中国激光

第14卷　第7期

电子束的发散性对自由电子激光器输出性能的影响

雷仕湛　赵东焕

（中国科学院上海光机所）

提要：研究表明，进入 Wiggler 场的相对论电子束的发散角增大，将降低自由电子激光器的增益，但小量的发散角可提高激光器的输出功率。最大容许的发散角由激光振荡条件决定。

Effect of electron beam divergence on free-electron laser output

Lei Shizhan, Zhao Donghuan

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai)

Abstract: Our research shows that when the divergence of relativistic electron beam entering into the wiggler increases, the gain of the free-electron lasers will be decreased and a small divergent angle will increase the output power. The maximum allowable divergent angle is determined by the laser oscillation conditions.

一、引　言

迄今在讨论自由电子激光器的增益或激光器的输出功率时，一般都认为进入 Wiggler 场的相对论电子束都是严格的平行束，即初始横向运动速度 $v_{\perp 0}=0$。事实上，由于种种原因，进入 Wiggler 场的相对论电子束总是存在一定的发散角。那么这种发散角对自由电子激光器的增益和输出功率会产生什么影响呢？弄清楚这些问题无疑对自由电子激光器的研制是具有一定的现实意义的。本文主要探讨电子束的发散性对自由电子激光器输出性能的影响以及激光器对发散角的限止程度。

二、基本方程

自由电子激光器的增益系数 g 由下式计算[1,2]：

$$g=-\langle\Delta\gamma\rangle m_0c^2\rho_e v 4\pi f(\lambda)/E_0^2 \qquad (1)$$

式中 $f(\lambda)$ 是谱线线型因子，ρ_e 是相对论电子的密度，c 是光速，E_0 是入射光辐射的电场振幅，m_0 是电子的静止质量，$\langle\Delta\gamma\rangle$ 是相对论电子的相对论因子变化量对初相位的平均值，它可以由相对论电子在 Wiggler 场中的洛仑兹力方程和能量方程组成的联立方程组

收稿日期：1986年5月29日。

求得。洛仑兹力方程和能量方程分别由下式表示，

$$\frac{d\gamma}{dt}=-\frac{|e|}{m_0c}\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma\boldsymbol{\beta})=-\frac{|e|}{m_0c}[\boldsymbol{E}+c\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}], \tag{3}$$

式中 γ 是相对论因子，它可表示为

$$\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}, \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{\beta}=\frac{\boldsymbol{v}}{c}$，$\boldsymbol{v}$ 是相对论电子的运动速度，$\boldsymbol{B}$ 是 Wiggler 场中空间周期静磁场，它取下面形式：

$$\boldsymbol{B}=B_0(\cos k_wz,\ \sin k_wz,\ 0), \tag{5}$$

式中 B_0 是磁场振幅，$k_w=2\pi/\lambda_w$，λ_w 是磁场周期长度。$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_r$，$\boldsymbol{E}_r$ 为辐射场电场强度，它表示为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_r=E_0[&\cos(k_rz-\omega_rt+\varphi),\\ &-\sin(k_rz-\omega_rt+\varphi),\ 0],\end{aligned} \tag{6}$$

式中 E_0 是辐射场电场振幅，$k_r=2\pi/\lambda_r$，λ_r 为辐射波长，φ 为辐射场初相位。由于 $\boldsymbol{E}\ll\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}$，则(3)式中的 $\boldsymbol{E}$ 可忽略不计。由(3)式得

$$\frac{d}{dt}(\gamma\beta_x)=\frac{|e|B_0}{m_0}\beta_z\sin k_wz, \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma\beta_y)=-\frac{|e|B_0}{m_0}\beta_z\cos k_wz。 \tag{8}$$

假定进入 Wiggler 场之前电子束有一定的发散性，即入射相对论电子束的初始速度横向分量 v_{x_0}、$v_{y_0}\neq0$，对(7)、(8)两式积分得：

$$\gamma\beta_x-\gamma_0\beta_{x_0}=\frac{|e|B_0}{m_0ck_w}\cos k_wz+c_x, \tag{9}$$

$$\gamma\beta_y-\gamma_0\beta_{y_0}=\frac{|e|B_0}{m_0ck_w}\sin k_wz+c_y, \tag{10}$$

