

# Nd:YAG 激光棒的前向光散射

金维睦 何林

(四川师范大学物理系)

**提要:** 从光在散射媒质中的输运方程出发,直观地引入增益函数,解出光束通过媒质后的分布函数,与实验结果相拟合,得出前向散射系数和消光系数。

## Forward scattering of light in YAG:Nd laser rods

Jin Weimu, He Lin

(Department of Physics, Sichuan Teachers University, Chendu)

**Abstract:** The distribution function of the light beam which has passed the medium is solved by starting from the radiative transfer equation of light in the scattering medium and introducing visually the gain function. The results are in good agreement with those of the experiments, and the forward scattering coefficient and extinction coefficient has been obtained.

YAG:Nd 棒的损耗绝大部分来自散射<sup>[1]</sup>。晶体内小颗粒产生的大角度散射能直接观察测量;对较大尺寸的不均匀体常用干涉的办法观察花样图。但对各不相同的花样图很难进行分析和作定量处理。本文提出测量透射光束模式畸变的方法来分析前向散射的总效应,由此得到晶体粗粒结构的信息。

### 一、理论模型

光在散射媒质中的输运方程概括了光束损耗以及变型两种过程。若媒质中不存在热源辐射,辐射的输运方程是:

$$\frac{d\phi}{d\tau} = -\phi + J \quad (1)$$

式中  $\tau = K_{ext} Z$ ;  $Z$ ——传输距离;  $K_{ext}$ ——消光系数;  $\phi$ ——辐射单位立体角强度;  $J$ ——源函数,是积分式,表示来自其他散射元的光

进入该散射元再发生散射,在传输方向上提供的强度。

在前向散射的情况下, Hunt<sup>[2]</sup> 推导出了决定源函数的积分方程:

$$J(r, \tau) = \frac{f(r)}{4\pi} + \omega_0 \int_1^\infty K(r, \tau, \alpha) d\alpha \quad (2)$$

$f(r)$ ——入射波束径向分布函数;

$$\omega_0 = \frac{K_{scat}}{K_{ext}};$$

$K_{scat}$ ——散射系数;  $K(r, \tau, \alpha)$ ——包含源函数的一个多重积分。

后来 Hunt<sup>[3]</sup> 进一步证明:若  $f(r)$  有 Bessel 函数形式:

$$f(r) = J_0(\alpha r), \quad (3)$$

则积分方程(2)可以解出,得:

$$J(r, \tau) = J_0(\alpha r) P_\alpha(\tau) \quad (4)$$

收稿日期:1985年11月29日。

式中  $P_\alpha(\tau)$  称增益函数, 由一个积分方程决定, 可以迭代求解。

我们用 He-Ne 激光的高斯光束作为入射光束:

$$f(r) = e^{-\beta^2 r^2} \quad (5)$$

通过 Hankel 变换把(5)展成 Bessel 函数:

$$f(r) = \int_0^\infty \alpha F(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha \quad (6)$$

$$F(\alpha) = \frac{1}{2\beta^2} e^{-\alpha^2/4\beta^2} \quad (7)$$

利用 Hunt 结果, 得:

$$J(r, \tau) = \int_0^\infty \alpha F(\alpha) P_\alpha(\tau) J_0(\alpha r) d\alpha \quad (8)$$

到此, 问题转化为寻找  $P_\alpha(\tau)$ 。

仔细分析(8)式可发现:  $\alpha$  具有(长度)<sup>-1</sup>量纲。对于愈是近轴位置的光强, 对该处有明显贡献的 Bessel 分量的数目也愈多。从物理上看, 尺度愈大的不均匀体( $\alpha$ 小), 其前向散射的能力也愈强。因此, 只要散射体分布有近似的轴对称性, 可以把增益函数  $P_\alpha(\tau)$  近似成  $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{1+\alpha^2}, \dots$  的级数和。为能积分计, 我们令:

$$P_\alpha(\tau) \approx \frac{e^{-\tau}}{4\pi} + \frac{c'(\tau)}{\alpha} \quad (9)$$

代入(8)积分, 得:

$$J(r, \tau) = \frac{1}{4\pi} e^{-(\tau+\beta^2 r^2)} + \frac{1}{2\beta} c'(\tau) \sqrt{\pi} e^{-\beta^2 r^2/2} I_0\left(\frac{\beta^2 r^2}{2}\right) \quad (10)$$

