

3502  
甄小成  
廖延彪

860802  
上海交大应用物理系  
清华大学无线电系

论文  
860806  
860902  
中国激光  
第14卷 第11期

## 单模与多模光纤光场的统计相关性

秦克琪 陈建文 王润文

(中国科学院上海光机所)

**提要:** 用准均匀光源及部分均匀相干光源分别处理多模及单模光纤, 利用二阶统计相关函数及角相关函数计算了光纤端面及衍射场的光场统计性质, 得到了光纤横向相关长度、角相关长度、有效发光孔径角、光强分布等参数, 并与实验进行了比较。

### Statistical correlation properties of optical field produced by single mode and multi-mode optical fibers

Qin Keqi, Chen Jianwen, Wang Runwen

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai)

**Abstract:** The optical field at the exit end of multi-mode fiber is treated as a quasi-homogeneous source, while that of single-mode fiber is treated as homogeneous partial coherence source. The second-order statistical correlation function and angular correlation function are used to analyze the correlation properties of the exit end and the near and far field of optical fibers. The transverse and angular coherent lengths and the optical intensity distribution parameters have been obtained. The theoretical results are compared to those of experiments.

### 一、引言

单色相干光通过多模光纤, 由于所激发的大量不同模式(一般地 $>1000$ 个模)相互耦合, 模的选择性损耗、机械振动等因素的影响, 在光纤出射端面的光场分布近似为散斑场。由于它的起因完全是一种随机过程, 可以认为在光纤出射端面有限区域内的场分布在统计上是一种空间准平稳、各态经历的系综平均, 同时其二阶统计相关度是空间严格

平稳的, 可用准均匀源来描述<sup>[1,2]</sup>。

对于单模光纤, 由于有限大小的芯径及数值孔径  $N.A.$ , 所能传输的并不只是单一模式。它们在光纤中传播同样受到模耦合、选择性损耗及机械振动等因素的影响。在出射端面并非空间完全相干。可认为这仍是一种准平稳、各态经历的统计系综平均。但场在光纤出射端面是均匀分布的。可用强度均匀分布的部分相干源来描述。基于上述模型, 我们利用二阶统计相关函数及角相关函

收稿日期: 1986年8月2日

数计算了光纤端面、近场及远场的光场统计性质。得到的各种参数对利用光纤进行的光学实验是很重要的。如光纤与各种有源及无源器件的耦合，利用光纤相干性的干涉效应作为传感器，利用光纤作为色散元件及非线性波导来进行的各种非线性光学实验。

## 二、理论分析

### 1. 多模光纤准均匀源

设在光纤端面某几何点  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  的光场为  $E_0(\mathbf{u})$ ，那么端面上空间两点间的互相关函数为：

$$J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \langle E_0^*(\mathbf{u}_1) E_0(\mathbf{u}_2) \rangle \quad (1)$$

式中\*表示复共轭， $\langle \cdot \rangle$ 表示系综平均。对于准平稳及各态经历的场(1)式可表示为：<sup>[2]</sup>

$$J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = [I_0(\mathbf{u}_1) I_0(\mathbf{u}_2)]^{1/2} \mu(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (2)$$

$I_0(\mathbf{u}) = J(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  是  $\mathbf{u}$  点的平均光强度。

$$\mu(\mathbf{u}') = \mu(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)$$

为空间复相关度，只与  $\mathbf{u}' = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$  有关，是严格平稳的。我们已假定光纤端面的场分布为准均匀的，(2)式可进一步写为<sup>[3]</sup>：

$$J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = I_0 \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \right] \mu(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (3)$$

式中  $I_0(\mathbf{u})$  为  $\mathbf{u}$  的慢变函数，而  $\mu(\mathbf{u}')$  是  $\mathbf{u}$  的快变函数。设准均匀场分布具有 Gaussian 函数形式<sup>[4]</sup>：

$$I_0(\mathbf{u}) = \begin{cases} I_0 \exp(-2|\mathbf{u}|^2/q_0^2) & u \leq a/2 \\ 0 & u > a/2 \end{cases}$$

$$\mu(\mathbf{u}') = \exp(-|\mathbf{u}'|^2/2\zeta_0^2) \quad (4)$$

$a$  为光纤芯径，且  $a \gg \lambda$ ， $a \gg \zeta_0$ ， $q_0 \gg \zeta_0$ ， $\lambda$  为光波波长(真空)。另外  $q_0 \ll a$ ， $\zeta_0$  为多模光纤端面的平均相关长度， $q_0$  为有效芯半径，由(3)、(4)式得：

$$J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = I_0 \exp(-|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2|^2/2q_0^2) \times \exp(-|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2/2\zeta_0^2) \quad (5)$$