式中 γ_0 为相对论初始因子，$\beta_{x_0}=\frac{v_{x_0}}{c}$，$\beta_{y_0}=\frac{v_{y_0}}{c}$。由(9)、(10)式得

$$\beta_x=\frac{|e|B_0}{\gamma m_0ck_w}\cos k_wz+\frac{\gamma_0}{\gamma}\beta_{x_0}, \tag{11}$$

$$\beta_y=\frac{|e|B_0}{\gamma m_0ck_w}\sin k_wz+\frac{\gamma_0}{\gamma}\beta_{y_0}。 \tag{12}$$

当 $t=0$ 时，$\gamma=\gamma_0$，$z=z_0$。因而上面二式变为

$$\beta_x(0)=\frac{|e|B_0}{\gamma_0m_0c\ k_w}\cos k_wz_0+\beta_{x_0}, \tag{13}$$

$$\beta_y(0)=\frac{|e|B_0}{\gamma_0m_0ck_w}\sin k_wz_0+\beta_{y_0}。 \tag{14}$$

由此得：

$$\begin{aligned}\beta_\perp(0)&=\sqrt{\beta_x^2(0)+\beta_y^2(0)}\\ &\approx A_{\gamma_0}+\beta_{\perp0},\end{aligned} \tag{15}$$

式中 $A_{\gamma_0}=\frac{|e|B_0}{\gamma_0m_0ck_w}=\frac{|e|B_0\lambda_w}{2\pi\gamma_0m_0c}$，

$\beta_{\perp0}=\sqrt{\beta_{x_0}^2+\beta_{y_0}^2}$。

由方程(2)、(3)可解得(1)式中的 $\langle\Delta\gamma\rangle$ 为

$$\begin{aligned}\langle\Delta\gamma\rangle&=\langle\delta\gamma_2\rangle\\ &=\mathscr{A}\left[1-\cos\Delta\psi t-\frac{\Delta\psi t}{2}\sin\Delta\psi t\right]\end{aligned} \tag{16}$$

式中

$$\mathscr{A}=-\left(\frac{e^2B_0E_0}{m_0^2c^2\gamma_0^2k_w}\right)^2\frac{(k_w+k_\gamma)c(1-\beta_z^0)}{\Delta\psi^3}。 \tag{17}$$

$$\Delta\psi=(k_w+k_\gamma)z-\omega_\gamma t \tag{18}$$

其中 $\beta_z^0=\frac{u}{c}$，u 为相对论电子进入 Wiggler 场时的纵向速度。

三、增益线宽

获得稳定增益的辐射波长应满足下式：

$$\frac{d}{dz}\Delta\psi=0。 \tag{19}$$

由(18)式可求得

$$(k_w+k_\gamma)-\omega_\gamma\frac{dt}{dz}=0。 \tag{20}$$

由此可得 $\lambda_\gamma=\frac{\lambda_w(1-\beta_z)}{\beta_z}$， (21)

式中 $\beta_z=\frac{v_z}{c}$，它满足下列关系：

$$\beta_z^2=\beta^2-\beta_\perp^2 \tag{22}$$

由(4)式我们得

$$\beta^2=1-\frac{1}{\gamma^2}。 \tag{23}$$

由(15)式我们有

$$\beta_\perp^2(0)=A_{\gamma_0}^2+2A_{\gamma0}\beta_{\perp_0}+\beta_{\perp_0}^2。 \tag{24}$$

利用(24)式，则当 $t\neq0$ 时我们有：

$$\beta_\perp^2\approx A_\gamma^2+2A_\gamma\beta_{\perp_0}+\beta_{\perp_0}^2。 \tag{25}$$

式中 $A_\gamma=\frac{|e|B_0}{\gamma m_0ck_w}=\frac{|e|B_0\lambda_w}{2\pi\gamma m_0c}$。把(25)、(23)式代入(22)式得

$$\beta_z^2=1-\frac{1}{\gamma^2}(1+q^2)-\frac{2q}{\gamma}\beta_{\perp_0}-\beta_{\perp_0}^2。\tag{26}$$

由于发散性是一个小量,所以 $\beta_{\perp_0}^2$ 可忽略,并结合实际情况 $\gamma\gg1$ 和 $q\approx1$ 故(26)可改为

$$\beta_z\approx1-\frac{1}{2\gamma^2}(1+q^2)-\frac{q}{\gamma}\beta_{\perp_0},\tag{27}$$

式中 $q=\frac{|e|B_0}{m_0ck_w}=\frac{|e|B_0\lambda_w}{2\pi m_0c}$。把 (27) 代入(21),并考虑 $\beta_z\approx1$,得

$$\lambda_\gamma=\frac{\lambda_w}{2\gamma^2}(1+q^2)+\frac{\lambda_w q}{\gamma}\beta_{\perp_0}\tag{28}$$

