项,而在第一条假设下,人们导出了不同形式的粒子-晶体相互作用势,常用的平面连续势有 Lindhard 势和 Moliere 势^[1,2]。

基于假设(1)和(2)的某些近似性,我们提出如下修正:

(1) 势是连续的,但并不是平面的,即粒子的运动将受到运动方向的晶格周期场 $\beta_1 \cos \omega s$ 的调制;当 β_1 为小量时,这种调制是很弱的,当 $\beta_1=0$ 时,相互作用势化为平面连续势。

(2) 考虑到辐射阻尼,引入与速度有关的阻尼项 $\alpha_1(d\xi/ds)$ 。当 α_1 很小时属于弱阻尼情形,当 $\alpha_1=0$ 时化为无阻尼情形。

引入以上两条修正,粒子运动方程化为

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} + \alpha_1(d\xi/ds) + \delta \sin \xi = \beta_1 \cos \omega_1 s \quad (3)$$

式中 α_1 称为阻尼系数, β_1 称为调制振幅, ω_1 是调制频率,与沟道方向的晶格周期(或外场)有关。 α_1 和 β_1 均为小量。方程(3)是一个具有阻尼项的受迫摆方程,将它规范化,可得

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \alpha_2(d\xi/d\tau) + \sin \xi = \beta_2 \cos \omega \tau \quad (4)$$

其中 $\tau = \sqrt{\delta} S$, 且

$$\alpha_2 = \alpha_1/\sqrt{\delta}, \quad \beta_2 = \beta_1/\delta, \quad \omega = \frac{\omega_1}{\sqrt{\delta}} \quad (5)$$

在弱阻尼和弱激励情形下,方程(4)可改写为

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \sin \xi = \varepsilon \left(-\alpha \frac{d\xi}{d\tau} + \beta \cos \omega \tau \right) \quad (6)$$

其中 $0 < \varepsilon \ll 1$, $\alpha, \beta > 0$, 且

$$\alpha = \alpha_2/\varepsilon, \quad \beta = \beta_2/\varepsilon \quad (7)$$

二、无扰动系统的轨道特征

考虑方程(6)的无扰动情形^[3]

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \sin \xi = 0 \quad (8)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= \zeta \\ \dot{\zeta} &= -\sin \xi \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

方程(9)描写了系统(6)的基本特征,相应的 Hamiltonian 量为

$$h = \frac{1}{2} \zeta^2 + (1 - \cos \xi) \quad (10)$$

根据 h 的大小,相平面上的轨道可分为三类:

(1) $h=2$, 同宿轨道,它把相平面分为两个区域,相应的解记为 Π^s , 且 Π^s 可表示为

$$\Pi^s: \left. \begin{aligned} \xi &= \pm 2 \arcsin(th\tau) \\ \zeta &= \pm 2 \operatorname{sech} \tau \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

±号分别对应上、下平面的同宿轨道,粒子沿这条轨道运动的周期 T^s 为无穷。

(2) $0 < h < 2$, 振荡型周期轨道,用 Π^0 表示,且可导出

$$\Pi^0: \left. \begin{aligned} \xi &= 2 \arcsin(k \operatorname{sn} \tau) \\ \zeta &= 2k \operatorname{cn} \tau \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中

$$k = \frac{h}{2} \quad (13)$$

$\operatorname{sn} \tau$ 和 $\operatorname{cn} \tau$ 是 Jacobian 椭圆函数,粒子沿轨道(12)的运动周期 T^0 为

$$T^0 = 4K \quad (14)$$

$K = K(k)$ 是第一类全椭圆积分。当 h 单调增加时,周期 T^0 从 2π 增加到无穷。

(3) $h > 2$, 回转型周期轨道,用符号 Π^r 表示,且

$$\Pi^r: \left. \begin{aligned} \xi &= \pm 2 \arcsin\left(\operatorname{sn} \frac{\tau}{k}\right) \\ \zeta &= \pm \frac{2}{k} \operatorname{dn}\left(\frac{\tau}{k}\right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中

$$k = 2/h \quad (16)$$

$\operatorname{dn} \tau$ 为 Jacobian 椭圆函数,粒子沿轨道(15)的运动周期 T^r 为

$$T^r = 2kK \quad (17)$$

当 h 单调减小时,周期 T^r 由零增加到无穷。

三、系统的混沌行为

当 $0 < \varepsilon \ll 1$, $\alpha, \beta > 0$, 方程(6)即为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= \zeta \\ \dot{\zeta} &= -\sin \xi + \varepsilon(-\alpha \zeta + \beta \cos \omega \tau) \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