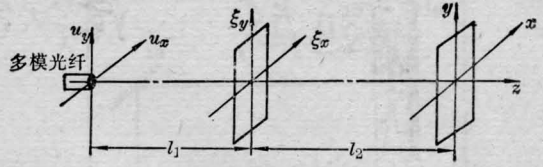


图 1

取坐标如图 1 所示。由  $z=0$  (光纤端面) 到  $z=l_1$  平面的光场传播因子为：

$$K_1(\mathbf{u}, \xi) = \frac{1}{i\lambda l_1} \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda l_1} |\mathbf{u} - \xi|^2\right)$$

$\xi$  平面的光场分布为：

$$E_1(\xi) = \int E_0(\mathbf{u}) K_1(\mathbf{u}, \xi) d\mathbf{u}$$

所以：

$$J(\xi_1, \xi_2) = \langle E_1^*(\xi_1) E_1(\xi_2) \rangle$$

$$= \iint J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) K_1^*(\mathbf{u}_1, \xi_1) \times K_2(\mathbf{u}_2, \xi_2) d\mathbf{u}_1 d\mathbf{u}_2$$

$$= \frac{I_0}{(\lambda l_1)^2} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda l_1} (|\xi_1|^2 - |\xi_2|^2)\right] \iint \exp(-|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2|^2/2q_0^2) \cdot \exp(-|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2/2\zeta_0^2) \times \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda l_1} (|\mathbf{u}_2|^2 - |\mathbf{u}_1|^2)\right] \times \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda l_1} (\mathbf{u}_1 \cdot \xi_1 - \mathbf{u}_2 \cdot \xi_2)\right] \times d\mathbf{u}_1 d\mathbf{u}_2$$

由近似条件  $q_0 \ll a$ ，及条件(4)可把积分区域扩展到  $(-\infty, +\infty)$ 。作变数代换：

$$\mathbf{u}_+ = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u}_- = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1,$$

$$J = \frac{D(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{D(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-)} = \frac{1}{4}.$$

上式化为：

$$J(\xi_1, \xi_2) = \frac{I_0}{4(\lambda l_1)^2} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda l_1} (|\xi_1|^2 - |\xi_2|^2)\right] \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-|\mathbf{u}_-|^2/2\zeta_0^2] \times \exp\left[\frac{-i\pi}{\lambda l_1} (\xi_1 + \xi_2) \cdot \mathbf{u}_-\right] d\mathbf{u}_-$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-|\mathbf{u}_+|^2/2q_0^2]$$

$$\times \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda l_1}(\xi_1 - \xi_2 + u_-)u_+\right] du_+$$

上式两次利用公式:

$$\begin{aligned} & \int du \exp(-A_1|u|^2) \exp(-A_2|\xi - u|^2) \\ & \times \exp(iBu) \\ & = \frac{\pi}{A_1 + A_2} \exp\left(-i\frac{A_2 B \xi}{A_1 + A_2}\right) \\ & \times \exp\left[-\frac{|B|^2 + 4A_1 A_2 |\xi|^2}{4(A_1 + A_2)}\right] \quad (6) \end{aligned}$$

得到:

$$\begin{aligned} J(\xi_1, \xi_2) & = \frac{2(\pi q_0 \zeta_0)^2 I_0}{(\lambda l_1)^2} \\ & \times \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda l_1}(|\xi_1|^2 - |\xi_2|^2)\right] \\ & \times \exp[-|\xi_1 + \xi_2|^2 / 2q_1^2] \\ & \times \exp[-|\xi_1 - \xi_2|^2 / 2\zeta_1^2] \quad (7) \end{aligned}$$

$$\text{式中 } \zeta_1 = \frac{\lambda l_1}{\pi q_0}, \quad q_1 = \frac{\lambda l_1}{\pi \zeta_0},$$

且  $\zeta_1 \ll q_1$ ,  $\zeta_1 \gg \lambda$ 。由(7)式可见,除了一位相因子外,在  $\xi$  平面上的场的统计性质与源平面的类似,也是准均匀的。但由于位相因子的存在,  $\mu$  并不是严格平稳的。在  $\xi$  平面上的平均光强为:

$$\begin{aligned} I_1(\xi) & = J(\xi, \xi) \\ & = \frac{2(\pi q_0 \zeta_0)^2 I_0}{(\lambda l_1)^2} \exp[-2|\xi|^2 / q_1^2] \\ & = I_1 \exp[-2|\xi|^2 / q_1^2]。 \end{aligned}$$

