中国激光
第14卷 第3期

变参数自由电子激光器的研究

秦克琪 陈建文 雷仕湛 王润文

（中国科学院上海光机所）

提要：在单粒子模型基础上用一种简便的能量模型计算了变参数 Wiggler 自由电子激光器的增益。结果表明，周期磁场振幅沿 z 方向增加，或空间周期长度沿 z 变化都可以提高增益。但前者比后者的效果更明显。

Research on variable peiode Wiggler free electron lasers

Qin Keqi, Chen Jianwen, Lei Shizhan, Wang Runwen

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai)

Abstract: Using a new energy model, the gain equaitons of exponential gradient amplitude and variable period Wiggler free electron lasers are obtained on the basis of single particle model. The results show that FEL gain will increase when amplitude and period of the magnetic field increase along the z direction.

一、引　言

相对论电子束通过纵向变周期或变振幅的 Wiggler 场，在一定条件下可使更多的电子更有效地被俘获在光学包络 (bucket) 内，从而有效地提高了相对论电子与辐射场的能量转换率[1~3]。但这些计算一般都比较复杂，未能给出直观的解析表达式。本文试图采用一种较为简便的能量模型，计算了在低增益近似下，振幅指数梯度变化及变空间周期 Wiggler 场的自由电子激光器的增益，并与恒定参数及振幅线性梯度变化的情况进行比较。结果表明：振幅指数梯度变化的 Wiggler 自由电子激光器的增益比恒定参数及振幅线性梯度变化 Wiggler 的自由电子激光器高，且变振幅比变周期有更高的增益。

二、基 本 分 析

假定静空间梯度周期磁场的形式为：

$$\boldsymbol{B}_w=B(z)\{\hat{e}_x\cos\xi_w+\hat{e}_y\sin\xi_w\} \qquad (1)$$

式中 $\xi_w=\int K_w(z)\,dz+\phi_w$，$K(z)$ 为 Wiggler 场的波数，可表为 z 的慢变函数；$B(z)$ 为 Wiggler 场的振幅，也可表为 z 的慢变函数。

设沿 z 方向传播的辐射场是圆偏振的，频率为 ω_r。即辐射场的电场及磁场分量分别为：

$$\boldsymbol{E}_r=E_r\{\hat{e}_x\cos\xi_r-\hat{e}_y\sin\xi_r\} \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{B}_r=E_r/c\{\hat{e}_x\sin\xi_r+\hat{e}_y\cos\xi_r\} \qquad (3)$$

收稿日期：1986年3月12日。

式中 $\xi_r=K_rz-w_rt+\phi_r$; $K_r=w_r/c$; ϕ_r 是初位相; E_r 为电场振幅。在低增益近似下, $E_r/c\ll B(z)$, E_r 可近似为常数。

相对论电子在Wiggler场中的运动方程为:

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{|e|}{mc^2}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{E} \tag{4}$$

$$\frac{drv}{dt}=-\frac{|e|}{m}\{\boldsymbol{E}+\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}\} \tag{5}$$

式中 $\boldsymbol{V}$ 为相对论电子的运动速度, e 为电子的电荷, m为电子的静止质量, $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_r$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_w+\boldsymbol{B}_r$。将 $\boldsymbol{E}_r$ 及 $\boldsymbol{B}_w$、$\boldsymbol{B}_r$ 的表式(1)、(2)、(3)代入(5)便可得 x、y、z 方向分量的运动方程:

$$\frac{dr\dot{x}}{dt}=-\frac{|e|E_r}{m}\left(1-\frac{\dot{z}}{c}\right)\cos\xi_r+\frac{|e|B(z)}{m}\dot{z}\sin\xi_w \tag{5a}$$

$$\frac{dr\dot{y}}{dt}=\frac{|e|E_r}{m}\left(1-\frac{\dot{z}}{c}\right)\sin\xi_r-\frac{|e|B(z)}{m}\dot{z}\cos\xi_w \tag{5b}$$

(1) 设Wiggler场的空间周期恒定, 而振幅按 $B_0e^{\alpha z}$ 的形式变化(α 是参数)。对(5a)、(5b)式积分后得:

$$r\dot{x}=\frac{|e|E_r}{mW_r}\sin\xi_r+\frac{|e|B_0}{m}\times\frac{e^{\alpha z}}{\alpha^2+K_w^2}[\alpha\sin\xi_w-K_w\cos\xi_w] \tag{6}$$

$$r\dot{y}=\frac{|e|E_r}{mW_r}\cos\xi_r-\frac{|e|B_0}{m}\times\frac{e^{\alpha z}}{\alpha^2+K_w^2}[\alpha\cos\xi_w+K_w\sin\xi_w] \tag{7}$$

