中国激光
第14卷 第8期

稳定光学谐振腔高斯光束的发散角理论

吕百达　　H. Weber

（四川大学物理系）（西德 Kaiserslautern 大学物理系）

提要：当考虑到高斯光束在通过界面时参数的变化后，光学谐振腔输出高斯光束的远场发散角（外发散角）一般不等于自由空间中高斯光束的远场发散角（定义为内发散角），使用 ABCD 矩阵，g- 和 g^*-参数表示，导出了在基模和多模工作时内、外发散角的一般公式并对 (1) 固体激光腔；(2) 输出镜为平面镜；(3) 激光棒端面直接镀膜成镜；(4) 热透镜腔等四个典型例证作了比较和讨论。

Theory of Gaussian beam divergence for stable optical resonators

Lü Baida

(Sichuan University, Chengdu)

H. Weber

(Kaiserslautern University, Fed. Rep., Germany)

Abstract: The Gaussian beam divergence for optical resonators (external divergence angle) is not equal to that in free space(internal divergence angle, as a definition) when the change of beam parameter through a dielectric interface has been considered. In this paper, using ABCD-matrix, g-and g*-parameters, the formulae for external and internal divergence angles in fundamental mode operation and multimode operation have been derived analytically. Four typical examples have been compared and discussed: (1)optical resonators of solid-state lasers; (2) resonators with one plane mirror; (3) directly coated laser rods; (4) resonators with a thermal lens.

一、引　言

在自由空间中传播的基模高斯光束的远场发散角可用简单公式

$$\theta_0=\frac{\lambda}{\pi w_0} \tag{1-1}$$

来表示（式中 λ 为光在传播空间介质中的波长，w_0 为腰斑半径）。当涉及光学谐振腔时，情况比较复杂。应当注意的是，虽然曲率半径为 ρ 的球面镜对激光束的反射变换可以认为与焦距为 $f=\frac{\rho}{2}$ 的薄透镜对激光束的透射变换是等效的，但是，光学谐振腔输出耦合镜与薄透镜对激光束的透射变换并不等效。并且，

收稿日期：1986年6月6日。

前者还依赖于球面镜两个界面的几何形状，这是在计算和测量由光学谐振腔耦合镜输出高斯光束远场发散角时应当考虑的，因此，应当回到 θ_0 的原始定义式，严格推导。此外，多模高斯光束的远场发散角 θ_{mi}($i=1, 2$, 下同)也是一个存在有争议的问题。本文利用 $ABCD$ 矩阵、g-、g^*-参数表示和为实验所支持的 θ_{mi} 的定义[2~4]，推导出了简单两镜腔和多元件光学谐振腔基模和多模高斯光束外发散角($\theta_{0i,e}$、$\theta_{mi,e}$)和内发散角($\theta_{0i,n}$、$\theta_{mi,n}$)的一般公式，并计算了几种腔相应的发散角。

二、界面折射时高斯光束参数的变化

如图1所示，谐振腔内高斯光束通过折射率 η_s、曲率半径 ρ_i 的凹面镜(平-凹形，厚度可略而不计)向外传播，镜两侧介质的折射率分别为 η_n、η_e。则其传播矩阵为[1]

$$M_i=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\eta_s-\eta_n}{\eta_e\rho_i} & \dfrac{\eta_n}{\eta_e} \end{pmatrix} \quad (2\text{-}1)$$

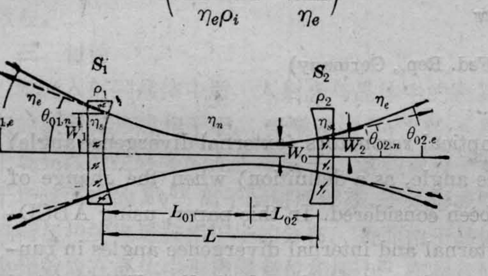

图1 简单两镜腔和基模远场发散角，L 为腔长

利用 $ABCD$ 定律易推知，在 S_i 镜内侧面上，光斑半径 w_i、等相面曲率半径 $R_{G,ni}$ 的高斯光束，从折射率 η_n 介质通过凹面镜传播到折射率 η_e 介质时，其参数 W_{ei}、$R_{G,ei}$ 为

$$W_{ei}=W_i \quad (2\text{-}2)$$

$$R_{G,ei}=\frac{\eta_e}{\eta_s}\rho_i \quad (2\text{-}3)$$

式中已设 $R_{G,ni}=\rho_i$。此外，在无色散介质中光波波长满足关系

$$\lambda_n\eta_n=\lambda_e\eta_e=\lambda_0 \quad (2\text{-}4)$$

λ_0 为真空中波长。

利用上述公式以及光腔模参数的 $ABCD$ 矩阵元表示和 g-、g^*-参数表示[2]，可将简单两镜腔和多元件腔的高斯光束远场发散角或者统一表为 $ABCD$ 矩阵元形式，或者分开写为 g-、g^*-参数形式。