式中  $I_p(x) = \exp\left(-\frac{i p \pi}{2}\right) J_p(ix)$ , 为变态 Bessel 函数。

把(10)代入(1)求解, 对立体角积分后, 得穿透晶体后的光强分布:

$$S(r, \tau_1) = e^{-\tau_1 - \beta^2 r^2} + \frac{c(\tau_1)}{2\beta} \sqrt{\pi} e^{-\beta^2 r^2/2} I_0\left(\frac{\beta^2 r^2}{2}\right) \quad (11)$$

此即我们想要的结果。(11)式右端的第一项是高斯光束经媒质吸收和大角度散射后的透

射成分, 第二项是级联前向散射的贡献。显然, 前向散射使高斯光束畸变, 并能用实验检验。

## 二、实验及结果

实验装置如图 1。波束断面用一宽 0.1 mm、高 5 mm 的狭缝扫描。位置坐标用百分尺计量, 强度由 X-Y 仪记录。

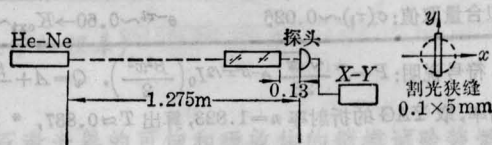


图 1

通过狭缝的光强是(11)式对狭缝积分:

$$I_i(x) = \int_{-2.5}^{+2.5} S(r, \tau_1) dy \cdot \Delta x = \Delta x \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\tau_1 - \beta^2 x^2} + \frac{c(\tau_1)}{2\beta} \sqrt{\pi} e^{-\beta^2 x^2/2} \times I_0\left(\frac{\beta^2 x^2}{2}\right) \left(A + \frac{\beta^2 x^2}{2} B\right) \right\} \quad (14)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A &\equiv \int_{-2.5}^{+2.5} e^{-\beta^2 y^2/2} I_0\left(\frac{\beta^2 y^2}{2}\right) dy \sim 2.240 \\ B &\equiv \int_{-2.5}^{+2.5} e^{-\beta^2 y^2/2} I_1\left(\frac{\beta^2 y^2}{2}\right) dy \sim 0.816 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

在推导过程中, 已把  $I_0\left(\frac{\beta^2 x^2 + \beta^2 y^2}{2}\right)$  在  $x=0$  点对  $x$  作台劳展开, 只取一阶项。(15)式不能把积分限移至无穷大, 因积分不收敛。狭缝高取 4~6, (15)式的值变化不大。

表 1 和表 2 列出两根 YAG 激光棒的测量结果和计算数据。由表看出, 多数的点的计算值与测量值相差在千分位。我们的实验数据的千分位均为估计数, 故千分位的相差可以忽略。至于  $x=0.35 \sim 0.45$  的几个点, 相差值达 0.01, 主要是测量  $x$  值的误差。因为在这个范围内高斯函数变化陡峻, 小的  $x$  误

表 1 6×98 mm YAG:Nd 棒前向散射实验数据及计算表

$x(\text{mm})$	0	0.06	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.70	0.80
$e^{-\beta^2 x^2}$ (测量)	1	0.991	0.976	0.947	0.906	0.857	0.800	0.783	0.673	0.606	0.473	0.410	0.297	0.200
$P$	0.471	0.469	0.465	0.458	0.448	0.436	0.421	0.405	0.386	0.366	0.334	0.301	0.280	0.248
$Q$	2.24	2.24	2.25	2.26	2.28	2.30	2.33	2.36	2.40	2.44	2.54	2.60	2.73	2.89
$N$	0.502	0.498	0.491	0.476	0.455	0.431	0.402	0.374	0.338	0.304	0.237	4.206	0.149	0.100
理论值	0.529	0.525	0.518	0.503	0.482	0.457	0.428	0.399	0.362	0.327	0.259	0.226	0.169	0.119
*测量值	0.550	0.525	0.521	0.508	0.491	0.466	0.436	0.411	0.377	0.343	0.263	0.224	0.169	0.119
差	-0.001	—	-0.003	-0.005	-0.009	-0.009	-0.008	-0.012	-0.015	-0.016	-0.004	+0.002	—	—