上式令积分常数为零, 这对问题的讨论没有实质性影响。也就是假定电子进入Wiggler场前的横向速度为零。把(6)、(7)代入(4)得:

$$\begin{aligned}r\frac{dr}{dt}&=-\frac{|e|E_r}{mc^2}\{r\dot{x}\cos\xi_r-r\dot{y}\sin\xi_r\}\\&=-\frac{|e|E_r}{mc^2}\left\{\frac{|e|B_0\alpha\theta^{\alpha z}}{m(\alpha^2+K_w^2)}\sin(\xi_r+\xi_w)-\frac{|e|B_0K_we^{\alpha z}}{m(\alpha^2+K_w^2)}\cos(\xi_r+\xi_w)\right\}\\&=-\frac{|e|^2E_rB_0e^{\alpha z}}{m^2c^2(\alpha^2+K_w^2)}\times\{\alpha\sin(\xi_r+\xi_w)-K_w\cos(\xi_r+\xi_w)\}\\&=-\frac{|e|^2E_rB_0e^{\alpha z}}{m^2c^2\sqrt{\alpha^2+K_w^2}}\sin(\xi_r+\xi_w-\phi')\end{aligned} \tag{8}$$

式中 $\phi'=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{K_w}{\alpha}\right)$。由相对论因子 r 的定义有:

$$\beta_z=\frac{1}{r}\sqrt{r^2-\mu^2}=\sqrt{1-\mu^2/r^2} \tag{9}$$

式中 $\mu^2=1+r^2\beta_\perp^2$, $\beta_\perp^2=\frac{1}{c^2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$。

由方程(6)、(7)得:

$$\begin{aligned}r^2\beta_\perp^2&=\frac{1}{c^2}[(r\dot{x})^2+(r\dot{y})^2]\\&=\left(\frac{|e|E_r}{mcW_r}\right)^2+\left(\frac{|e|B_0\alpha e^{\alpha z}}{mc(\alpha^2+K_w^2)}\right)^2+\left(\frac{|e|B_0K_we^{\alpha z}}{mc(\alpha^2+K_w^2)}\right)^2\\&\quad-\frac{2|e|^2E_rB_0e^{\alpha z}}{m^2c^2\omega_r\sqrt{\alpha^2+K_w^2}}\times\sin(\xi_r+\xi_w+\phi'')\end{aligned}$$

式中 $\phi''=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\alpha}{K_w}$。在通常情况下,上式中绝对值最大项 $\left[\frac{|e|B_0K_we^{\alpha z}}{mc(\alpha^2+K_w^2)}\right]^2\ll1$, 所以 $\mu^2=1+r^2\beta_\perp^2\sim1$, 对于相对论电子即 $r\gg1$, 就有 $\mu^2/r^2\ll1$。这样(9)式可展开为:

$$\beta_z=1-\mu^2/2r^2 \tag{10}$$

令 $r=r_0-\delta r$, r_0 为电子的初始能量, δr 是一级小量, $\delta r\ll r_0$。(10)式进一步化为:

$$\beta_z=\beta_0-\frac{\mu^2\delta r}{r_0^3} \tag{11}$$

$$\beta_0\approx1-\frac{1}{2r_0^2}$$

由(11)式得到

$$z=z_0+u_0t-\frac{c}{r_0^2}\int\mu^2\frac{\delta r}{r_0}dt \tag{12}$$

u_0 为电子进入磁场时的初速度, z_0 为电子的初位置, 第三项为场与电子相互作用引起的反馈。将(12)代入 $\xi_r+\xi_w$ 得:

$$\xi_r+\xi_w=\Delta\Omega t+\phi_0-\delta\xi \tag{13}$$

式中 $\Delta\Omega=\omega_w\frac{u_0}{c}-\omega_r\left(1-\frac{u_0}{c}\right)$；$\phi_0=(K_r+K_w)z_0+\phi_r+\phi_w$ 为电子及辐射场的初位相。

$$\delta\xi=(K_r+K_w)\frac{c}{r_0^2}\int\mu^2\frac{\delta r}{r_0}dt$$
$$=\frac{\omega}{r_0^2}\int\mu^2\frac{\delta r}{r_0}dt \tag{14}$$