$q_1$  为  $\xi$  平面上光强下降到最大值的  $e^{-2}$  时的  $|\xi|$  值,表征了近场区的光强分布。实验上测定  $q_1$  就可算出多模光纤端面的平均相关长度  $\zeta_0$ 。 $\zeta_1$  为衍射平面上的平均相关长度,与  $l_1$  成正比,与  $q_0$  成反比。

为了计算光纤端面的光强分布参数  $q_0$  及某平面上的横向平均相关长度,我们进一步求距  $l_1$  平面为  $l_2$  的平面上的光场统计性质。如图 1,与上述类似的运算并利用(7)式得:

$$\begin{aligned} J(x_1, x_2) & = \iint J(\xi_1, \xi_2) K_F^*(\xi_1, x_1) \\ & \times K_F(\xi_2, x_2) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

$$= \frac{2I_1(\pi q \zeta_1)^2}{(\lambda l_2)^2}$$

$$\begin{aligned} & \times \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda l_2}(|x_2|^2 - |x_1|^2)\right] \\ & \times \exp[-|x_1 + x_2|^2 / 2q_2^2] \\ & \times \exp[-|x_1 - x_2|^2 / 2\zeta_2^2] \quad (8) \end{aligned}$$

$$\text{式中 } q_2 = \frac{\lambda l_2}{\pi \zeta_1}, \quad \zeta_2 = \frac{\lambda l_2}{\pi q_1} \quad \zeta_2 \ll q_2$$

$x$  平面上的光强为:

$$I_2(x) = J(x, x) = I_2 \exp[-2|x|^2 / q_2^2]$$

$$\text{式中 } I_2 = 2I_1(\pi q_1 \zeta_1)^2 / (\lambda l_2)^2。$$

## 2. 单模光纤,强度均匀的部份相干源

假设单模光纤端面具有均匀的光强分布,其相关度仍为 Gaussian 函数:

$$I(r) = \begin{cases} I_0 & r \leq b/2 \\ 0 & r > b/2 \end{cases} \quad (9a)$$

$$\mu(r') = \exp[-|r'|^2 / 2\sigma_r^2] \quad (9b)$$

$$J(r_1, r_2) = I_0 \exp[-|r_2 - r_1|^2 / 2\sigma_r^2] \quad (9c)$$

$b$  为单模光纤芯径,  $\sigma_r$  为单模光纤端面的平均相关长度,且  $\sigma_r \sim b \sim \lambda$ 。考虑其远场(夫琅和费)衍射的光场统计性质,在距端面为  $l$  的  $R$  平面上有:

$$\begin{aligned} J(R_1, R_2) & = \iint_{S_b} J(r_1, r_2) K_F^*(r_1, R_1) \\ & \times K_F(r_2, R_2) dr_1 dr_2 \quad (10) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} K_F(r, R) & = \frac{1}{i\lambda l} \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda l}|R|^2\right] \\ & \times \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda l}rR\right] \end{aligned}$$

为夫琅和费传播因子,  $S_b$  为单模光纤的纤芯面积。由(9)、(10)式得:

$$\begin{aligned} J(R_1, R_2) & = \frac{I_0}{(\lambda l)^2} \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda l}(|R_2|^2 - |R_1|^2)\right] \\ & \times \iint_{S_b} \exp[-|r_2 - r_1|^2 / 2\sigma_r^2] \\ & \times \exp\left[\frac{i2\pi}{\lambda l}(r_1 R_1 - r_2 R_2)\right] dr_1 dr_2 \end{aligned}$$

$$\text{令 } r_- = r_2 - r_1, \quad r_+ = r_1 + r_2$$

上式化为:

$J(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$

$$= \frac{I_0}{4(\lambda l)^2} \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda l} (|\mathbf{R}_2|^2 - |\mathbf{R}_1|^2)\right] \\ \times \int_{S_{2b}} \exp[-|\mathbf{r}_-|^2/2\sigma_r^2] \\ \times \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda l} (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) \mathbf{r}_-\right] d\mathbf{r}_- \\ \times \int_{S_{2b}} \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda l} (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \mathbf{r}_+\right] d\mathbf{r}_+ \quad (11)$$