设 $\lambda_{\gamma_0}=\frac{\lambda_w}{2\gamma^2}(1+q^2)$ 为 $\beta_{\perp_0}=0$ 时相对论电子产生的受激发射波长,我们称它为中心波长。$\varDelta\lambda=(\lambda_\gamma-\lambda_{\gamma_0})$ 为 $\beta_{\perp_0}\neq0$ 时相对论电子产生的受激发射波长与中心波长的间隔,即

$$\varDelta\lambda=\frac{\lambda_w q}{\gamma}\beta_{\perp_0}。\tag{29}$$

设相对论电子的发散角为 $\varDelta\theta$,它与 z 轴成 θ 角传播,于是

$$\beta_{\perp_0}=\beta_0\sin\theta\approx\beta_0\theta。\tag{30}$$

式中 $\beta_0=\frac{v_0}{c}$, v_0 是相对论电子进入 Wiggler 场前的速度。求在 $\varDelta\theta$ 内的波长 λ_γ 变化范围,得增益线宽 $\varDelta\bar{\lambda}$ 为

$$\varDelta\bar{\lambda}=\frac{\lambda_w q}{2\gamma}\beta_0(\varDelta\theta)^2。\tag{31}$$

则

$$\frac{\varDelta\bar{\lambda}}{\lambda_{\gamma_0}}=\frac{\gamma q\beta_0(\varDelta\theta)^2}{(1+q^2)}。\tag{32}$$

例如,假定 $\varDelta\theta=10^{-3}\,\mathrm{rad}$, $q=1$, $\gamma=100$, $\beta_0=0.9991$。由(32)式可求得增益线宽与中心波长的比值为 $\frac{\varDelta\bar{\lambda}}{\lambda_{\gamma_0}}=5\times10^{-5}$。

四、发散角对输出性能的影响

从(31)式我们看到,相对论电子的发散性直接影响着自由电子激光器的单色性,要获得单色性很好的自由电子激光器,对相对论电子束的发散性的要求是相当严格的。

假定相对论电子束的横向速度分布是高斯形,则相应的谱线的形状也取高斯形,(1)式中 $f(\lambda)$ 取下面的形式:

$$f(\lambda)=\frac{a}{\varDelta\lambda}e^{-\left(\frac{\lambda_\gamma-\lambda_{\gamma_0}}{\varDelta\lambda}\right)^2}\tag{33}$$

而谱线中心处的增益 $g(\lambda)$ 是

$$g(\lambda)=\frac{a}{\varDelta\lambda}g_0\tag{34}$$

式中 $g_0=\frac{4e^4B_0^2\lambda_w(1-\beta_z^0)\rho_eV}{(m_0\varDelta\psi)^3c\gamma_0^4}$。(34)式表明,当相对论电子束的发散角为 $\varDelta\theta$ 时,它将导致激光增益系数反比于 $\varDelta\theta$ 的平方而下降。

激光器的输出功率 P_0 是[3]

$$P_0=2I_s(\sqrt{g}-\sqrt{\alpha})^2\tag{35}$$

式中 α 是激光器共振腔内的损耗系数,I_s 是饱和强度,它由下面式子表示:

$$I_s=\frac{b\varDelta\lambda}{a}e^{-\left(\frac{\lambda_\gamma-\lambda_0}{\varDelta\psi}\right)^2}\tag{36}$$

式中 b 是常数,把(36)代入(35)式,我们看到入射电子束有较小的发散角 $\varDelta\theta$ 时对输出功率有利。但是此发散角是受限制的。因为激光器达到振荡,必须单程增益大于或等于单程损耗,所以,最大允许的发散角是

$$(\varDelta\theta)^2\leqslant\frac{(1-R)(1+q^2)}{gal\gamma q\beta_0\lambda_\gamma},\tag{37}$$

l 是相对论电子通过 Wiggler 场的长度,R 是组成共振腔的两块反射镜的反射率(假定激光器共振腔内的损耗主要是反射损失)。由(37)式可看到,对短波长的自由电子激光器,对相对论电子的发散性要求也就越高。

参 考 文 献

[1] W. B. Colson; Physics of Quantum Electronics, **5**, Reading MA: Addison-Wesley, 1978, 157~196.

[2] Lov. K. Grover *et al.*; *IEEE J. Quant. Electr.*, 1985, **QE-21**, No. 7, 944~951.

[3] 赫光生,雷仕湛;"激光器设计基础",1979,上海科学技术出版社。