三、高斯光束的外发散角

由光学谐振腔耦合输出高斯光束外发散角为通常意义下的高斯光束远场发散角，即实验中所测得发散角。其定义为

基模

$$\theta_{0i,e}=\lim_{z\to\infty}\frac{W(z)}{z}=\sqrt{\left(\frac{W_{ei}}{R_{Gei}}\right)^2+\left(\frac{\lambda_e}{\pi W_{ei}}\right)^2} \quad (3\text{-}1)$$

多模

$$\theta_{mi,e}=\frac{R}{W_L}\theta_{0i,e} \quad (R>W_L) \quad (3\text{-}2)$$

按文献[2]定义，(3-2)式中 R 为实际限模光阑半径，W_L 为限模处基模高斯光束光斑半径，若取激光棒为有效光阑，则 R 为棒半径(图2)，且

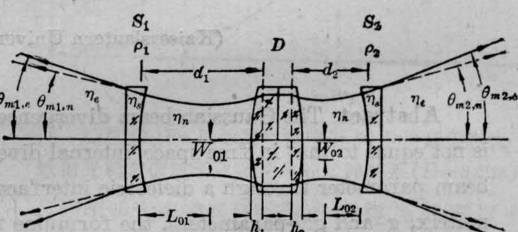

图2 多元件腔和多模远场发散角

$$W_L^2=W_{0i}^2[1+(d_i-L_{0i})^2/z_{0i}^2] \quad (3\text{-}3)$$

式中 z_{0i} 为瑞利长度

$$z_{0i}=\frac{\pi W_{0i}^2}{\lambda_n} \quad (3\text{-}4)$$

1．基模　由(3-1)、(2-2)、(2-3)等式可得

$$\theta_{0i,e}^2=\frac{\lambda_e}{\pi}\times\frac{\eta_s^2(D_i-A_i)^2+\eta_n^2[4-(A_i+D_i)^2]}{2\eta_e\eta_nB_i\sqrt{4-(A_i+D_i)^2}} \quad (3\text{-}5)$$

式中 A_i、D_i 为腔内往返一周传播矩阵元素，下同。

对简单两镜腔可写为 g-参数形式

$$\theta_{0i,e}^2=\frac{\lambda_e}{\pi L}\cdot\frac{\eta_s^2 g_j(1-g_i)^2+\eta_n^2 g_i(1-g_1g_2)}{\eta_e\eta_n\sqrt{g_1g_2(1-g_1g_2)}} \tag{3-6}$$

(i, $j=1$, 2, 且 $i\neq j$, 下同。)

对多元件腔 $\theta_{0i,e}$ 可表为 g^*-参数形式

$$\theta_{0i,e}^2=\frac{\lambda_e}{\pi L^*}\cdot\frac{\eta_s^2 g_j^*(L^*/\rho_i)^2+\eta_n^2 g_i^*(1-g_1^*g_2^*)}{\eta_n\eta_e\sqrt{g_1^*g_2^*(1-g_1^*g_2^*)}} \tag{3-7}$$

2．多模

$$\theta_{mi,e}^2=R^2\frac{\left\{\begin{array}{c}(1-A_iD_i)\left\{\left(\frac{\eta_s}{\eta_e}\right)^2(D_i-A_i)^2\right.\\ \left.+\left(\frac{\eta_n}{\eta_e}\right)^2[4-(A_i+D_i)^2]\right\}\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}B_i^2[4-(A_i+D_i)^2]\\ +\{2d_i(1-A_iD_i)-B_i(D_i-A_i)\}^2\end{array}\right\}} \tag{3-8}$$

简单两镜腔

$$\theta_{mi,e}^2=\frac{\left\{\begin{array}{c}(g_1+g_2-2g_1g_2)\left[\left(\frac{\eta_s}{\eta_e}\right)^2 g_j(g_i-1)^2\right.\\ \left.+\left(\frac{\eta_n}{\eta_e}\right)^2 g_i(1-g_1g_2)\right]R^2/L^2\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}g_1g_2(1-g_1g_2)\\ +\left[\frac{d_i}{L}(g_1+g_2-2g_1g_2)-(1-g_i)g_j\right]^2\end{array}\right\}} \tag{3-9}$$

多元件腔

$$\theta_{mi,e}^2=\frac{\left\{\begin{array}{c}[g_j^*(L^*/\rho_i)^2+g_i^*(1-g_1^*g_2^*)]\\ \times\left[\left(\frac{\eta_s}{\eta_e}\right)^2 g_j^*(L^*/\rho_i)^2\right.\\ \left.+\left(\frac{\eta_n}{\eta_e}\right)^2 g_i^*(1-g_1^*g_2^*)\right]R^2/L^{*2}\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}g_1^*g_2^*(1-g_1^*g_2^*)+\left\{\frac{d_i}{L^*}[g_j^*(L^*/\rho_i)^2\right.\\ \left.+g_i^*(1-g_1^*g_2^*)]-g_j^*(L^*/\rho_i)\right\}^2\end{array}\right\}} \tag{3-10}$$