(14)式中将 μ^2 近似视为常数提到积分号处得:

$$\delta\xi=\frac{\omega\mu^2}{r_0^2}\int\frac{\delta r}{r_0}dt \tag{15}$$

将(13)代入(8)，考虑到 $r_0\gg\delta r$，并利用 $r=r_0-\delta r$ 得:

$$\frac{\delta r}{r_0}=\frac{|e|E_rB_0}{m^2c^2r_0^2\sqrt{\alpha^2+K_w^2}}\int e^{\alpha z}\sin(\Delta\Omega t+\phi_0-\phi'-\delta\xi)dt$$
$$=A\int e^{\alpha z_0+\alpha u_0t-\alpha\delta\xi'}[\sin(\Delta\Omega+\phi_0-\phi')-\delta\xi\cos(\Delta\Omega+\phi_0-\phi')]dt$$
$$=A\int e^{\alpha z_0+\alpha u_0t}(1-\alpha\delta\xi')\times[\sin(\Delta\Omega t+\phi_0-\phi')-\delta\xi\cos(\Delta\Omega t+\phi_0-\phi')]dt \tag{16}$$

式中 $A=\frac{|e|^2E_rB_0}{m^2c^2r_0^2\sqrt{\alpha^2+K_w^2}}$,

$\delta\xi'=\frac{\delta\xi}{K_w+K_r}$。

令

$$\delta r=\delta r_1+\delta r_2+\delta r_3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\delta r_n \tag{17}$$

其中 δr_1、δr_2、δr_3…分别是一级、二级、三级…小量，在 $t=0$ 时均取零。(17)代入(16)得到一组迭代方程:

$$\frac{\delta r_1}{r_0}=A\int e^{\alpha z_0}e^{\alpha u_0t}\sin(\Delta\Omega t+\phi_0-\phi')dt \tag{18}$$

$$\frac{\delta r_2}{r_0}=-A\int e^{\alpha z_0}e^{\alpha u_0t}\left[\cos(\Delta\Omega t+\phi_0-\phi')+\frac{\alpha}{K_r+K_w}\sin(\Delta\Omega t+\phi_0-\phi')\right]\times\left[\frac{\omega\mu^2}{r_0^2}\int_0^t\frac{\delta r_1}{r_0}dt'\right]dt \tag{19}$$

$$\frac{\delta r_3}{r_0}=-A\int e^{\alpha z_0}e^{\alpha u_0t}\left[\cos(\Delta\Omega t-\phi_0-\phi')+\frac{\alpha}{K_w+K_r}\sin(\Delta\Omega t+\phi_0-\phi')\right]\times\left[\frac{\omega\mu^2}{r_0^2}\int_0^t\frac{\delta r_2}{r_0}dt'\right]dt'$$
$$+A\int e^{\alpha z_0}e^{\alpha u_0t}\frac{\alpha}{K_r+K_w}\times\left[\frac{\omega\mu^2}{r_0^2}\int_0^t\frac{\delta r_1}{r_0}dt'\right]^2\times\cos(\Delta\Omega t+\phi_0-\phi')dt \tag{20}$$

⋮

(18)、(19)、(20)是一组叠代方程，逐阶求解可得到任意精度的能量变化率。

先求一阶能量变化。对(18)式积分:

$$\frac{\delta r_1}{r_0}=Ae^{\alpha z_0}\int_0^t e^{\alpha u_0t}\sin(\Delta\Omega t+\phi_0-\phi')dt$$
$$=\frac{Ae^{\alpha z_0}}{(\alpha u_0)^2+(\Delta\Omega)^2}\times\{e^{\alpha u_0t}[\alpha u_0\sin(\Delta\Omega t+\phi_0-\phi')-\Delta\Omega\cos(\Delta\Omega t+\phi_0-\phi')]-[\alpha u_0\sin(\phi_0-\phi')-\Delta\Omega\cos(\phi_0-\phi')]\} \tag{21}$$

(21)式给出了单个相对论电子在与辐射场及空间周期场相互作用下的一阶近似能量变化。实际的自由电子激光器是电子束与场的相互作用，必须考虑电子作为一个整体的宏观效应。为此，(21)式对各个电子的初位相及初位置求平均，因此有:

$$\left\langle\frac{\delta r_1}{r_0}\right\rangle_{\phi_0}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\delta r_1}{r_0}d\phi_0=0 \tag{22}$$

上述结果表明，在一阶近似下，相对论电子与辐射场间并没有纯能量交换。事实上由相对论电子的能量方程(4)式可看出，辐射场对电子所作的功正比于 $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{E}$，由于初始状态时电子束空间位相是均匀分布的，使得有些电子的 $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{E}$ 为正值，有些电子的 $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{E}$ 为负值。亦即辐射场对有些电子做正功使电子加速，对另一些电子做负功，使电子减速，平均来说电子与场之间没有能量交换，但它使得电子在空间的分布不均匀，即电子形成空间