描写了弱阻尼、弱激励状态下的受迫摆的运动行为。系统的混沌行为依赖于同宿轨道对方程(6')引起的混沌性质。为此,我们考查同宿轨道 Π^* 。构成如下形式的 Melnikov 函数^[4]

$$\begin{aligned} M(\tau_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} [-\alpha \zeta + \beta \cos \omega(t + \tau_0)] \zeta(\tau) d\tau \\ & \quad (18) \end{aligned}$$

式中 $\zeta(\tau)$ 由式(11)给出。注意到被积函数奇偶性,完成上述积分后得

$$M(\tau_0) = -8\alpha + 2\pi\beta \operatorname{sech} \frac{\omega\pi}{2} \sin \omega\tau_0 \quad (19)$$

式(19)在区域 $\tau_0 \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$ 内有简单零点的条件是

$$\frac{\beta}{\alpha} > \frac{4}{\pi} \operatorname{ch} \frac{\omega\pi}{2} \quad (20)$$

式中 $\frac{4}{\pi} \operatorname{ch} \frac{\pi\omega}{2}$ 是系统出现混沌的阈值,用符号 $R^\infty(\omega)$ 表示,即

$$R^\infty(\omega) = \frac{4}{\pi} \operatorname{ch} \frac{\pi\omega}{2} \quad (21)$$

由式(20)和(21)可以看出,对于充分小的 ε ,只要参数 α, β 满足条件

$$\frac{\beta}{\alpha} > R^\infty(\omega) \quad (21')$$

系统即可出现混沌状态。

四、系统通向混沌的可能途径

分两种情况讨论。

(1) 由振荡型周期轨道进入混沌状态的可能途径。

为此,我们讨论振荡型周期轨道中产生 $T^0 = 4K = \frac{\partial \pi m}{\omega n}$ 的超次谱分叉 (m 为正整数),构成如下形式的 Melnikov 函数

$$\begin{aligned} M_{(1)}^{m/n}(\tau_0) &= \int_0^{n\tau_0} [-\alpha \zeta + \beta \cos \omega(\tau + \tau_0)] \zeta(\tau) d\tau \\ & \quad (22) \end{aligned}$$

式中 $\zeta(\tau)$ 由式(12)给出。对于 $n=1$,完成上述积分,可得次谱分叉的 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned} M_{(1)}^{m/1}(\tau_0) &= 4\pi\beta \sin \omega\tau_0 \operatorname{sech} \frac{m\pi K'}{2K} \\ & \quad - 16\alpha [E(K) - k'^2 K] \\ & \quad (m=1, 3, 5 \dots) \end{aligned} \quad (23)$$

式中

$$K' = K(k') \quad k'^2 = 1 - k^2 \quad (24)$$

且利用了 Jacobian 椭圆函数的奇偶性和 $\operatorname{cn}\tau$ 的三角函数展开式

$$\operatorname{cn}\tau = \frac{2\pi}{kK} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{q^{l-1/2}}{1+q^{2l-1}} \cos(2l-1) \frac{\pi\tau}{2K} \quad (25)$$

式中

$$q = e^{\pi K'/K} \quad (26)$$

还可利用下列极限

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sin p\tau}{\tau} = p_0 \quad (27)$$

Melnikov 函数(25)在区间 $\tau \in (0, \frac{2\pi m}{\omega})$ 内有简单零点的条件为

$$\beta/\alpha > R_{(1)}^m(\omega) \quad (28)$$

式中

$$R_{(1)}^m(\omega) = \frac{4}{\pi} (E - k'^2 K) \operatorname{ch} \frac{m\pi K'}{2K} \quad (29)$$

讨论 ω 一定, $m \rightarrow \infty$ 时的极限过程,可揭示系统通向混沌状态的可能途径。当 ω 一定, $m \rightarrow \infty$ 时,有 $k \rightarrow 1, k' \rightarrow 0, K' \rightarrow \pi/2$ 以及 $E \rightarrow 1$ 等,由此可求得式(29)的极限为

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R_{(1)}^m(\omega) = \frac{4}{\pi} \operatorname{ch} \frac{\pi\omega}{2} = R^\infty(\omega) \quad (30)$$

即无限次振荡型次谱分叉的阈值趋向于混沌的阈值。

另外,对于固定的 ω ,当 m 充分大时, k 和 E 均充分接近于 1,由于 k' 充分接近于零,则

$$k = 1 - \frac{1}{2} k'^2 + O(k'^4) \quad (31)$$

$$K' = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{1}{4} k'^2 + O(k'^4) \right] \quad (32)$$