式中 g_i、g_i^*、L、L^* 定义与[2]同。

四、高斯光束的内发散角

本文定义在光学谐振腔内介质中高斯光束的发散角为内发散角。它等于腰斑仍为 W_{0i} 的高斯光束在折射率 η_n 自由空间中传播的远场发散角，如图1、2中虚线所示。即

基模

$$\theta_{0i,n}=\lim_{z\to\infty}\frac{W(z)}{z}=\frac{\lambda_n}{\pi W_{0i}} \tag{4-1}$$

多模

$$\theta_{mi,n}=\frac{R}{W_L}\theta_{0i,n} \tag{4-2}$$

1．基模　仿前节可得

$$\theta_{0i,n}^2=\frac{\lambda_n}{\pi}\cdot\frac{2(1-A_iD_i)}{B_i\sqrt{4-(A_i+D_i)^2}} \tag{4-3}$$

简单两镜腔

$$\theta_{0i,n}^2=\frac{\lambda_n}{\pi L}\cdot\frac{(g_1+g_2-2g_1g_2)}{\sqrt{g_1g_2(1-g_1g_2)}} \tag{4-4}$$

多元件腔

$$\theta_{0i,n}^2=\frac{\lambda_n}{\pi L^*}\cdot\frac{g_j^*(L^*/\rho_i)^2+g_i^*(1-g_1^*g_2^*)}{\sqrt{g_1^*g_2^*(1-g_1^*g_2^*)}} \tag{4-5}$$

2．多模

$$\theta_{mi,n}^2=\frac{4(1-A_iD_i)^2R^2}{\left\{\begin{array}{c}B_i^2[4-(A_i+D_i)^2]\\ +\{2d_i(1-A_iD_i)-B_i(D_i-A_i)\}^2\end{array}\right\}} \tag{4-6}$$

简单两镜腔

$$\theta_{mi,n}^2=\frac{(g_1+g_2-2g_1g_2)^2R^2/L^2}{\left\{\begin{array}{c}g_1g_2(1-g_1g_2)\\ +\left\{\frac{d_i}{L}(g_1+g_2-2g_1g_2)-(1-g_i)g_j\right\}^2\end{array}\right\}} \tag{4-7}$$

多元件腔

$$\theta_{mi,n}^2=\frac{[g_j^*(L^*/\rho_i)^2+g_i^*(1-g_1^*g_2^*)]^2R^2/L^{*2}}{\left\{\begin{array}{c}g_1^*g_2^*(1-g_1^*g_2^*)+\left\{\frac{d_i}{L^*}\left[g_j^*\left(\frac{L^*}{\rho_i}\right)^2\right.\right.\\ \left.\left.+g_i^*(1-g_1^*g_2^*)\right]-g_j^*(L^*/\rho_i)\right\}^2\end{array}\right\}} \tag{4-8}$$

比较节三、四可得如下结论：

(1) 一般情况下 $\theta_{0,e}\neq\theta_{0,n}$, $\theta_{m,e}\neq\theta_{m,n}$。

因此，对光学谐振腔，(1-1) 式不能无条件使用。

(2) 对简单两镜腔 $\theta_{01,n}=\theta_{02,n}$($W_{01}$ 与 W_{02} 重合)，但 $\theta_{01,e}$ 一般并不等于 $\theta_{02,e}$，这是由腔参数非对称所引起的。对图 2 所示多元件腔，因腔内存在两个位置、大小不同的腰斑，故 $\theta_{01}\neq\theta_{02}$。

(3) 多模高斯光束远场发散角与波长无关，这是因为基模高斯光束远场发散角随波长增加而增加，与模序数 $m\cong\left(\frac{R}{W_L}\right)^2-\frac{1}{2}$ 随波长增加而减小的二因素恰相抵销。

(4) 多模情况下一般有 $\theta_{m1}\neq\theta_{m2}$。除了腔参数非对称原因外，与限模光阑位置亦有关。

五、典型实例

为说明节三、四公式应用，兹举以下四个典型实例予以讨论。

1. 一般固体激光谐振腔

此时有 $\eta_n=\eta_e=1$, $\eta_s=\eta$(反射镜介质折射率)和 $\lambda_e=\lambda_n=\lambda_0$

(1) 外发散角

对于基模:

$$\theta_{0i,e}^2=\frac{\lambda_0}{\pi}\cdot\frac{\eta^2(D_i-A_i)^2+4-(A_i+D_i)^2}{2B_i\sqrt{4-(A_i+D_i)^2}} \tag{5-1}$$

简单两镜腔

$$\theta_{0i,e}^2=\frac{\lambda_0}{\pi L}\cdot\frac{\eta^2 g_j(1-g_i)^2+g_i(1-g_1g_2)}{\sqrt{g_1g_2(1-g_1g_2)}} \tag{5-2}$$