聚束。正是由于这种空间聚束效应使电子与场相互作用在二级近似中产生了纯能量交换。

下面求二阶近似的能量变化表达式。由(21)容易求得:

$$\int_0^t \frac{\delta r_1}{r_0} dt = \frac{Ae^{\alpha z_0}}{(\alpha u_0)^2 + (\Delta\Omega)^2} \times \left\{ \frac{(\alpha u_0)^2 - (\Delta\Omega)^2}{(\alpha u_0)^2 + (\Delta\Omega)^2} \times [e^{\alpha u_0 t}\sin(\Delta\Omega t + \phi_0 - \phi') - \sin(\phi_0 - \phi')] - \frac{2\Delta\Omega\alpha u_0}{(\alpha u_0)^2 + (\Delta\Omega)^2} \times [e^{\alpha u_0 t}\cos(\Delta\Omega t + \phi_0 - \phi') - \cos(\phi_0 - \phi')] - t[\alpha u \sin(\phi_0 - \phi') - \Delta\Omega\cos(\phi_0 - \phi')] \right\} \tag{23}$$

将(23)代入(19)式略去二阶小量 $\frac{\alpha}{K_r + K_w}$ 项,并对初位相求平均,得到:

$$\left\langle \frac{\delta r_2}{r_0} \right\rangle_{\phi_0} = -\frac{A^2 e^{2\alpha z_0}}{(\alpha u_0)^2 + (\Delta\Omega)^2} \frac{\omega\mu^2}{r_0^2} \times \left\{ \left[\frac{(\alpha u_0)^2 - (\Delta\Omega)^2}{[(\alpha u_0)^2 + (\Delta\Omega)^2]^2} \left(-\frac{\Delta\Omega}{2} e^{\alpha z_0} \right) + \frac{3}{2} \frac{\Delta\Omega(\alpha u_0)^2 e^{\alpha z_0}}{[(\alpha u_0)^2 + (\Delta\Omega)^2]^2} + \frac{(\Delta\Omega)^3 e^{\alpha z_0}}{2[(\alpha u)^2 + (\Delta\Omega)^2]^2} \right] (e^{\alpha u_0 t}\cos\Delta\Omega t - 1) + \left[\frac{(\alpha u_0)^2 - (\Delta\Omega)^2}{[(\alpha u)^2 + (\Delta\Omega)^2]^2} \frac{\alpha u_0}{2} e^{\alpha z_0} e^{\alpha u_0 t} + \frac{(\Delta\Omega)^2 \alpha u_0 e^{\alpha z_0}}{[(\alpha u_0)^2 + (\Delta\Omega)^2]^2} e^{\alpha u_0 t} + \frac{(\alpha u_0)^2 e^{\alpha z_0}}{(\alpha u)^2 + (\Delta\Omega)^2} \frac{t}{2} e^{\alpha u_0 t} - \frac{(\alpha u_0)^3 e^{\alpha z_0}}{[(\alpha u)^2 + (\Delta\Omega)^2]^2} \frac{e^{\alpha u_0 t}}{2} + \frac{\alpha u_0 (\Delta\Omega)^2 e^{\alpha z_0} e^{\alpha u_0 t}}{2[(\Delta\Omega)^2 + (\alpha u_0)^2]^2} - \frac{\alpha u_0 (\Delta\Omega)^2 e^{\alpha z_0} e^{\alpha u_0 t}}{2[(\alpha u_0)^2 + (\Delta\Omega)^2]^2} + \frac{(\Delta\Omega)^2 e^{\alpha z_0} e^{\alpha u_0 t}}{2[(\alpha u)^2 + (\Delta\Omega)^2]} t - \frac{(\Delta\Omega)^2 \alpha u_0 e^{\alpha z_0} e^{\alpha u_0 t}}{2[(\alpha u_0)^2 + (\Delta\Omega)^2]^2} \right] \sin\Delta\Omega t + \left[\frac{\Delta\Omega\alpha u_0 e^{\alpha z_0} e^{\alpha u_0 t}}{2[(\alpha u_0)^2 + (\Delta\Omega)^2]} - \frac{\alpha u_0 \Delta\Omega e^{\alpha z_0} e^{\alpha u_0 z}}{2[(\alpha u_0)^2 + (\Delta\Omega)^2]} \right] \cos\Delta\Omega t - \frac{\Delta\Omega e^{\alpha z_0}}{2[(\alpha u_0)^2 + (\Delta\Omega)^2]} (e^{2\alpha u_0 t} - 1) \right\}$$