式中  $S_{2b}$  为积分变数代换后的积分区域, (11) 式的第二个积分可用下述变数代换求出:

$$\text{令} \begin{cases} r_{+x} = \rho \cos \theta \\ r_{+y} = \rho \sin \theta \\ \frac{1}{2l} (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)_x = \omega \cos \psi \\ \frac{1}{2l} (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)_y = \omega \sin \psi \end{cases}$$

$$\text{则} \int_{S_{2b}} \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda l} (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \mathbf{r}_+\right] d\mathbf{r}_+ \\ = \int_0^{\sqrt{2}b} \int_0^{2\pi} e^{ik\rho\omega \cos(\theta-\psi)} \rho d\rho d\theta \\ = \frac{1}{2} \pi b^2 \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\sqrt{2}bk}{4l} |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}bk}{4l} |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|\right)} \right]$$

式中  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,

上述积分利用到贝塞尔函数  $J_n(z)$  的积分表示及递推公式:

$$\frac{(\hat{v})^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha \cos \alpha} e^{in\alpha} d\alpha = J_n(x); \\ \frac{d}{dx} [x^{n+1} J_{n+1}(x)] = x^{n+1} J_n(x) \quad (12)$$

类似可得(11)式第一个积分:

$$\iint_{S_{2b}} \exp[-|\mathbf{r}_-|^2/2\sigma_r^2] \\ \times \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda l} (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) \mathbf{r}_-\right] d\mathbf{r}_- \\ = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}b} e^{-\rho^2/2\sigma_r^2} \\ \times J_0\left(\frac{R}{2l} |\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2| \rho\right) \rho d\rho$$

$J_0\left(\frac{k}{2l} |\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2| \rho\right)$  为零阶贝塞尔函数。由此得:

$$J(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) \\ = \frac{(\pi b)^2 I_0}{4(\lambda l)^2} \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda l} (|\mathbf{R}_2|^2 - |\mathbf{R}_1|^2)\right] \\ \times I(|\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1|; \sigma_r) \\ \times \left[ \frac{2J_1\left(\sqrt{2} \frac{bk}{4l} |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}bk}{4l} |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|\right)} \right] \\ = I_R \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda l} (|\mathbf{R}|^2 - |\mathbf{R}_1|^2)\right] \\ \times I(|\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2|; \sigma_r) \mu(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \quad (13)$$

其中  $I(|\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1|; \sigma_r)$

$$= \int_0^{\sqrt{2}b} e^{-\rho^2/2\sigma_r^2} J_0 \\ \times \left(\frac{k}{2l} |\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2| \rho\right) \rho d\rho \\ \mu(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) = \frac{2J_1\left(\frac{\sqrt{2}bk}{4l} |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}bk}{4l} |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|\right)} \\ I_R = \frac{I_0(\pi b)^2}{4(\lambda l)^2} \quad (14)$$

由(13)式可见, 在  $R$  平面上, 光场的统计分布为准平稳的, 除了一位相因子外相关度只与  $(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)$  有关。另外  $\mu(\mathbf{R}')$  与多模光纤的形式不同, 对于有限的  $\mathbf{R}' = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$ ,  $\mu(\mathbf{R}')$  有零值。并由贝塞尔函数的宗量决定, 当  $x = 3.833$  时  $J_1(x) = 0$ , 即横向最大相干长度为

$$|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| = \frac{7.666 \times l}{\frac{\sqrt{2}}{2} bk}$$

可见距光纤出射端面越远光纤芯径越小, 横向相干长度越大。在  $R$  平面上的光强分布为:

$$I(\mathbf{R}) = J(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = I_R I(|\mathbf{R}|; \sigma_r) \quad (15)$$

实验上测出远场的光强分布曲线, 并与理论

曲线(15)比较,可确定单模光纤出射端面的平均相关长度  $\sigma_r$  的值。我们将会看到远场光强分布与端面的明显不同,这点与多模光纤有本质区别。

### 3. 角相关函数

从光纤端面上某几何点发出不同方向的光是来自光纤内不同的传播模式,因此不一定是相干的。在  $\mathbf{u}$  平面上有二维傅里叶变换<sup>[4]</sup>:

$$E(\mathbf{u}) = \iint A(f_x, f_y) \exp[i2\pi(f_x u_x + f_y u_y)] \times df_x df_y \\ = \iint A(\mathbf{S}_\perp) \exp[ik(\mathbf{S}_\perp \cdot \mathbf{u})] d\mathbf{S}_\perp \quad (16)$$