多元件腔

$$\theta_{0i,e}^2=\frac{\lambda_0}{\pi L^*}\cdot\frac{\eta^2 g_j^*(L^*/\rho_i)^2+g_i^*(1-g_1^*g_2^*)}{\sqrt{g_1^*g_2^*(1-g_1^*g_2^*)}} \tag{5-3}$$

对于多模:

$$\theta_{mi,e}^2=R^2\frac{\left\{\begin{array}{c}(1-A_iD_i)\{\eta^2(D_i-A_i)^2\\+[4-(A_i+D_i)^2]\}\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}B_i^2[4-(A_i+D_i)^2]\\+\{2d_i(1-A_iD_i)-B_i(D_i-A_i)\}^2\end{array}\right\}} \tag{5-4}$$

简单两镜腔

$$\theta_{mi,e}^2=\frac{\left\{\begin{array}{c}(g_1+g_2-2g_1g_2)[\eta^2g_j(1-g_i)^2\\+g_i(1-g_1g_2)]R^2/L^2\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}g_1g_2(1-g_1g_2)\\+\left[\frac{d_i}{L}(g_1+g_2-g_1g_2)-(1-g_i)g_j\right]^2\end{array}\right\}} \tag{5-5}$$

多元件腔

$$\theta_{mi,e}^2=\frac{\left\{\begin{array}{c}[g_j^*(L^*/\rho_i)^2+g_i^*(1-g_1^*g_2^*)]\\\times[\eta^2g_j^*(L^*/\rho_i)^2+g_i^*(1-g_1^*g_2^*)]R^2/L^{*2}\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}g_1^*g_2^*(1-g_1^*g_2^*)+\left\{\frac{d_i}{L^*}[g_j^*(L^*/\rho_i)^2\\+g_i^*(1-g_1^*g_2^*)]-g_j^*(L^*/\rho_i)\right\}^2\end{array}\right\}} \tag{5-6}$$

(2) 内发散角　与 (4-3)～(4-8) 相同，仅 $\lambda_n=\lambda_0$。

2. 输出镜为平面反射镜

此时 $\rho_i\to\infty$, $\eta_e=1$, $\lambda_e=\lambda_0$

(1) 外发散角

对于基模

$$\theta_{0i,e}^2=\frac{\lambda_0\eta_n}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{1-A_i^2}}{B_i} \tag{5-7}$$

简单两镜腔

$$\theta_{0i,e}^2=\frac{\lambda_0\eta_n}{\pi L}\sqrt{\frac{1-g_j}{g_j}} \tag{5-8}$$

多元件腔

$$\theta_{0i,e}^2=\frac{\lambda_0\eta_n}{\pi L^*}\sqrt{\frac{g_i^*(1-g_1^*g_2^*)}{g_j^*}} \tag{5-9}$$

对于多模

$$\theta_{mi,e}^2=\frac{R^2\eta_n^2}{\frac{B_i^2}{1-A_i^2}+d_i^2} \tag{5-10}$$

简单两镜腔

$$\theta_{mi,e}^2=\frac{\eta_n^2R^2/L^2}{\frac{g_j}{1-g_j}+\left(\frac{d_i}{L}\right)^2} \tag{5-11}$$

多元件腔

$$\theta_{mi,e}^2=\frac{\eta_n^2R^2/L^{*2}}{\frac{g_j^*}{g_i^*(1-g_1^*g_2^*)}+\left(\frac{d_i}{L^*}\right)^2} \tag{5-12}$$

(2) 内发散角

对于基模

$$\theta_{0i,n}^2=\frac{\lambda_0}{\pi\eta_n}\frac{\sqrt{1-A_i^2}}{B_i} \tag{5-13}$$

简单两镜腔

$$\theta_{0i,n}^2=\frac{\lambda_0}{\pi L\eta_n}\sqrt{\frac{1-g_j}{g_j}} \tag{5-14}$$

多元件腔

$$\theta_{0i,n}^2=\frac{\lambda_0}{\pi L^*\eta_n}\sqrt{\frac{g_i^*(1-g_1^*g_2^*)}{g_j^*}} \tag{5-15}$$

对于多模

$$\theta_{mi,n}^2=\frac{R^2}{\dfrac{B_i^2}{1-A_i^2}+d_i^2} \tag{5-16}$$

简单两镜腔

$$\theta_{mi,n}^2=\frac{R^2/L^2}{\dfrac{g_j}{1-g_j}+\left(\dfrac{d_i}{L}\right)^2} \tag{5-17}$$

多元件腔

$$\theta_{mi,n}^2=\frac{R^2/L^{*2}}{\dfrac{g_j^*}{g_i^*(1-g_1^*g_2^*)}+\left(\dfrac{d_i}{L^*}\right)^2} \tag{5-18}$$

比较1、2的结果可知，对一般光学谐振腔，内外发散角是不同的，但当输出镜为平面镜，且 $\eta_n=1$ 时，输出端内、外发散角相等，可不加区分。

3．激光棒端面直接镀膜成镜的谐振腔

这类腔型因具有稳定性好、不需复杂调整等优点，激光加工等应用乐于采用。

此时有 $\eta_e=\eta_s=1$, $\eta_n=\eta_r$（棒折射率），$\lambda_e=\lambda_0, \lambda_n=\dfrac{\lambda_0}{\eta_r}$