$$= \frac{\omega\mu^2 A^2 e^{2\alpha z_0}}{2r_0^2[(\alpha u_0)^2 + (\Delta\Omega)^2]} \times \left\{ \frac{\Delta\Omega}{(\alpha u_0)^2 + (\Delta\Omega)^2} (e^{2\alpha u_0 t} - 1) - \frac{2\Delta\Omega}{(\alpha u_0)^2 + (\Delta\Omega)^2} (e^{\alpha u_0 t}\cos\Delta\Omega t - 1) - te^{\alpha u_0 t}\sin\Delta\Omega t \right\} \tag{24}$$

上式就是空间周期恒定振幅指数梯度变化的 Wiggler 场自由电子激光器的二阶能量变化率,亦即相对论电子与场的相互作用,导致相对论电子向辐射场转递的能量。

(2) 振幅恒定而空间周期变化的 Wiggler 场

设 Wiggler 场的空间周期为 $\lambda_w = \frac{\lambda_0}{1+\alpha' z}$[1]。所以:

$$\xi_w = \int K_w(z)dz + \phi_w = \int \frac{2\pi}{\lambda_0}(1+\alpha' z)dz + \phi_w = K_0\left(z + \frac{\alpha'}{2}z^2\right) + \phi_w$$

上式代入运动方程(5)得到:

$$\frac{dr\dot{x}}{dt} = -\frac{|e|E_r}{m}\left(1 - \frac{\dot{z}}{c}\right)\cos\xi_r + \frac{|e|B_0}{m}\dot{z}\sin\xi_w = -\frac{|e|E_r}{m}\left(1 - \frac{\dot{z}}{c}\right)\cos\xi_r + \frac{|e|B_0}{m}\dot{z}\sin\left(K_0 z + K_0\frac{\alpha'}{2}z^2 + \phi_w\right) \tag{25}$$

$$\frac{dr\dot{y}}{dt} = \frac{|e|E_r}{m}\left(1 - \frac{\dot{z}}{c}\right)\sin\xi_r - \frac{|e|B_0}{m}\dot{z}\cos\xi_w$$

$$=\frac{|e|E_r}{m}\left(1-\frac{\dot z}{c}\right)\sin\xi_r-\frac{|e|B_0}{m}$$
$$\times\dot z\cos\left(K_0z+K_0\frac{\alpha'}{2}z^2+\phi_w\right)\tag{26}$$

α 为一小量，假定 $|\alpha|\lesssim10^{-4}$，上式可展开为：

$$\frac{dr\dot x}{dt}=-\frac{|e|E_r}{m}\left(1-\frac{\dot z}{c}\right)\cos\xi_r$$
$$+\frac{|e|B_0}{m}\dot z\sin(K_0z+\phi_w)$$
$$+\frac{|e|B_0}{2m}K_0\alpha'\dot z z^2\cos(K_0z+\phi_w)\tag{27}$$

$$\frac{dr\dot y}{dt}=\frac{|e|E_r}{m}\left(1-\frac{\dot z}{c}\right)\sin\xi_r$$
$$-\frac{|e|B_0}{m}\dot z\cos(K_0z+\phi_w)$$
$$+\frac{|e|B_0}{2m}K_0\alpha'\dot z z^2\sin(K_0z+\phi_w)\tag{28}$$

对(27)、(28)两式积分得：

$$r\dot x=\frac{|e|E_r}{m\omega_r}\sin\xi_r-\frac{|e|B_0}{mK_0}\cos\xi_0$$
$$+\frac{|e|B_0K_0\alpha'}{2m}\left\{\frac{z^2}{K_0}\sin\xi_0\right.$$
$$\left.+\frac{2z}{K_0^2}\cos\xi_0-\frac{2}{K_0^3}\sin\xi_0\right\}\tag{29}$$

$$r\dot y=\frac{|e|E_r}{m\omega_r}\cos\xi_r-\frac{|e|B_0}{mK_0}\sin\xi_0$$
$$+\frac{|e|B_0K_0\alpha'}{2m}\left\{\frac{2z}{K_0^2}\sin\xi_0\right.$$
$$\left.-\frac{z^2}{K_0}\cos\xi_0+\frac{2}{K_0^3}\cos\xi_0\right\}\tag{30}$$

