

电子束被激光行波散射的相对论性经典理论

宋 澳

(中国科学院高能物理研究所)

提要: 在电子间相互作用和电子辐射可忽略的条件下, 得到电子束被激光行波散射的洛伦兹力方程的严格解; 相对论性经典理论预言的角分布可与实验比较。

Relativistic classical theory of scattering of electron beam by laser travelling wave

Song Yu

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract: An exact solution of Lorentz force equation for an electron beam scattered by laser travelling wave is presented on the assumptions that the interaction between electrons and radiation of electrons are negligible. The relativistic classical scattering angular distributions are predicted which may be compared with experiments.

一、引 言

在自由电子激光的研究中, 电子束和激光的相互作用是十分重要的。许多作者在实验上^[1,2]和理论上都研究过电子束和激光驻波的散射。理论方面, 许多作者用了量子力学的处理方法^[3,4], 另一些作者却用经典理论来研究^[5,6]。把理论计算结果和实验比较, 发现量子力学的结果并不令人满意, 而经典理论的结果却和实验符合, 这是什么缘故? 这需要更多的理论工作和实验的比较。

我们选择了一个较简单的情形, 即电子束被激光行波散射, 进行对电子-辐射相互作用的研究。

二、相对论性经典理论

按照下面的假设, 考虑平面电磁波对自由电子运动的影响, 我们来建立相对论性经典理论。

i) 激光行波是相干的线性偏振的平面电磁波, 没有角散度, 而且是单色的;

ii) 入射电子束是单能的, 亦没有能散度;

iii) 激光光强足够大, 相比之下电子间相互作用、电子的辐射以及辐射反作用均可忽略不计。

收稿日期: 1986年5月19日。

1. 电子在激光行波中的运动

按照前述假定, 电子在激光行波中的运动由洛伦兹力方程决定,

$$mc \frac{d\gamma\beta}{dt} = e\mathbf{E} + e\beta \times \mathbf{H} \quad (1)$$

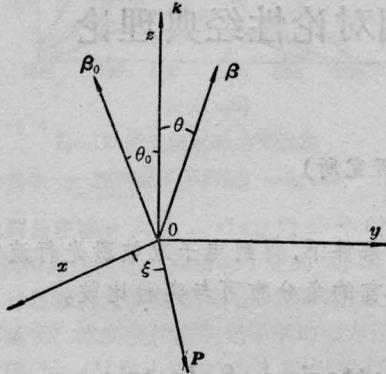


图1 电子在激光行波中的偏转

其中 $\beta = v/c$, m , e 分别为电子的速度、静止质量和电荷; c 是光速, 而 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 是相对论因子; \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 是激光电场和磁场。相互作用图如图1所示。 \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} 是 x , y , z 轴方向的单位矢量。设激光行波方向为 \mathbf{k} , 则激光极化矢量 \mathbf{P} 在 x, y 平面上, \mathbf{P} 与 x 轴夹角为 ξ ; 电子初始速度为 $c\beta_0$, β_0 与 z 轴夹角是 θ_0 ; 电子速度是 $c\beta$, β 与 z 轴夹角为 θ 。这样, 超前波为

$$\mathbf{E} = P\mathbf{E}_0 \sin(\omega\tau + \varphi) \quad (2a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (2b)$$

$$\tau = t - z/c \quad (3)$$

式中 ω 是激光的角频率, φ 是初始位相。

把 $c\beta$ 点乘(1)式, 它的标积就是能量方程,

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{e}{mc} \beta \cdot \mathbf{E} \quad (4)$$

把关系式

$$\beta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{P}) = \mathbf{k}(\beta \cdot \mathbf{P}) - \mathbf{P}(\beta \cdot \mathbf{k}) \quad (5)$$