(1)外发散角

对于基模

$$\theta_{0i,e}^2=\frac{\lambda_0}{\pi}\cdot\frac{(D_i-A_i)^2+\eta_r^2[4-(A_i+D_i)^2]}{2\eta_r B_i\sqrt{4-(A_i+D_i)^2}} \tag{5-19}$$

简单两镜腔

$$\theta_{0i,e}^2=\frac{\lambda_0}{\pi L}\cdot\frac{g_j(1-g_i)^2+\eta_r^2 g_i(1-g_1g_2)}{\eta_r\sqrt{g_1g_2(1-g_1g_2)}} \tag{5-20}$$

多元件腔

$$\theta_{0i,e}^2=\frac{\lambda_0}{\pi L^*}\cdot\frac{g_j^*(L^*/\rho_i)^2+\eta_r^2 g_i^*(1-g_1^*g_2^*)}{\eta_r\sqrt{g_1^*g_2^*(1-g_1^*g_2^*)}} \tag{5-21}$$

对于多模

$$\theta_{mi,e}^2=R^2\frac{\left\{\begin{array}{l}(1-A_iD_i)\{(D_i-A_i)^2\\+\eta_r^2[4-(A_i+D_i)^2]\}\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}B_i^2[4-(A_i+D_i)^2]\\+\{2d_i(1-A_iD_i)-B_i(D_i-A_i)\}^2\end{array}\right\}} \tag{5-22}$$

简单两镜腔

$$\theta_{mi,e}^2=\frac{\left\{\begin{array}{l}(g_1+g_2-2g_1g_2)[g_j(1-g_i)^2\\+\eta_r^2 g_i(1-g_1g_2)]R^2/L^2\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}g_1g_2(1-g_1g_2)\\+\left[\dfrac{d_i}{L}(g_1+g_2-2g_1g_2)-(1-g_i)g_j\right]^2\end{array}\right\}} \tag{5-23}$$

多元件腔

$$\theta_{mi,e}^2=\frac{\left\{\begin{array}{l}[g_j^*(L^*/\rho_i)^2+g_i^*(1-g_1^*g_2^*)]\\\times[g_j^*(L^*/\rho_i)^2+\eta_r^2g_i^*(1\\-g_1^*g_2^*)]R^2/L^{*2}\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}g_1^*g_2^*(1-g_1^*g_2^*)\\+\left\{\dfrac{d_i}{L^*}[g_j^*(L^*/\rho_i)^2\right.\\\left.+g_i^*(1-g_1^*g_2^*)]-g_j^*(L^*/\rho_i)\right\}^2\end{array}\right\}} \tag{5-24}$$

(2) 内发散角

对于基模

$$\theta_{0i,n}^2=\frac{\lambda_0}{\pi}\cdot\frac{2(1-A_iD_i)}{\eta_r B_i\sqrt{4-(A_i+D_i)^2}} \tag{5-25}$$

简单两镜腔

$$\theta_{0i,n}^2=\frac{\lambda_0}{\pi L\eta_r}\cdot\frac{(g_1+g_2-2g_1g_2)}{\sqrt{g_1g_2(1-g_1g_2)}} \tag{5-26}$$

多元件腔

$$\theta_{0i,n}^2=\frac{\lambda_0}{\pi L^*\eta_r}\cdot\frac{g_j^*(L^*/\rho_i)^2+g_i^*(1-g_1^*g_2^*)}{\sqrt{g_1^*g_2^*(1-g_1^*g_2^*)}} \tag{5-27}$$

对于多模　与(4-6)～(4-8)式相同。

由此可知，这时一般应区分内、外发散角。仅当激光介质 $\eta_r=1$ 时二者才相等。

4．热透镜腔

这是多元件腔的典型例，一般情况可用 g^*-参数表示，发散角公式如节三、四所述。现在考虑 $\rho_1\to\infty$, $\rho_2\to\infty$，透镜厚度等于腔长

L,直接镀膜的特例。此时往返矩阵为[2]

$$M=\begin{vmatrix}\cos 2b & \frac{L}{b}\sin 2b\\ -\frac{b}{L}\sin 2b & \cos 2b\end{vmatrix}$$

式中 $b=\sqrt{\frac{DL}{\eta_r}}$, D、η_r 分别为热透镜的光焦度和折射率。将 $\eta_n=\eta_r$, $\eta_s=\eta_e=1$, $\lambda_n=\frac{\lambda_0}{\eta_r}$, $\lambda_e=\lambda_0$ 和 $d_i=0$(即端面为限模处)代入节三、四公式得

(1) 外发散角　对于基模

$$\theta^2_{0i,e}=\frac{\lambda_0}{\pi}\cdot\frac{\eta_r\sqrt{1-A_i^2}}{B_i}=\frac{\lambda_0}{\pi}\sqrt{\frac{D\eta_r}{L}} \tag{5-28}$$