式中 $\xi_0=K_0z+\phi_w$

(29)、(30)代入能量方程(4)得：

$$r\frac{dr}{dt}=-\frac{|e|E_r}{mc^2}\{r\dot x\cos\xi_r-r\dot y\sin\xi_r\}$$
$$=-\left(\frac{|e|}{mc}\right)^2B_0E_r$$
$$\times\sqrt{\left\{\begin{array}{l}\frac{(\alpha')^2z^2}{4}+\frac{(\alpha')^2}{K_0^4}-\frac{(\alpha')^2z^2}{K_0^2}\\+\frac{1}{K_0^2}+\frac{(\alpha')^2z^2}{K_0^2}-\frac{2\alpha'z}{K_0^2}\end{array}\right\}}$$
$$\times\sin(\xi_r+\xi_w-\phi')$$

$$=-\left(\frac{|e|}{mc}\right)^2\frac{B_0E_r}{K_0}\sqrt{1-2\alpha'z}$$
$$\times z\sin(\xi_r+\xi_0-\phi')\tag{31}$$

式中 $\phi'=\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{2K_0}{\alpha}\left(\frac{1-\alpha'z}{K_0^2z^2-2}\right)\right]\approx\frac{\pi}{2}$，且在积分过程中为慢变函数，故可视为常量。(31)的根号内已略去 $(\alpha')^2$ 的二阶小量。

按照前面(1)的处理步骤，我们得如下一组方程：

$$\frac{\delta r_1}{r_0}=\left(\frac{|e|^2}{r_0mc}\right)^2\frac{B_0E_r}{K_0}\int(1-\alpha'z_0-\alpha'u_0t)$$
$$\times\sin(\Delta\Omega t+\phi_0-\phi')dt\tag{32}$$

$$\frac{\delta r_2}{r_0}=-\left(\frac{|B|}{r_0mc}\right)\frac{B_0E_r}{K_0}$$
$$\times\int\Big\{(1-\alpha'z_0-\alpha'u_0t)\cos(\Delta\Omega t+\phi_0-\phi')$$
$$\times\frac{\omega\mu^2}{r_0^2}\left[\int_0^t\frac{\delta r_1}{r_0}dt'\right]-\frac{\alpha'}{K_r+K_w}\frac{\omega\mu^2}{r_0^2}$$
$$\times\left[\int_0^t\frac{\delta r_1}{r_0}dt'\right]\sin(\Delta\Omega t+\phi_0-\phi')\Big\}dt\tag{33}$$

$$\frac{\delta r_3}{r_0}=\cdots$$
$$\vdots$$

积分(32)式得到一阶近似的能量变化率：

$$\frac{\delta r_1}{r_0}=\left(\frac{|B|}{r_0mc}\right)^2\frac{B_0E_r}{K_0}$$
$$\times\int(1-\alpha'z_0-\alpha'u_0t)\sin(\Delta\Omega t+\phi_0-\phi')dt$$
$$=\left(\frac{|e|}{r_0mc}\right)^2\frac{B_0E_r}{K_0}\left\{\frac{(1-\alpha'z_0)}{\Delta\Omega}\right.$$
$$\times[\cos(\phi_0-\phi')-\cos(\Delta\Omega t+\phi_0-\phi')]$$
$$+\frac{\alpha'u_0}{(\Delta\Omega)^2}[\sin(\phi_0-\phi')$$
$$-\sin(\Delta\Omega t+\phi_0-\phi')]$$
$$\left.+\frac{\alpha'u_0t}{\Delta\Omega}\cos(\Delta\Omega t+\phi_0-\phi')\right\}\tag{34}$$

对初位相求平均得：

$$\left\langle\frac{\delta r_1}{r_0}\right\rangle_{\phi_0}=\frac{1}{2\pi}\int_0\frac{\delta r_1}{r_0}d\phi_0=0$$

在一阶线性范围内，辐射场与自由电子间没有纯能量交换。将(34)代入(33)并略去二阶

小量 $\frac{\alpha}{K_r+K_w}$ 项,并对初位相求平均得到:

$$\left\langle\frac{\delta r_2}{r_0}\right\rangle_{\phi_0}=\left[\left(\frac{|e|}{r_0 mc}\right)^2\frac{B_0E_r\mu}{K_0r_0}\right]^2$$
$$\times\{2(1-\alpha' z_0)^2(1-\cos\Delta\Omega t)$$
$$-\left[(1-\alpha' z_0)^2+\frac{4(\alpha' u_0)^2}{(\Delta\Omega)^2}\right]\Delta\Omega t\sin\Delta\Omega t$$
$$-\alpha' u_0 t(1-\alpha' z_0)[2-\Delta\Omega t\sin\Delta\Omega t]$$
$$+(\alpha' u_0 t)^2[1+\cos\Delta\Omega t]\} \qquad (35)$$

