

带电粒子的准沟道辐射

邵明珠 罗诗裕

(重庆交通学院)

提要: 引入新的相互作用势——正弦平方势,并从运动方程的旋转周期解出发,解析地处理了带电粒子的准沟道辐射。讨论了这种辐射与沟道辐射的区别,计算了它对总辐射强度的贡献。

Quasi-channeling radiation for charged particles

Shao Mingzhu, Luo Shiyu

(Institute of Chongqing Communication, Chongqing)

Abstract: In the paper a new sine-squared potential is introduced to describe the quasi-channeling radiation for charged particles by rotational period solution of the particle motion equation, the difference between quasi-channeling and channeling radiation is discussed, and the contribution of the quasi-channeling radiation to total radiation intensity is calculated.

一、引言

自从 Kumakhov 发现沟道辐射以来^[1],人们进行了大量的理论分析和实验研究,结果表明,即使在理想情况下,也只有 1/3 左右的粒子是沟道粒子,其余的一部分粒子可穿越沟道作周期运动,其轨道具有周期特征;另一部分粒子在晶体内部作无规运动。我们把前者称为准沟道粒子,后者称为随机粒子。由于这些粒子在晶格场中也具有不为零的加速度,由电动力学可知,它们也将自发地向外辐射电磁波。随机粒子对辐射的贡献是提供一个连续的本底辐射,而准沟道粒子仍具有沟道辐射的若干特征,对沟道辐射的谱分布有

着明显的贡献。但是,由于常用的粒子-晶体相互作用势的复杂性,人们还不能对它进行严格的理论处理,而只对它进行定性的分析。本文利用我们曾引入的正弦平方势,把粒子运动方程化为摆方程,并从方程的旋转周期解出发讨论了准沟道辐射问题。

二、辐射谱分布

注意到准沟道粒子的辐射方向不再是沟道方向,但主要部分仍集中在粒子运动方向上,且与它的横向能量有关。鉴于沟道辐射大部分都集中在沟道方向附近角宽 $\Delta\theta \sim 1/r$

收稿日期:1985年9月15日;收到修改稿日期:1986年6月23日。

范围内,因此,关于准沟道粒子对沟道辐射的贡献,只需考虑运动轨道(方向)位于沟道方向附近的那一部分粒子即可。对于这部分准沟道粒子的辐射谱密度仍可表示为^[2]

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{e^2}{c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{|\dot{\beta}_{lx}|^2 \omega}{l^2 \Omega^2} \times (1-2u+2u^2) \eta(\omega_l - \omega) \quad (1)$$

式中 c 是光速, e 是电子电荷, $\eta(\omega_l - \omega)$ 是阶跃函数, ω 是辐射频率, ω_l 是 l 次谐波的最大辐射频率,且

$$\omega_l = 2l\Omega_0\gamma^{3/2}, \quad \Omega = \Omega_0\gamma^{-1/2}, \quad u = \omega/\omega_l \quad (2)$$

Ω_0 是惯性系中粒子振动频率, $\dot{\beta}_{lx}$ 是粒子横向加速度 $\dot{\beta}_x$ 的傅里叶分量,即

$$\dot{\beta}_{lx} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{\beta}_x(t) e^{i\omega_l t} dt \quad (3)$$

式中 $\beta_x = v_x/c$, v_x 是粒子的横向速度。

由式(1-3)可以看出,只要 $\dot{\beta}_{lx}$ 和 Ω 已知,则问题就基本解决。而这两个量是直接和运动方程有关的。于是问题归结为寻找运动方程的解和粒子振动周期。

三、运动方程及其旋转周期解

引入正弦平方势,可将面沟道粒子的运动方程化为标准的摆方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= \zeta \\ \dot{\zeta} &= -\sin \xi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中 $\dot{\xi} = d\xi/d\tau$, 而

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 2\alpha X, \quad X = \frac{2}{d_p} x, \\ \tau &= \frac{2v}{d_p} \sqrt{\delta} t, \quad \delta = t^2 \alpha^2 \beta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\epsilon^2 = K/m_0 c^2 \gamma, \quad K = \pi Z_1 Z_2 e^2 N d_p^2 \quad (6)$$

X 是粒子偏离沟道中心的距离; d_p 是晶面间距; Z_1 、 Z_2 是入射粒子和晶体原子的原子序数; $N d_p$ 是晶体原子面密度; m_0 是入射粒子的静止质量; γ 是相对论因子; α 和 β 是无量纲的正弦平方势

$$W_s(X) = \beta \sin^2 \alpha X \quad (7)$$

中的两个参数。

对相柱面的分析发现,系统(4)在相柱面上有一个中心(0, 0)和一个双曲型鞍点(π , 0)或($-\pi$, 0)(在相柱面上这两点重合)。方程(4)是一个哈密顿系统,相应的哈密顿量为

$$H = \zeta^2/2 + (1 - \cos \xi) = h \quad (8)$$

式中 h 是积分常数,由系统的初值决定。根据 h 的大小,可将相柱面的轨道分为三类。

(1) $h=2$

相应的轨道称为分界线,又称同宿轨道,它描写了系统的临界状态,并把相柱面分成了两个区域。同宿轨道由方程

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \pm \operatorname{arctg}(\operatorname{sh}\tau) \\ \zeta &= \pm 2 \operatorname{sech}(\tau) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