代入(1)式得动量方程,

$$\frac{d\beta\gamma}{dt} = \frac{e}{mc} \mathbf{E} + \frac{e}{mc} \mathbf{k}(\beta \cdot \mathbf{E})$$

$$- \frac{e}{mc} (\beta \cdot \mathbf{k}) \mathbf{E} \quad (6)$$

在三个坐标轴上的投影分别为:

$$\frac{d\beta_x\gamma}{dt} = \frac{eE_0}{mc} \cos \xi (1 - \beta_z) \sin(\omega\tau + \varphi) \quad (7a)$$

$$\frac{d\beta_y\gamma}{dt} = \frac{eE_0}{mc} \sin \xi (1 - \beta_z) \sin(\omega\tau + \varphi) \quad (7b)$$

$$\frac{d\beta_z\gamma}{dt} = \frac{e}{mc} \mathbf{E} \cdot \beta \quad (7c)$$

2. 解能量方程和动量方程

把(4)和(7c)相减得到

$$\frac{d}{dt} (\gamma(1 - \beta_z)) = 0$$

积分后得到

$$\gamma(1 - \beta_z) = \gamma_0(1 - \beta_{z_0}) \quad (8)$$

γ_0 和 β_{z_0} 是 γ 和 β_z 的初始值。

把 $\frac{d\tau}{dt} = 1 - \beta_z$ 代入(7a)和(7b)中得到

$$\frac{d\beta_x\gamma}{d\tau} = \frac{eE_0}{mc} \cos \xi \sin(\omega\tau + \varphi) \quad (9a)$$

$$\frac{d\beta_y\gamma}{d\tau} = \frac{eE_0}{mc} \sin \xi \sin(\omega\tau + \varphi) \quad (9b)$$

对(9a)、(9b)积分后得到

$$\beta_x\gamma = \beta_{x_0}\gamma_0 + \frac{eE_0}{\omega mc} [-\cos(\omega\tau + \varphi) + \cos(\omega\tau_0 + \varphi)] \cos \xi \quad (10a)$$

$$\beta_y\gamma = \beta_{y_0}\gamma_0 + \frac{eE_0}{\omega mc} [-\cos(\omega\tau + \varphi) + \cos(\omega\tau_0 + \varphi)] \sin \xi \quad (10b)$$

$t=0$ 时 $\tau = \tau_0 = -z_0/c$ 。

把(2a)代入(4)中得到

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{eE_0}{mc} \beta \cdot \mathbf{P} \sin(\omega t + \varphi) \quad (11)$$

乘上 $\gamma(1 - \beta_z)$, 利用(8)、(10a)和(10b)等关系就得到

$$\begin{aligned} \gamma_0(1 - \beta_{z_0}) \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{eE_0}{mc} \\ &\times \gamma_0\beta_0 \cdot \mathbf{P} \sin(\omega\tau + \varphi) (1 - \beta_z) \\ &+ \frac{e^2 E_0^2}{m^2 c^2 \omega} \\ &\times \cos(\omega\tau_0 + \varphi) \sin(\omega\tau + \varphi) (1 - \beta_z) \end{aligned}$$

$$-\frac{e^2 E_0^2}{2m^2 c^2 \omega} \sin(2(\omega\tau + \varphi))(1 - \beta_z) \quad (12)$$

方程(12)的解为

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= A + B \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \varphi\right) \\ &\quad + C \cos\left(2\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \varphi\right)\right) \\ A &= \gamma_0 + \frac{\varepsilon}{1 - \beta_{z_0}} \beta_0 \cdot \mathbf{P} \cos \alpha \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{\gamma_0(1 - \beta_{z_0})} \left(\cos^2 \alpha - \frac{1}{4} \cos 2\alpha\right) \\ B &= -\frac{\varepsilon}{1 - \beta_{z_0}} \left(\beta_0 \cdot \mathbf{P} + \frac{\varepsilon}{\gamma_0} \cos \alpha\right) \\ C &= \frac{1}{4} \frac{\varepsilon^2}{\gamma_0(1 - \beta_{z_0})} \\ \varepsilon &= \frac{eE_0}{mc\omega} \\ \alpha &= -\omega z_0/c + \varphi \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

这个解表明电子的能量随 z 、 t 的变化。

现在讨论 γ 的变化。令 $\alpha \rightarrow \alpha + 2n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$ 。 γ 的系数 A 、 B 、 C 是常数。所以在束流中, 凡是初始位置 z_0 之差为 $2\pi nc/\omega$ 的那些电子, 在同样的时刻 t 它们的能量都相等。

利用(8)、(13)和关系式 $\frac{d\tau}{dt} = 1 - \beta_z$, 得到

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= \frac{\gamma_0(1 - \beta_{z_0})}{A + B \cos(\omega\tau + \varphi) + C \cos(2(\omega\tau + \varphi))} \end{aligned} \quad (14)$$