式中  $f_x = S_x/\lambda, f_y = S_y/\lambda,$   
 $\mathbf{S}_\perp = (S_x, S_y, 0), S_z = \sqrt{1 - |\mathbf{S}_\perp|^2}$   
 $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$

为光传播方向的方向余弦。 $A(f_x, f_y)$  为  $\mathbf{u}$  平面上的场  $E(\mathbf{u})$  的角谱,表征空间频率为  $(f_x, f_y, f_z)$  的平面波分量。并具有反变换关系:

$$A(\mathbf{S}_\perp) \\ = \iint E(\mathbf{u}) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda}(\mathbf{S}_\perp \cdot \mathbf{u})\right] d\mathbf{u} \quad (17)$$

定义角相关函数:

$$\omega(\mathbf{S}_{1\perp}, \mathbf{S}_{2\perp}) = \langle A^*(\mathbf{S}_{1\perp}) A(\mathbf{S}_{2\perp}) \rangle \quad (18)$$

由(17)、(18)在光纤端面上有:

$$\omega(\mathbf{S}_{1\perp}, \mathbf{S}_{2\perp}) \\ = \iint J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{S}_{1\perp} \cdot \mathbf{u}_1\right] \\ \times \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{S}_{2\perp} \cdot \mathbf{u}_2\right] d\mathbf{u}_1 \cdot d\mathbf{u}_2 \quad (19)$$

#### (1) 多模光纤准均匀场

由(4)及(19)式得:

$$\omega_m(\mathbf{S}_{1\perp}, \mathbf{S}_{2\perp}) \\ = I_0 \iint \exp(-|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2|^2 / 2q_0^2) \\ \times \exp(-|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1|^2 / 2\zeta_0^2) \\ \times \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{S}_{1\perp} \cdot \mathbf{u}_1\right]$$

$$\times \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{S}_{2\perp} \cdot \mathbf{u}_2\right] d\mathbf{u}_1 d\mathbf{u}_2 \\ = \frac{I_0(2\pi\zeta_0 q_0)^2}{4} \\ \times \exp[-|\mathbf{S}_{1\perp} + \mathbf{S}_{2\perp}|^2 / 2\theta_I^2] \\ \times \exp[-|\mathbf{S}_{2\perp} - \mathbf{S}_{1\perp}|^2 / 2\theta_S^2] \quad (20)$$

其中  $\theta_I = \frac{\lambda}{\pi\zeta_0}, \theta_S = \frac{\lambda}{\pi q_0}.$

$\theta_I$  表示光强下降到最大值的  $e^{-2}$  时的角方向,我们称  $|\mathbf{S}_\perp| = \theta_I$  方向与  $z$  轴的夹角为多模光纤的有效发光角(半角)。由(20)式可见第一及第二个指数因子分别表示光强分布及角相关度,与准均匀场的横向分布具有类似的形式,这也是准均匀场的必然结果。光强角分布及角相关度分别为:

$$I_{\phi m}(\mathbf{S}_\perp) = \omega_m(\mathbf{S}_\perp, \mathbf{S}_\perp) \\ = I_0(2\pi q_0 \zeta_0)^2 / 4 \\ \times \exp[-2|\mathbf{S}_\perp|^2 / \theta_I^2]$$

$$\mu_{\phi m} = \exp[-|\mathbf{S}_{2\perp} - \mathbf{S}_{1\perp}|^2 / 2\theta_S^2]$$

下标  $\phi m$  分别表示角向量及多模光纤,  $\theta_S$  为平均角相关长度,表示在多模光纤端面上同一点发出的不同方向的光之间能发生干涉的平均角度差。由  $\theta_S = \lambda/\pi q_0$  可见平均相关角度差多光纤芯径  $a$  无关,只由光纤出射端面光强分布参数  $q_0$  决定。

#### (2) 单模光纤强度均匀的部份相干源

由(9c)及(19)式得:

$$\omega_s(\mathbf{S}_{1\perp}, \mathbf{S}_{2\perp}) \\ = I_0 \iint_{S_b} \exp[-|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 / 2\sigma_r^2] \\ \times \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{S}_{1\perp} \cdot \mathbf{r}_1\right] \\ \times \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{S}_{2\perp} \cdot \mathbf{r}_2\right] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2$$

与推导单模光纤横向统计相关函数类似的运算得到:

$$\omega_s(\mathbf{S}_{1\perp}, \mathbf{S}_{2\perp}) \\ = I_{\phi s}(|\mathbf{S}_{1\perp} + \mathbf{S}_{2\perp}|; \sigma_r) \mu_{\phi s}(\mathbf{S}_{2\perp} - \mathbf{S}_{1\perp}) \quad (22)$$