描写,相应的周期为无穷。当有扰动存在时,与这条同宿轨道对应的系统可能出现 chaos 行为。

(2) $0 < h < 2$

对应相柱面上围绕中心(0, 0)的一簇振荡型周期轨道,相应的解为

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 2 \operatorname{arcsin}(k \operatorname{sn}\tau) \\ \zeta &= 2k \operatorname{cn}\tau \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中 $k^2 = h/2$, $\operatorname{sn}\tau$ 、 $\operatorname{cn}\tau$ 为 Jacobian 椭圆函数,周期由下式

$$\tau^0 = 4K(k) \quad (11)$$

给出,上标 0 表示 τ 为描写沟道特征的物理量,简称沟道量(下同), $K(k)$ 为第一类全椭圆积分。当 h 单调增加时,周期轨道逐渐向同宿轨道逼近,相应周期则逐渐由 2π 增加到无穷。

(3) $h > 2$

对应相柱面上两簇旋转型周期轨道,相应的解为

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \pm \operatorname{arcsin}(\operatorname{sn}\tau/k^q) \\ \zeta &= \pm \frac{2}{k} \operatorname{dn}(\tau/k^q) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中 $k^q = (2/h)^2$, $\operatorname{dn}(\tau/k^q)$ 为 Jacobian 椭圆函数,其周期为

$$\tau^q = 2k^q K(k^q) \quad (13)$$

上标 q 表示 τ 为描写准沟道特征的物理量,

简称准沟道量(下同)。当 h 减小时, 旋转周期轨道逐渐向同宿轨道逼近, 相应的周期由零逐渐增加到无穷。

由式(10)和(11)可讨论带电粒子的沟道辐射^[3], 由式(12)和(13)可讨论带电粒子的准沟道辐射, 我们将对此感兴趣。值得注意的是, 本文将准沟道辐射同系统的旋转周期解相联系, 使问题大为简化, 同时对准沟道辐射的处理也提供了一个可行的分析方法。

四、准沟道辐射

我们从旋转周期解出发, 讨论带电粒子的准沟道辐射。由式(13)和(6), 可将无量纲的振动周期 τ^a 化为以时间为单位的振动周期 T

$$T^a = \frac{d_p k^a}{\sqrt{\delta} v} K(k^a) \quad (14)$$

由式(12)和(6)可得无量纲的粒子横向加速度

$$\beta_a = \frac{1}{c} \frac{dx}{dt} = (\sqrt{\delta} / \alpha k^a) \operatorname{dn} \left(\frac{2\sqrt{\delta} v}{k^a d_p} t \right) \quad (15)$$

将式(14)、(15)代入式(3), 完成积分后, 再利用椭圆函数 $\operatorname{dn}(2Ku)$ 的傅里叶展开

$$\operatorname{dn}(2Ku) = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1^n}{1+q_1^{2n}} \cos 2n\pi u \quad (16)$$

式中

$$q_1 = e^{-\pi K'/K}, \quad K' = K(k'), \quad k'^2 = 1 - k^2 \quad (17)$$

并利用关系式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n\pi}{(m-n)\pi} = \delta_{n,m} \quad (18)$$

即可把横向加速度的傅里叶分量表示为

$$\beta_{ix} = i(-1)^i \frac{2\pi \sqrt{\delta} c_2}{\alpha k^a T c_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1^n n}{1+q_1^{2n}} \delta_{n,2i} \quad (19)$$

式中

$$c_1 = \frac{2\sqrt{\delta} v}{k^a d_p}, \quad c_2 = l\Omega \quad (20)$$

从式(1)可以看出, l 可取 $(1, \infty)$ 区间上的任一整数, 但考虑到辐射谱密度随谐波数的增加成平方反比规律减小, 对于高次谐波的贡献常被本底辐射淹没。因此, 一般情况下, l 只取少数几个值。事实上, 对于我们关心的准沟道辐射只取 $l=1$ 。

五、结果和讨论

我们以正电子为例, 讨论它在硅晶体中的准沟道辐射。选择与入射粒子有关的参数为 $Z_1=1, k^a=0.5$, 能量为 5 GeV ; 与晶体有关的参数 $Z_2=14, N=4.97 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}, d_p=0.192 \text{ nm}$; 与正弦平方势有关的参数 $\beta=0.2, \alpha=\pi/2$, 由此可算出 $K=115 \text{ eV}$