如(13)式所示, A 、 B 、 C 和电子的初始位置有关系。(14)式的解是:

$$\begin{aligned} &[\gamma_0(1 - \beta_{z_0}) - A]t + \frac{A}{C}(z - z_0) \\ &= \frac{B}{\omega} [\sin(\omega(t - z/c) + \varphi) \\ &\quad - \sin(-\omega z_0/c + \varphi)] \\ &\quad + \frac{C}{2\omega} [\sin(2(\omega(t - z/c) + \varphi)) \end{aligned}$$

$$- \sin(2(-\omega z_0/c + \varphi))] \quad (15)$$

方程(15)是 z 、 t 的隐函数, 独立变数 t 是激光行波和电子束的相互作用时间。对于无穷宽的电子束和激光束, 它可以扩展至无穷, 但方程式(15)的右边对任意的 t 和 z 都是有界的。方程(15)可以重写为:

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \left[1 - \frac{\gamma_0(1 - \beta_{z_0})}{A}\right]ct \\ &\quad + \frac{cB}{A\omega} [\sin(\omega(t - z/c) + \varphi) \\ &\quad - \sin(-\omega z_0/c + \varphi)] \\ &\quad + \frac{cC}{2\omega A} [\sin(2(\omega(t - z/c) + \varphi)) \\ &\quad - \sin(2(-\omega z_0/c + \varphi))] \end{aligned} \quad (16)$$

因为 t 是正的, 如果

$$1 - \frac{\gamma_0(1 - \beta_{z_0})}{A} > 0 \quad (17)$$

则 $z - z_0$ 是一个 t 的单调上升函数加上一个周期函数。满足条件(17)的电子将一方面作振动运动, 一方面沿 $+z$ 方向传播。

如果

$$1 - \frac{\gamma_0(1 - \beta_{z_0})}{A} < 0 \quad (18)$$

则 $z - z_0$ 是一个 t 的单调下降函数加上一个周期函数, 满足条件(18)的电子将一面振动一面向后 ($-z$ 轴方向) 运动。

如果

$$1 - \frac{\gamma_0(1 - \beta_{z_0})}{A} = 0 \quad (19)$$

则 $z - z_0$ 是 t 的纯周期函数。满足(19)式的电子将总是绕着初始位置 z_0 作周期运动。

现在我们进一步研究条件(19)。方程(19)可以重写为:

$$\begin{aligned} \gamma_0 \beta_{z_0} (1 - \beta_{z_0}) &= -\varepsilon \beta_0 \cdot \mathbf{P} \cos(-\omega z_0/c + \varphi) \\ &\quad - \frac{\varepsilon^2}{\gamma_0} [\cos^2(-\omega z_0/c + \varphi) \\ &\quad - \frac{1}{4} \cos(2(-\omega z_0/c + \varphi))] \end{aligned} \quad (20)$$

由于 ε 太小, 明显地看出(20)式仅在小的 $\gamma_0 \beta_{z_0}$ 值时才成立, 即速度几乎和 z 轴垂直时

才成立。

若 $|\varepsilon\beta_0 \cdot \mathbf{P}| \geq \gamma_0\beta_{z_0}(1-\beta_{z_0})$, 初始位置满足(20)式要求的电子将围绕初始位置 z_0 运动, 别的电子将按其初始条件不同而朝前或朝后运动。因此前者形成“束团”, 后者将离去。虽然在发生相互作用以前它们原来是连续分布着的, 我们称这现象为“束团效应”。在电子束被激光驻波散射过程中也有类似现象。

若 t 足够小, 方程(16)后边第一项往往可以忽略而不管能量如何, 所以 $z-z_0$ 近似地为 t 的周期函数。电子的行为接近“束团效应”, 而不管(19)式的要求是否满足。

3. 在激光行波中电子束的偏转

电子位置 z 的函数是一个隐函数, 它可以用叠代法解出来, 从而 γ 函数、 β_x 、 β_y 、 β_z 和 θ 就可以随之而确定。为简便计, 令电子的初速 $c\beta_0$ 在激光行波的线偏振面上, 这样 $\beta_{10} = \beta_0 \sin \theta_0 = \beta_0 \cdot \mathbf{P} = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}$; 令激光束初位相 φ 为 0。

激光的参数选择如下。

CO₂ 激光: 波长 $\lambda = 10.6 \mu\text{m}$; 激光束直径 $D = 2 \text{ cm}$; 激光功率 $P = 5 \times 10^9 \text{ W}$; 电场振幅 $E_0 = 1.096 \times 10^8 \text{ V/m}$; 圆频率 $\omega = 1.77703 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$; $\varepsilon = 0.36098 \times 10^{-3}$ 。