(35)式就是变周期的自由电子激光器相对论电子与场的相互作用过程中能量转换公式。

三、增 益 方 程

设相对论电子与场相互作用过程中，除了电子向场的能量转移外，没有其他任何形式的能量损失。则激光器的增益为:

$$g(t)=\frac{\rho_e mc^2\langle\delta r\rangle_{\phi_0}V}{\varepsilon_0E_r^2V} \qquad (36)$$

ρ_e 是单位体积的电子数密度; V 为相互作用区域的体积; ε_0 为真空介电常数。将(24)及(35)代入(36)分别得到:

(1) 对振幅指数梯度变化的 Wiggler 场自由电子激光器,其增益为:

$$g(t)=\frac{\rho_e mc^2\omega\mu^2A^2e^{2\alpha z_0}}{2r_0\varepsilon_0E_r^2[(\alpha u_0)^2+(\Delta\Omega)^2]}$$
$$\times\left\{\frac{\Delta\Omega(e^{2\alpha u_0 t}-1)}{(\alpha u_0)^2+(\Delta\Omega)^2}\right.$$
$$-\frac{2\Delta\Omega(e^{\alpha u_0 t}\cos\Delta\Omega t-1)}{(\alpha u_0)^2+(\Delta\Omega)^2}$$
$$\left.-te^{\alpha u_0 t}\sin\Delta\Omega t\right\} \qquad (37)$$

令 $\Delta\Omega t=\eta$, $t=\frac{L}{u_0}$,上式化为归一化形式:

$$g(\eta)=\frac{G_0\eta}{[(\alpha L)^2+(\eta)^2]^2}\left\{e^{2\alpha L}-2e^{\alpha L}\cos\eta\right.$$
$$\left.+1-\left[\frac{(\alpha L)^2+\eta^2}{\eta}\right]e^{\alpha L}\sin\eta\right\} \quad (38)$$

(2) 对于空间周期变化的 Wiggler 场自由电子激光器的增益为:

$$g(t)=\frac{\rho_e mc^2w}{2\varepsilon_0E_r^2r_0(\Delta\Omega)^3}\left[\left(\frac{|e|}{r_0mc}\right)^2\frac{B_0E_r\mu^2}{K_0}\right]^2$$
$$\times\left\{2(1-\cos\Delta\Omega t)\right.$$
$$-\left[1+\frac{4(\alpha' u_0)^2}{(\Delta\Omega)^2}\right]\Delta\Omega t\sin\Delta\Omega t$$
$$-\alpha' u_0 t[2-\Delta\Omega t\sin\Delta\Omega t]$$
$$\left.+(\alpha' u_0 t)^2[1+\cos\Delta\Omega t]\right\} \qquad (39)$$

归一化形式:

$$g(\eta)=\frac{G_0}{\eta^3}\left\{2(1-\cos\eta)\right.$$
$$-\left[1+\frac{4(\alpha L)^2}{\eta^2}\right]\eta\sin\eta$$
$$-\alpha L[2-\eta\sin\eta]$$
$$\left.+(\alpha L)^2[1+\cos\eta]\right\} \qquad (40)$$

四、结 果 讨 论

1. 由方程(37)及(39)可以看出，令 $\alpha'=\alpha=0$ 时，便得到恒振幅恒周期的增益方程解析表达式。

2. 为了直观地表示 α 值对自由电子激光器辐射特性的影响，我们将(38)和(40)两式分别用图1和2表示。

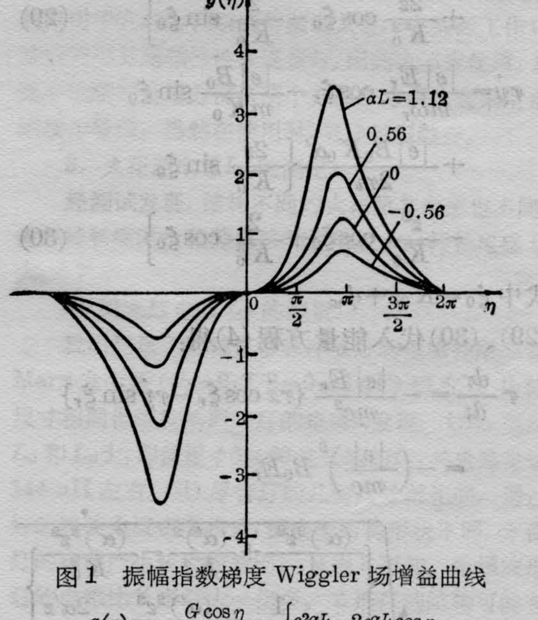

图1 振幅指数梯度 Wiggler 场增益曲线

$$g(\eta)=\frac{G\cos\eta}{[(\alpha L)^2+\eta^2]}\left\{e^{2\alpha L}-2e^{\alpha L}\cos\eta\right.$$
$$\left.+1-\frac{(\alpha L)^2+\eta}{\eta}e^{\alpha L}\sin\eta\right\}$$