(1) 准沟道辐射和沟道辐射能量

由式(6)、(12)和(13), 可将准沟道粒子和沟道粒子的频率(或能量)比 G 表示为

$$G = 2K(k^c) / k^a K(k^a) \quad (21)$$

上式表明, 对于不同的 k^c 和 k^a , G 值可大于 1, 等于 1 或小于 1。这说明准沟道辐射的能量可能比沟道辐射大, 也可能比沟道辐射小, 这一结论与文[4]估计的不同。文[4]指出, 在相互作用势的抛物线近似下, 准沟道辐射的能量至少比沟道辐射大 2 倍, 其原因是文[4]人为地定义了准沟道粒子的运动周期为沟道粒子在相邻晶面之间的飞行时间

$$T^c = \left(\frac{E}{2} \right)^{1/2} \int_{-d_p/2}^{d_p/2} \frac{dx}{\sqrt{E_a - V(x)}} \quad (22)$$

式中 E_a 是横向能量, 而这一定义我们认为欠妥的。本文引入正弦平方势, 自然导出了准沟道粒子的振动周期。分析表明, 仅当我们考查同宿轨道附近的沟道粒子和准沟道粒子时, 它们的能量关系才有文[4]所指出的结果。

(2) 横向速度的平均值

对于沟道辐射, 无量纲的横向速度平均

值为

$$\langle \beta_x^0 \rangle = \frac{1}{T^0} \int_{-T^0/2}^{T^0/2} 2k^0 \text{cn} r dt = 0 \quad (23)$$

对于准沟道辐射, 则有

$$\begin{aligned} \langle \beta_x^q \rangle &= \frac{1}{T^q} \int_{-T^q/2}^{T^q/2} \frac{2}{k^q} \text{dn}(\tau/k^q) dt \\ &= \pi/2k^q K(k^q) \end{aligned} \quad (24)$$

其中我们利用了关系式

$$\left. \begin{aligned} \text{sn}(-u) &= -\text{sn} u, & \text{sn}(u+2K) &= -\text{sn} u \\ \text{dn}(-u) &= \text{dn} u & \text{dn}(u+2K) &= \text{dn} u \\ \text{sn} 0 &= 0 & \text{dn} 0 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式(23)、(24)表明, 准沟道粒子和沟道粒子的明显差别在于它们横向速度的平均值不为零^[3, 5, 6], 这一结论与文[2]一致。值得注意的是, 本文引入正弦平方势后, 自然导出了式(24)。

(3) 辐射谱分布

在我们选择的一组参数下, 求得准沟道辐射的最大能量为 153 MeV。取 $l=1$, 式(19)中的 $n=2$ 。由式(1)可导出无量纲的辐射谱分布为

$$\begin{aligned} f(\omega/\omega_l) &= \frac{dI}{d\omega} \Big/ \frac{e^2}{c} \frac{|\beta_{1x}|^2}{\Omega^2 \omega_l} \\ &= \frac{\omega}{\omega_l} (1-2u+2u^2) \eta(\omega_l-\omega) \\ &= \frac{\hbar\omega}{\hbar\omega_l} (1-2u+2u^2) \eta(\omega_l-\omega) \end{aligned} \quad (26)$$

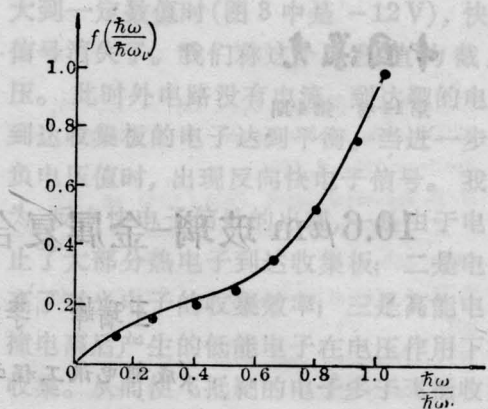


图1 准沟道辐射的相对谱分布

图1给出了 $f(\omega/\omega_l)$ 与 $\hbar\omega/\hbar\omega_l$ 之间的函数关系。计算表明, 当我们选择 $k^0=0.5$ 时, 发现准沟道辐射的能量是沟道辐射能量的 2.4 倍, 而辐射谱密度的强度则要低一个量级左右。

参 考 文 献

- [1] Kumakhov M. A.; *Phys. Lett.*, 1976, **57A**, No. 1, 17.
- [2] Beloshitsky V. V., Komarov F. F.; *Phys. Reports*, 1982, **93**, No. 3, 117.
- [3] 罗诗裕, 邵明珠; 《中国激光》, 1984, **11**, No. 2, 69.
- [4] Bazylev V. A. et al.; *Radiation Effects*, 1981, **56**, No. 1~2.
- [5] 罗诗裕, 余超凡; 《中国激光》, 1985, **12**, No. 8, 449.
- [6] 罗诗裕; 《物理》, 1983, **12**, No. 1, 6.

简讯

一九八七年夏季新材料及材料青年学术讨论会

会议于 1987 年 8 月 25 至 28 日在上海举行。凡 35 岁以下的青年科学工作者, 在工程陶瓷、高性能无机结构材料、功能材料及器件等方面的工作, 均可

在 4 月 31 日前向“青年学术讨论会筹备组”报名, 地址: 上海市岳阳路 319 号 22 号楼 419 室。5 月底前将 1000 字论文摘要寄筹备组。(顺一洪)