对于多模:

$$\theta^2_{mi,e}=\frac{\eta_r^2R^2(1-A_i^2)}{B_i^2}=\frac{\eta_rD}{L}R^2 \tag{5-29}$$

(2) 内发散角　对于基模:

$$\theta^2_{0i,n}=\frac{\lambda_0}{\pi\eta_r}\cdot\frac{\sqrt{1-A_i^2}}{B_i}=\frac{\lambda_0}{\pi\eta_r}\sqrt{\frac{D}{\eta_rL}} \tag{5-30}$$

对于多模:

$$\theta^2_{mi,n}=\frac{R^2(1-A_i^2)}{B_i^2}=R^2\frac{D}{\eta_rL} \tag{5-31}$$

由此可知: (1) $\theta_{01}=\theta_{02}$, $\theta_{m1}=\theta_{m2}$, 因为腔参数是完全对称的; (2) $\frac{\theta_{i,e}}{\theta_{i,n}}=\frac{\theta_{0i,e}}{\theta_{0i,n}}=\frac{\theta_{mi,e}}{\theta_{mi,n}}=\eta_r$。

六、数 值 计 算 例

兹以平凹腔为例作计算, 设 S_2 镜 $\rho_2\to\infty$, 激光由 S_1 端输出。

1. 简单两镜平凹腔

由(3-6)、(3-9)、(4-4)、(4-7)式可求得

$$\left(\frac{\theta_{i,e}}{\theta_{i,n}}\right)^2=\left(\frac{\theta_{0i,e}}{\theta_{0i,n}}\right)^2=\left(\frac{\theta_{mi,e}}{\theta_{mi,n}}\right)^2=\frac{\eta_s^2g_j(1-g_i)^2+g_i(1-g_1g_2)}{g_1+g_2-2g_1g_2}\quad(\eta_e=\eta_n=1) \tag{6-1}$$

当 $\rho_2\to\infty$ 时, 由(6-1)式得到

$$\left(\frac{\theta_{1,e}}{\theta_{1,n}}\right)^2=1+(\eta_s^2-1)\frac{L}{\rho_1} \tag{6-2}$$

分别以 ρ_1、L 为参数, $\theta_{01,e}$、$\theta_{01,n}$(归一化值)随 $\xi=\frac{L}{\rho_1}$、$\zeta=\frac{\rho_1}{L}=\frac{1}{\xi}$ 的变化曲线示于图3、4; $\left(\frac{\theta_{1,e}}{\theta_{1,n}}\right)^2$ 随 ξ、ζ 变化曲线示于图5、6(已取 $\eta_s=1.5$),由图可见:

(1) 取 ρ_1 为参数, 在稳定区内, $\left(\frac{\theta_{1,e}}{\theta_{1,n}}\right)^2$

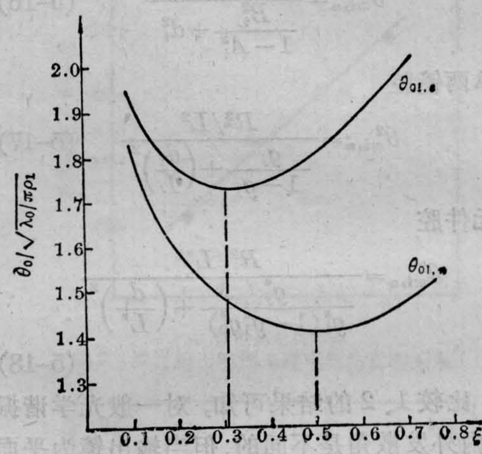

图 3

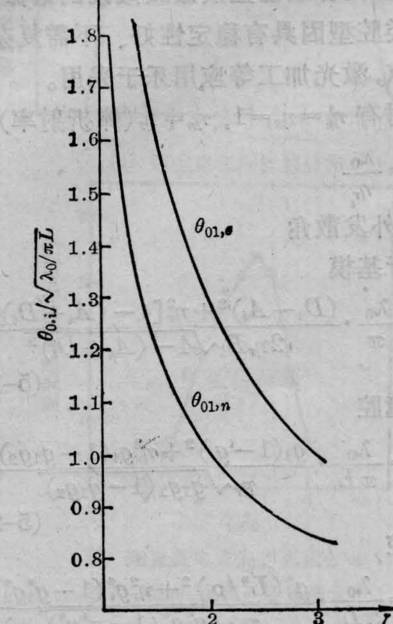

图 4

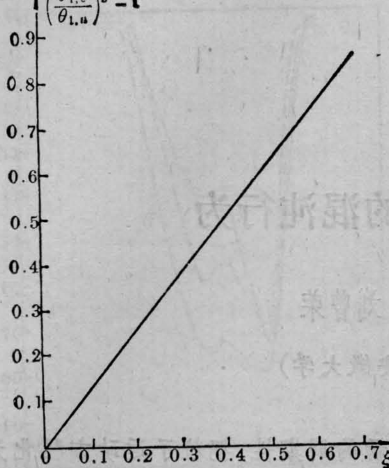

图 5

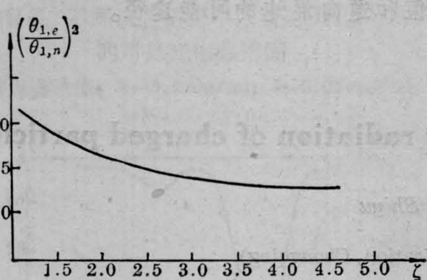

图 6

随 L 增加而线性增加，当 $\rho_1\to L$ 时，$\frac{\theta_{1e}}{\theta_{1n}}\to\eta_s$ $(=1.5)$，因而必须考虑 θ_{1e} 与 θ_{1n} 的差异。当 $L=\rho_1/2$ 时，$\theta_{01,n}$ 取极小值

$$\theta_{01,n}\big|_{\min}=\left(\frac{2\lambda_0}{\pi\rho_1}\right)^{\frac{1}{2}};$$

当 $L=\frac{4}{13}\rho_1$ 时，$\theta_{01,e}$ 取极小值

$$\theta_{01,e}\big|_{\min}=\left(\frac{3\lambda_0}{\pi\rho_1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

即不仅 $\theta_{01,n}$ 与 $\theta_{01,e}$ 的极值不相等，而且还不在同一处达到极值。这说明，仅用 $\theta_{0i,n}$ 不能准确描述高斯光束远场发散角的极值特性。

(2) 取 L 为参数，$\frac{\theta_{1,e}}{\theta_{1,n}}$ 随 ρ_1 增加而单调减小，在极限情况下，$\rho_1\to\infty$（平行平面腔），$\frac{\theta_{1,e}}{\theta_{1,n}}\to1$。并且，$\theta_{1,e}$、$\theta_{1,n}$ 随 ρ_1 增加，都是单调减小的。

2. 多元件平凹腔

由 (3-7)、(3-10)、(4-5)、(4-8) 式可得 $(\eta_n=\eta_e=1)$，

$$\left(\frac{\theta_{i,e}}{\theta_{i,n}}\right)^2=\left(\frac{\theta_{0i,e}}{\theta_{0i,n}}\right)^2=\left(\frac{\theta_{mi,e}}{\theta_{mi,n}}\right)^2=\frac{\eta_s^2g_j^*(L^*/\rho_i)^2+g_i^*(1-g_1^*g_2^*)}{g_j^*(L^*/\rho_i)^2+g_i^*(1-g_1^*g_2^*)}\tag{6-3}$$

以含一个热透镜平凹腔为例，取 $\rho_2\to\infty$，$\rho_1=2\,\text{m}$，$L=1\,\text{m}$，$d_1=d_2=0.5\,\text{m}$，求得临界光焦度 D，临界 g^* 参数和临界状态时 $\frac{\theta_{1,e}}{\theta_{1,n}}$ 的计算值列于表 1。

表 1

临界情况	临界光焦度 D	临界 g^* 参数	$\frac{\theta_{1,e}}{\theta_{1,n}}$
I. $g_1^*\cdot g_2^*=1$	$D_{\mathrm{I}}=-0.67$	$g_{1,\mathrm{I}}^*=0.75$, $g_{2,\mathrm{I}}^*=1.33$	$\eta_s(=1.5)$
II. $g_1^*\cdot g_2^*=0$	$D_{\mathrm{II}}=1.33$	$g_{1,\mathrm{II}}^*=0$, $g_{2,\mathrm{II}}^*=0.33$	$\eta_s(=1.5)$
III. $g_1^*\cdot g_2^*=0$	$D_{\mathrm{III}}=2$	$g_{1,\mathrm{III}}^*=-0.25$, $g_{2,\mathrm{III}}^*=0$	1
IV. $g_1^*\cdot g_2^*=1$	$D_{\mathrm{IV}}=4$	$g_{1,\mathrm{IV}}^*=-1$, $g_{2\mathrm{IV}}^*=-1$	1

$\frac{\theta_{1,e}}{\theta_{1,n}}$ 随光焦度 D 变化示于图 7。

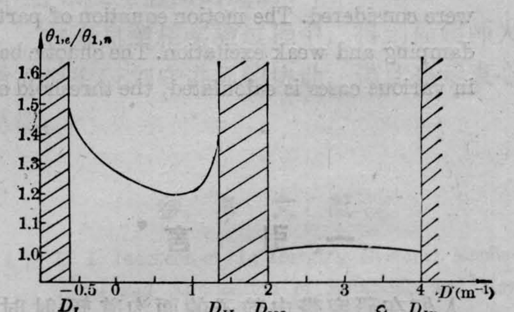

图 7

由此可知：

(1) 因 $\eta_s>1$，由 (6-1)、(6-2)、(6-3) 式得到 $\frac{\theta_{1,e}}{\theta_{1,n}}>1$。

(2) 对多元件腔，$\theta_{1,e}$、$\theta_{1,n}$ 和 $\theta_{1,e}/\theta_{1,n}$ 随光焦度 D 的变化是复杂的，应当根据具体腔