当电子能量为 1 MeV 时,

$$\theta_0 = \arccos(10^{-4}) = 1.5706964 \text{ rad.}$$

方程(19)的要求在 $\alpha_0 = \alpha_{0c} = -z_{0c}\omega/c = -0.9978989 \text{ rad}$ 时满足, 于是产生“束团效应”; 当 α_0 大于或小于 α_{0c} 时, 产生了周期运动加上单调上升或单调减少的运动。这些结果都简略表示在图 2 上。

相互作用时间为 $t = D/\beta_0 c = 0.7761106 \times 10^{-10} \text{ s}$ 时, 偏转角如图 4 所示。

令 δ 为探测器分辨本领。因为已假设电子沿着 z 轴是均匀分布的, 在 θ (偏转角) 处偏转进入 δ 中那部分电子所占比率等于在整个分布曲线上从 $\theta - \frac{1}{2}\delta$ 到 $\theta + \frac{1}{2}\delta$ 对应的 $\Delta\alpha_0$

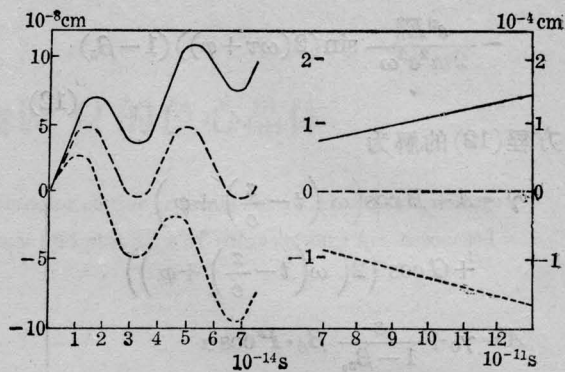


图 2 不同初始 α_0 的 1 MeV 电子被激光行波散射后的 $z-z_0$ 函数图

— $\alpha_0 = -1.256637 \text{ rad}$
 --- $\alpha_0 = \alpha_{0c} = -0.9978989 \text{ rad}$
 ... $\alpha_0 = -0.6283134$

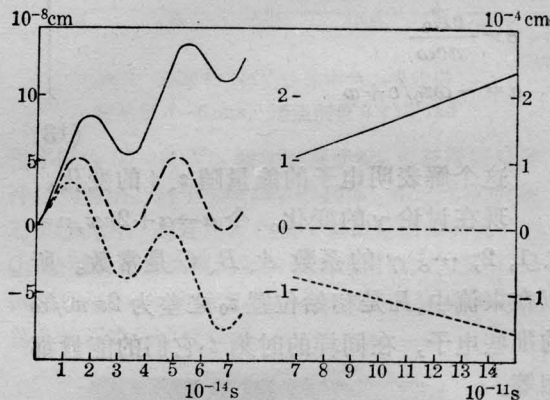


图 3 不同初始 α_0 的 0.6 MeV 电子被激光行波散射后的 $z-z_0$ 函数图

— $\alpha_0 = -1.5707963 \text{ rad}$
 --- $\alpha_0 = \alpha_{0c} = -1.2395169 \text{ rad}$
 ... $\alpha_0 = -0.9978989 \text{ rad}$

的总贡献所占的比率^[6], 即

$$P(\theta)\delta = (\Delta N/N) = \sum \left[\Delta\alpha_0 \right]_{\theta - \frac{1}{2}\delta}^{\theta + \frac{1}{2}\delta} / 2\pi \quad (21)$$

这里 \sum 表示对 $[0, 2\pi]$ 区间上不同的 α_0 求和, 在这些 α_0 处的电子均散射到 $\theta \pm \frac{1}{2}\delta$ 内。

(21)式确定了偏转几率的角分布曲线。1 MeV 电子束的角分布曲线如图 5 所示。

对于 0.6 MeV 的电子束, 入射角 $\theta_0 = \arccos(10^{-4})$, $\alpha_{0c} = -1.2395169 \text{ rad}$ 。它的