式中

$$I_{\phi s}(|\mathbf{S}_{1\perp} + \mathbf{S}_{2\perp}|; \sigma_r)$$

$$= \frac{(\pi b)^2 I_0}{4} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2} b} e^{-\rho^2/2\sigma_r^2} \times J_0\left(\frac{k}{2} |S_{2\perp} + S_{1\perp}| \rho\right) \rho d\rho$$

$$\mu_{\phi S}(S_{2\perp} - S_{1\perp}) = \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\sqrt{2}bk}{4} |S_{2\perp} - S_{1\perp}|\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}bk}{4} |S_{2\perp} - S_{1\perp}|\right)} \right]$$

$$I_{\phi S}(S_{\perp}; \sigma_r) = \omega_S(S_{\perp}, S_{\perp}) = \frac{(\pi b)^2 I_0}{4} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2} b} e^{-\rho^2/2\sigma_r^2} \times J_0(k |S_{\perp}| \rho) \rho d\rho$$

表示强度的角分布, 即空间频谱为  $(S_{\perp}, S_{\perp})$  的光强。与多模光纤类似, 最大相关角度差

$$|S_{2\perp} - S_{1\perp}| = \frac{7.666}{\sqrt{2}bk}$$

反比于光纤芯径  $b$ , 光纤芯径越小, 角相关性越好。但其变化规律与多模光纤不同。对于有限的角度差  $|S_{1\perp} - S_{2\perp}|$  相关度存在零值。

### (3) 远场角相关函数

角谱由  $z=0$  到  $z=l$  的传播关系为<sup>[4]</sup>:

$$A(S_{\perp}; l) = A(S_{\perp}; 0) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - |S_{\perp}|^2} l\right)$$

故远场角相关函数为

$$\begin{aligned} \omega(S_{1\perp}, S_{2\perp}; l) &= \langle A^*(S_{1\perp}; l) A(S_{2\perp}; l) \rangle \\ &= \langle A^*(S_{1\perp}; 0) A(S_{2\perp}; 0) \rangle \\ &\quad \times \exp\left[i \frac{2\pi l}{\lambda} (\sqrt{1 - |S_{1\perp}|^2} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{1 - |S_{2\perp}|^2})\right] \\ &= \omega(S_{1\perp}, S_{2\perp}) \\ &\quad \times \exp\left[i \frac{2\pi l}{\lambda} (\sqrt{1 - |S_{1\perp}|^2} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{1 - |S_{2\perp}|^2})\right] \end{aligned} \quad (23)$$

由(23)式可见, 远场的角相关函数除了一附加位相因子外, 与光纤端面上的角相关函数完全一样。光强分布及角相关度与  $l$  无关。这与平面相关函数有明显区别。另外我们注意到当  $|S_{1\perp}| = |S_{2\perp}|$  时, (23)式的位相因子

为 1, 即以  $z$  轴为对称轴的光的统计性质在光纤端面及任何与之平行的平面上是严格一致的。

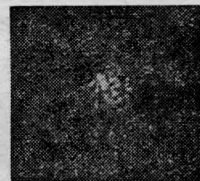
## 三、实验结果及讨论

### 1. 多模光纤强度分布及横向相关长度测量

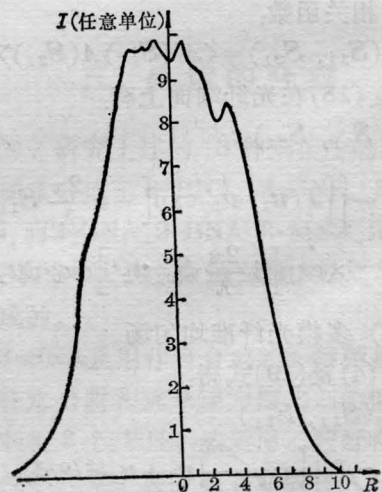
如图 2, He-Ne 激光经 10 倍显微目镜耦合到一段长约 46 m, 芯径约  $40 \mu\text{m}$  的渐变型多模光纤中。在距光纤出射端面为  $l$  的平面上用干板记录衍射光强分布。并对记录的



图 2 多模光纤强度分布的测量  
(多模光纤长 46 m, 芯径  $40 \mu\text{m}$ , 数值孔径 NA. 约 0.17, 渐变型折射率分布)