（下转第 459 页）

$$K'=\frac{\pi}{2}\left[1+\frac{1}{4}k'^2+O(k'^4)\right] \quad (32)$$

再注意到双曲余弦的性质，可得

$$\underset{(m\text{充分大})}{R^{n}_{(1)}(\omega)}\to\frac{4}{\pi}\mathrm{ch}\frac{\pi}{2}\omega\left[1-\frac{1}{4}k'^2+O(k'^4)\right]$$
$$<\frac{4}{\pi}\mathrm{ch}\frac{\pi\omega}{2}=R^{\infty}(\omega) \quad (33)$$

可见，在 $\omega\sim R^{\infty}(\omega)$ 平面上，无限次奇阶振荡型次谐分叉的阈值 $R^{n}_{(1)}(\omega)$ 是从 $R^{\infty}(\omega)$ 的下方逼近它的。

(2) 由回转型周期轨道进入混沌状态的可能途径。

类似地，为了讨论回转型周期轨道中产生 $T^{r}=2kK=\frac{2m\pi}{n\omega}$ 的超次谐分叉，可构成和计算如下的 Melnikov 函数：

$$M^{m/n}_{(2)}(\tau_0)$$
$$=\int_0^{nT^r}(-\alpha\zeta+\beta\cos\omega(\tau+\tau_0)\zeta(\tau)d\tau \quad (34)$$

其中 $\zeta(\tau)$ 由式(15)给出。对于 $n=1$，完成上述积分，可得 m 阶次谐分叉的 Melnikov 函数为

$$M^{m/1}_{(2)}(\tau_0)=-\frac{8\alpha}{k}E(K)$$
$$+2\pi\beta\sin\omega\tau_0\,\mathrm{sech}\frac{m\pi K'}{K}$$
$$m=1,\ 2,\ 3\cdots \quad (35)$$

其中利用了 Jacobian 椭圆函数的奇偶性和它的三角函数展开式

$$\mathrm{dn}\tau=\frac{\pi}{2K}+\frac{2\pi}{K}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{q^l}{1+q^{2l}}\cos\frac{l\pi\tau}{K} \quad (36)$$

以及极限(27)。上式中的 q 由式(26)给出。

Melnikov 函数(35)在区间 $\tau\in\left(0,\frac{2\pi m}{\omega}\right)$ 内有简单零点的条件为

$$\beta/\alpha>R^{m}_{(2)}(\omega) \quad (37)$$

式中

$$R^{m}_{(2)}(\omega)=\frac{4E}{\pi k}\mathrm{ch}\frac{m\pi K'}{K} \quad (38)$$

当 ω 一定，$m\to\infty$ 的极限是：

$$\lim_{m\to\infty}R^{m}_{(2)}(\omega)=\frac{4}{\pi}\mathrm{ch}\frac{\pi\omega}{2}=R^{\infty}(\omega) \quad (39)$$

即无限次回转型次谐分叉的阈值趋近于混沌的阈值。用类似上面的讨论还可发现，在 $\omega\sim R^{\infty}(\omega)$ 平面上，无限次回转型次谐分叉的阈值是从 $R^{\infty}(\omega)$ 的下面逼近它的。

以上分析得到的结果表明，在弱阻尼和弱激励情形下，对于充分小的 α_1、β_1 和固定的 ω，当参数 β/α 逐渐增加时，振荡型周期轨道可能通过无限次奇阶次谐分叉进入混沌；而回转型周期轨道则可能通过无限次次谐分叉进入混沌。

参 考 文 献

[1] 罗诗裕，邵明珠；《中国激光》，1984, **11**, No.2, 69。

[2] 罗诗裕，余超凡；《中国激光》，1985, **12**, No.8。

[3] 刘曾荣；“全国非线性系统中的不稳定性与随机性会议”资料，桂林，1984, **11**。

[4] 郝伯林；《物理学进展》，1983, **3**, 329。

(上接第 455 页)

型和选用腔参数，在各稳定区作具体计算和分析。

(3) 当 D、g_i^* 取临界值时，$\frac{\theta_{1,e}}{\theta_{1,n}}$ 的计算值不一定符合实际情况，因为这时高斯光束近似失效。但在趋向临界点附近的稳定区内，高斯光束公式仍是正确的。

参 考 文 献

[1] A. Yariv; “Quantum Electronics”, John Wiley & Sons Inc. (1975), 101.

[2] H. Weber; “Optische Resonatoren”(丘军林，孙荫才编译，华中工学院出版社，1983)

[3] K. P. Driedger, 吕百达, H. Weber; *Opt. Acta*, 1985, **32**, No. 8, 847.

[4] 吕百达，魏光辉；《四川大学学报》，1985, **4**, 58。