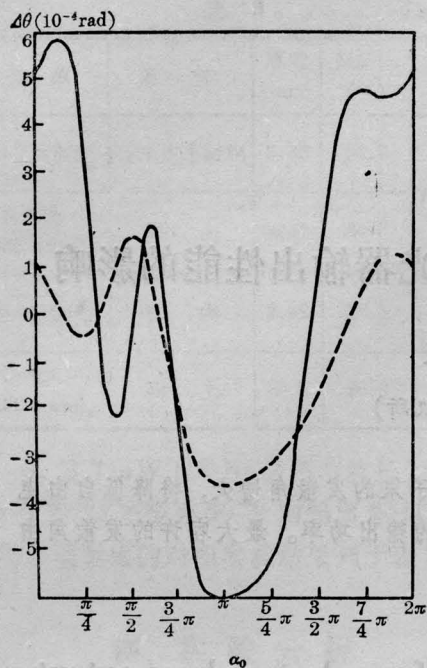


图4 初始条件为 $0 \leq \alpha_0 \leq 2\pi$ 时电子偏转的经典预言

$\Delta\theta = \theta - \theta_0$, 入射角 $\theta_0 = \arccos(10^{-4}) = 1.570694$ rad;
 — 电子能量 = 0.6 MeV,
 相互作用时间 $t = 1.273 \times 10^{-10}$ s;
 ... 电子能量 = 1 MeV,
 相互作用时间 $t = 0.77611 \times 10^{-10}$ s

$z - z_0$ 函数、电子束偏转角对 α_0 曲线和偏转几率角分布曲线分别画在图3、图4和图5上。

和前述的讨论一致,在图2和图3中明显地看出“束团效应”。在图5中可看到0.6 MeV和1 MeV电子束的角分布几率上都有许多尖锐的峰值,这些峰值是由图4上偏转

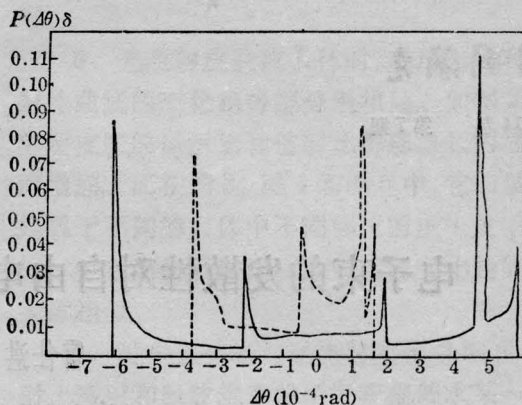


图5 电子偏转几率的角分布曲线 ($\delta = 10^{-5}$ rad)

— 电子能量 = 0.6 MeV,
 相互作用时间 $t = 1.273 \times 10^{-10}$ s;
 ... 电子能量 = 1 MeV,
 相互作用时间 $t = 0.77611 \times 10^{-10}$ s

曲线上缓慢变化的极大值和极小值引起的。

对于高能电子束,需要更高的 ε 值(大功率或低频率)才能产生“束团效应”。

作者感谢沈鼎昌教授的有益讨论。

参 考 文 献

- [1] L. S. Bartell *et al.*; *Phys. Rev.*, 1968, **166**, 1494.
- [2] H. Schwar; *Phys. Lett.*, 1973, **43A**, 457.
- [3] Gush and H. P. Gush; *Phys. Rev.*, 1971, **D3**, 1712.
- [4] H. Delang; *Opt. Commun.*, 1971, **4**, 191.
- [5] Y. W. Chan; *Phys. Lett.*, 1969, **30A**, 270, 471; 1970, **32A**, 214; **33A**, 245; 1977, **62A**, 21.
- [6] Y. W. Chan, W. L. Tsui; *Phys. Rev.*, 1979, **20A**, 294.

上海市激光学会召开'87年会

1987年5月14日至16日,上海市激光学会在上海市科学会堂召开1987年学术报告会。本届年会的筹备工作是由上海市激光学会理事会委托上海交通大学应用物理系承办的。

本次年会共收到稿件171篇,经11个单位的25位专家审稿后,正式采用了155篇。会议中实际作报告134人次。年会共分激光医学、激光应用、激光器件、信息光学和应用光学四个分会场,有1000多

人次听取了学术报告。与会代表对激光应用方面的报告特别感兴趣,这是一个很好的势头,我们希望能有更多的激光技术应用到国民经济各部门中去。

在这次年会上,还邀请到诺贝尔奖金获得者N.布隆伯根教授作学术报告,这是上海市激光学会历年活动中比较重要的一次活动。

(邵兰星)