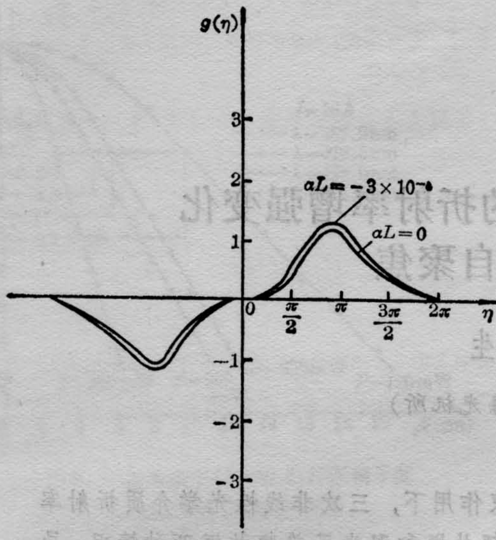

图 2　空间变周期 Wiggler 场增益曲线

$$g(\eta)=\frac{G(0)}{\eta^3}\left\{2(1-\cos\eta)-\left[1+\frac{4(\alpha L)^2}{\eta^3}\right]\eta\sin\eta-\alpha L[2-\eta\sin\eta]+(\alpha L)^2[1+\cos\eta]\right\}$$

由图 1 可见，在 αL 取值不超过一定范围时增益能大幅度地提高。如 $\alpha L=0.56$ 时，增益提高 77%；$\alpha L=1.12$ 时，增益提高 223%。与振幅线性梯度变化的 Wiggler 场自由电子激光器的增益相比较[2]，在获得相同的增益时，振幅指数梯度变化的 Wiggler 场的振幅变化幅度只是前者的 58%，亦即采用指数变化形式时，可在振幅变化幅度较小的情况下就能获得较高的增益。

图 2 是变周期 Wiggler 场自由电子激光器的增益方程曲线。由于近似条件限制，$|\alpha'|\lesssim10^{-4}$，当 $|\alpha' L|=3\times10^{-4}$ 时，增益提高约 0.01%。$|\alpha' L|$ 取更大的值时增益可望得到进一步的提高。另外，当 α' 取负值，亦即空间周期长度 $\lambda_w=\dfrac{\lambda_0}{1+\alpha' z}$ 沿电子运动方向增加时，增益才能得到提高。这与斯坦福大学 TWR 小组[4]的结果一致。

参 考 文 献

[1] 王润文;《中国激光》, 1983, **10**, No. 7, 385.
[2] 张大可, 陈建文;《中国激光》, 1985, **12**, No. 3, 129.
[3] D. Prosnits *et al.*; "Physics of Quant. Electr.", 1987, Vol. 7, Addison-Wesley Publishing Company, p. 175.
[4] *Laser und Optoelectronik*, 1984, **16**, No. 3, 212～213.

（上接第 140 页）

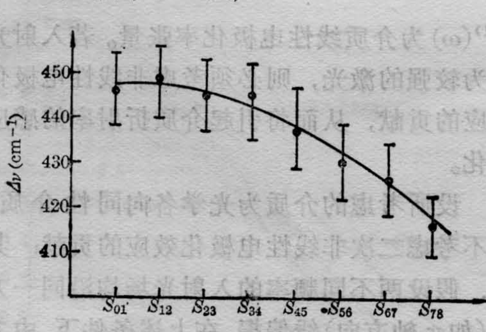

图 5　掺 Ge 多模石英光纤多阶级联 SRS 谱线间隔随级次增大的变化曲线

在 SRS 过程中产生喇曼增强自聚焦作用的同时，还将产生喇曼频率牵引效应，牵引量达到可与喇曼线宽相比的程度。

参加部分实验工作的尚有周福新、刘盾、唐定远、曹卓良等同志，作者谨致谢意。

参 考 文 献

[1] P. N. Butcher; "Nonliner optical phenomena", 1965. J. Ducuing; "Nonlinear optics", Ed. by P. G. Harper, B. S. Wherrett, 1977, p. 11～46.
[2] 赫光生等;《中国激光》, 1984, **11**, No. 2, 96～99.