(a) 多模光纤衍射光斑  $l=1 \text{ cm}$



(b) 多模光纤衍射光斑强度亮度扫描曲线。  
 $l=1 \text{ cm}$  ( $0.17 \text{ mm/div}$ )

强度进行黑度扫描。衍射光斑及黑度曲线如图3(a)、(b)所示。再利用  $\zeta_0 = \lambda / \pi q$  得表1数据。

表 1

$l^*(\text{mm})$	10			20			50			100			
$q(\text{mm})$	1.28	1.28	2.34	2.42	2.04	6.47	6.53	10.75	10.45				
$\zeta_0(\mu\text{m})$	1.57	1.57	1.72	1.67	1.97	1.56	1.54	1.87	1.93				
$\bar{\zeta}_0(\mu\text{m})$	1.71												
$\Delta\zeta_0(\mu\text{m})$	0.14												

( $l^*$  满足菲涅尔条件)

由上表数据可得多模光纤端面的平均相关长度为:

$$\zeta_0 = 1.7 \pm 0.14 (\mu\text{m})。$$

由式  $\theta_r = \lambda / \pi \zeta_0$  可算出多模光纤的有效发光孔径角(半角)为:

$$\theta_{\text{有效}} = \sin^{-1} \theta_r = 6.78^\circ。$$

数值孔径  $\text{N.A.} = 0.17$  的多模光纤的最大入射角(半角)为  $\theta_0 = 9.78^\circ$ 。可见多模光纤的输出光能主要集中在  $\theta_{\text{有效}} = 6.78^\circ$  的范围内, 且  $\theta_{\text{有效}} < \theta_0$ 。

## 2. 单模光纤强度分布及出射端面横向相关长度的测量

图4是测量装置示意图。单模光纤长约30m, 芯径  $5.9 \mu\text{m}$ , 记录平面位于距光纤出射端面  $l$  (满足夫琅和费条件)。图5是记录到的衍射光斑图样及空间频谱强度的黑度扫描曲线。我们看到  $\sigma_r = 2.6 \mu\text{m}$  时, 理论曲线



(a) 单模光纤衍射强度分布的测量

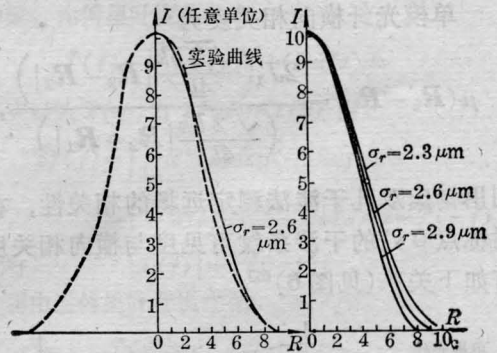


(b) 单模光纤空间频谱强度分布的测量  
(单模光纤长约30m, 芯径  $5.9 \mu\text{m}$ ,  $f = 5 \text{ cm}$ )

图 4

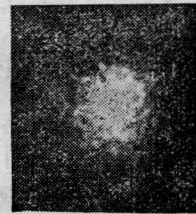


(a)

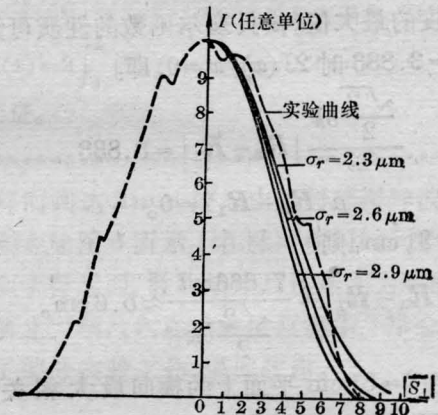


(b) (0.12 mm/div)

(c)



(d)



(e) (0.012/(div))

图 5

(a)  $l = 1 \text{ cm}$  单模光纤衍射花样; (b)  $l = 1 \text{ cm}$ , 单模光纤强度黑度曲线与理论曲线

$$I = I_R \int_0^{\sqrt{2} \rho} e^{-\rho^2 / 2\sigma_r^2} J_0\left(\frac{R}{l} |R| \rho\right) \rho d\rho$$

的比较; (c)  $l = 1 \text{ cm}$ , 端面不同平均相关长度  $\sigma_r$  的单模光纤理论曲线; (d)  $f = 5 \text{ cm}$  单模光纤空间频谱; (e)  $f = 5 \text{ cm}$  单模光纤空间频谱强度分布虚线为实验曲线, 实线为理论曲线