再注意到双曲余弦的性质, 可得

$$\begin{aligned} R_{(1)}^n(\omega) &\rightarrow \frac{4}{\pi} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \omega \left[1 - \frac{1}{4} k'^2 + O(k'^4) \right] \\ &< \frac{4}{\pi} \operatorname{ch} \frac{\pi \omega}{2} = R^\infty(\omega) \end{aligned} \quad (33)$$

可见, 在 $\omega \sim R^\infty(\omega)$ 平面上, 无限次奇阶振荡型次谱分叉的阈值 $R_{(1)}^n(\omega)$ 是从 $R^\infty(\omega)$ 的下方逼近它的。

(2) 由回转型周期轨道进入混沌状态的可能途径。

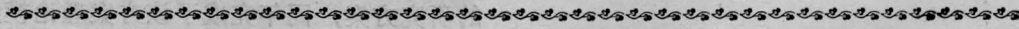
类似地, 为了讨论回转型周期轨道中产生 $T^r = 2kK = \frac{2m\pi}{n\omega}$ 的超次谱分叉, 可构成和计算如下的 Melnikov 函数:

$$\begin{aligned} M_{(2)}^{m/n}(\tau_0) &= \int_0^{nT^r} (-\alpha \zeta + \beta \cos \omega(\tau + \tau_0)) \zeta(\tau) d\tau \\ &\quad (34) \end{aligned}$$

其中 $\zeta(\tau)$ 由式(15)给出。对于 $n=1$, 完成上述积分, 可得 m 阶次谱分叉的 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned} M_{(2)}^{m/1}(\tau_0) &= -\frac{8\alpha}{k} E(K) \\ &\quad + 2\pi\beta \sin \omega\tau_0 \operatorname{sech} \frac{m\pi K'}{K} \\ m &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (35)$$

其中利用了 Jacobian 椭圆函数的奇偶性和它的三角函数展开式



(上接第 455 页)

型和选用腔参数, 在各稳定区作具体计算和分析。

(3) 当 D, g_i^* 取临界值时, $\frac{\theta_{1,e}}{\theta_{1,n}}$ 的计算值不一定符合实际情况, 因为这时高斯光束近似失效。但在趋向临界点附近的稳定区内, 高斯光束公式仍是正确的。

$$dn\tau = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{q^l}{1+q^{2l}} \cos \frac{l\pi\tau}{K} \quad (36)$$

以及极限(27)。上式中的 q 由式(26)给出。

Melnikov 函数(35)在区间 $\tau \in (0, \frac{2\pi m}{\omega})$ 内有简单零点的条件为

$$\beta/\alpha > R_{(2)}^n(\omega) \quad (37)$$

式中

$$R_{(2)}^n(\omega) = \frac{4E}{\pi k} \operatorname{ch} \frac{m\pi K'}{K} \quad (38)$$

当 ω 一定, $m \rightarrow \infty$ 的极限是:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R_{(2)}^m(\omega) = \frac{4}{\pi} \operatorname{ch} \frac{\pi\omega}{2} = R^\infty(\omega) \quad (39)$$

即无限次回转型次谱分叉的阈值趋近于混沌的阈值。用类似上面的讨论还可发现, 在 $\omega \sim R^\infty(\omega)$ 平面上, 无限次回转型次谱分叉的阈值是从 $R^\infty(\omega)$ 的下面逼近它的。

以上分析得到的结果表明, 在弱阻尼和弱激励情形下, 对于充分小的 α_1, β_1 和固定的 ω , 当参数 β/α 逐渐增加时, 振荡型周期轨道可能通过无限次奇阶次谱分叉进入混沌; 而回转型周期轨道则可能通过无限次次谱分叉进入混沌。

参 考 文 献

- [1] 罗诗裕, 邵明珠; 《中国激光》, 1984, 11, No.2, 69.
- [2] 罗诗裕, 余超凡; 《中国激光》, 1985, 12, No.8.
- [3] 刘曾荣; “全国非线性系统中的不稳定性与随机性会议”资料, 桂林, 1984, 11.
- [4] 郝伯林; 《物理学进展》, 1983, 3, 329.

参 考 文 献

- [1] A. Yariv; “Quantum Electronics”, John Wiley & Sons Inc. (1975), 101.
- [2] H. Weber; “Optische Resonatoren”(丘军林, 孙荫才编译, 华中工学院出版社, 1983)
- [3] K. P. Driedger, 吕百达, H. Weber; *Opt. Acta*, 1985, 32, No. 8, 847.
- [4] 吕百达, 魏光辉; 《四川大学学报》, 1985, 4, 58.