拟合量取值:  $c(\tau_1) \sim 0.026$        $e^{-\tau_1} \sim 0.60 \rightarrow K_{\text{ext}} \sim 5.2\% (\text{cm})^{-1}$

符号说明:  $P = T \frac{\sqrt{\sigma}}{2\beta} e^{-\beta^2 x^2/2} I_0\left(\frac{\beta^2 x^2}{2}\right)$ ,  $Q = A + \frac{\beta^2 x^2}{2} B$ ,  $N = T e^{-\tau_1 - \beta^2 x^2/2}$ , 理论值  $= c(\tau_1) P Q + N$ ,  $\beta = 1.574$ ,  $T =$  透射率, 取 YAG 的折射率  $n = 1.823$ , 算出  $T \approx 0.837$ , \* 相互正交的两个方向上的强度分布的平均。

表 2 6×60 mm YAG:Nd 棒前向散射实验数据及计算表

$x(\text{mm})$	0	0.06	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.55	0.60	0.70	0.80
$P$	0.471	0.469	0.465	0.458	0.448	0.436	0.421	0.405	0.386	0.366	0.334	0.301	0.280	0.248
$Q$	2.24	2.24	2.25	2.26	2.28	2.30	2.33	2.36	2.40	2.44	2.54	2.60	2.73	2.89
$N$	0.544	0.539	0.531	0.515	0.493	0.466	0.435	0.426	0.366	0.330	0.257	0.223	0.161	0.109
理论值	0.559	0.556	0.547	0.531	0.508	0.481	0.450	0.440	0.380	0.343	0.270	0.236	0.172	0.120
测量值	0.564	0.557	0.545	0.533	0.509	0.485	0.461	0.436	0.390	0.361	0.284	0.254	0.194	0.139
差	-0.005	-0.001	+0.002	-0.002	-0.001	-0.004	-0.011	+0.004	-0.010	-0.018	-0.014	-0.018	-0.022	-0.019

拟合量取值:  $c(\tau_1) \sim 0.015$        $e^{-\tau_1} \sim 0.65 \rightarrow K_{\text{ext}} \sim 7.18\% (\text{cm})^{-1}$

差会产生较强的影响。对于 6×60 mm 棒, 当  $x > 0.45$  mm 差值达 -0.02, 这归因于增益函数过于简化。总的来看, 理论值与实验值的相对误差都小于 1%, 可以认为, 所设的模型满意地符合实验结果。

用通常方法测出的消光系数比本文得出的值低。因前者不能排开前向散射的影响。

感谢激光物理研究室在实验上的支持。

### 附录: 模型合理性的说明

根据对国内三个单位的三根激光棒的测试表明, 不同角方向上的前向散射强度分布, 散布均在 1.5% 以内, 即轴对称性是近似成立的。故对晶体内粗粒分布可以用轴对称去模拟。粗粒的真实情况要复杂得多, 两者只在前向散射的总和效应上等效。

我们不能断言激光棒都有这种轴对称性, 但从理论上可以找到它能较普遍地存在的根据。首先, 能出光的激光棒本身就具有一定程度的均匀性, 这样

就排斥了根本无轴对称性的前提, 问题只是轴对称性的破缺有多大。其次, 从以强迫对流为主导的提拉法制晶工艺过程来看, 其焦点就是要使晶体在垂直于轴的平面内沿轴方向均匀生长。工艺过程本身就包含轴对称性的严格要求。晶体的各种缺陷与生长参量(温度、转速、生长速率)的波动密切相关。在拉晶过程中只要控制住了固-液界面的形状, 使它偏离平面的起伏是微小的和缓变的, 则轴对称的生长(或局域均匀性的生长)总能达到。至于生长参量波动对固-液界面形状影响的细节讨论, 已超过本文的范围了。这里再次说明, 前向光散射图的轴对称性并不完全等价于粗粒分布有轴对称性, 满足前者所要求的条件还要弱些。

### 参 考 文 献

- [1] 上海光机所晶体检验组; 《激光与红外》, 1978, No. 7, 41~47; No. 8, 45~55.
- [2] G. E. Hunt; *J. Inst. Math. Appl.*; 1967, 3, 181.
- [3] G. E. Hunt; *SIAM J. Appl. Math.*, 1968, 16, 228~237.