与实验曲线零点及半宽的比较最为接近。由此可知单模光纤端面的横向平均相关长度  $\sigma_r = 2.6 \mu\text{m}$ 。比多模光纤的平均相关长度  $\zeta_0$  大。

### 3. 单模光纤远场横向相关度的测量

单模光纤横向相关度为

$$\mu(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) = \frac{2J_1\left(\frac{\sqrt{2}bk}{4l}|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}bk}{4l}|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|\right)},$$

利用杨氏双孔干涉法测定远场的相关性，在对称点  $O$  处的干涉条纹可见度与横向相关度有如下关系(见图 6)<sup>[5]</sup>：

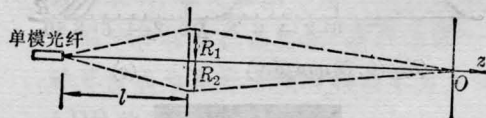


图 6 杨氏双孔法测单模光纤远场横向相关长度

$$V = |\mu(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)|$$

由上式可知当  $\mu = 0$  时干涉条纹可见度  $V = 0$ ，这时的  $|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|$  就是该平面上的横向相关长度的最大值。由贝塞尔函数的性质可知：当  $x = 3.833$  时  $2J_1(x)/x = 0$ ，即：

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}bk}{2l}|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1| = 3.833$$

时  $\mu(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) = 0$ 。

取  $l \approx 31 \text{ cm}$ ，则

$$|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1| = \frac{7.666 \times l}{\frac{\sqrt{2}}{2}bk} \approx 5.6 \text{ cm}。$$

亦即在  $l = 31 \text{ cm}$  平面上的横向最大相关长度的理论值。实验测得的干涉条纹如图 7 所示，当  $|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1| = 5.5 \text{ cm}$  时条纹可见度  $V = 0$ ，这是最大相关长度的实验值，与理论值接近。

从上述实验结果及理论计算可知，用准均匀源及强度均匀的部分相干源分别代表多

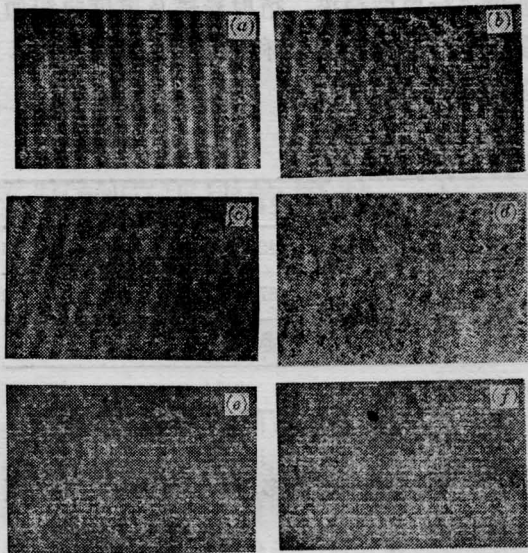


图 7 单模光纤杨氏双孔干涉图( $l = 31 \text{ cm}$ )

- (a)  $|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| = 3.5 \text{ cm}$ ; (b)  $|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| = 3.7 \text{ cm}$ ;  
(c)  $|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| = 4 \text{ cm}$ ; (d)  $|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| = 4.25 \text{ cm}$ ;  
(e)  $|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| = 4.5 \text{ cm}$ ; (f)  $|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| = 5.5 \text{ cm}$

模及单模光纤是基本正确的。实验数据的离散性误差主要来源如下：① He-Ne 激光与光纤不是最佳耦合，这对光纤出射端的散斑统计性性质有很大影响<sup>[6]</sup>。② 记录强度时曝光时间以及显影时间的掌握不是最佳，使得黑度偏离干板的乳胶线性特性。③ 本实验所用的黑度扫描仪的零点起伏较大。

### 参 考 文 献

- [1] W. H. Carter, E. Wolf; *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, **67**, 785~796.
- [2] N. Takai; *J. Opt. Soc. Am.*, 1985, **A2**, 1282~1290.
- [3] L. M. Soroko; *Holography and Coherent Optics* Plenum Press, New York and London.
- [4] J. M.W. Goodman; *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, 1968.
- [5] Max Born, Emil Wolf; *Principle of Optics* (5th ed) Pergamon Press, 1975, 10.4.
- [6] T. Tsuji, T. Asarura; *Optical and Quantum Electronics*, 1984, **16**, 9~18.