

# 三维全屏幕象差特性的研究

徐 昆 贤

(上海市激光技术研究所)

**提要:** 从全息屏幕对投影物镜出瞳象(即视觉区域)的形成及该出瞳象对高斯象的偏离出发,研究了三维全息屏幕的象差特性。

## Study of aberration characteristics for 3-D holographic screens

Xu Kunxian

(Shanghai Institute of Laser Technology)

**Abstract:** The aberration characteristics of 3-D holographic screens are studied on the basis of exit pupil image of projection lens formed by holographic screen and the deviation of exit pupil image from Gauss image.

### 一、引言

由高衍射效率和锐聚焦特性的全息屏幕所组成的三维全息投影系统<sup>[1]</sup>, 由于它能在大视觉区域内获得高亮度的三维屏幕象和大的三维景深<sup>[2]</sup>, 所以它在全息象和实物的三维显示中有着广泛的应用。

在三维全息投影显示系统中, 由全息光学元件组成的全息屏幕既是参加系统成象的光学元件, 又是投影系统的显示屏。全息屏幕作为一个专用光学系统, 其中主要的因素就是它的象差特性。

### 二、全息屏幕的近轴成象

全息屏幕的记录几何学示于图1。屏幕

中心与笛卡尔坐标系重合。屏幕平面位于  $x, y$  平面。图中  $N_i (=O, R)$  是屏幕记录时物点  $O$  和参考点源  $R$  的位置,  $R_i$  是沿主光线从屏幕中心  $O$  到  $N_i$  的距离。  $\alpha_i$  是屏幕法线与  $ON_i$  线的夹角。

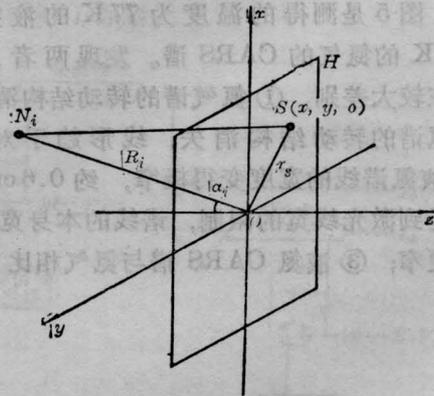


图1 屏幕记录几何学

收稿日期: 1985年9月9日。

全息屏幕的显示几何学如图2所示。 $O$ 是屏幕物空间的一物点(即再现点源); $I$ 是物点 $O$ (经屏幕形成)的近轴象。 $R_o$ 是再现点到屏幕的距离, $R_I$ 是象点到屏幕的距离。

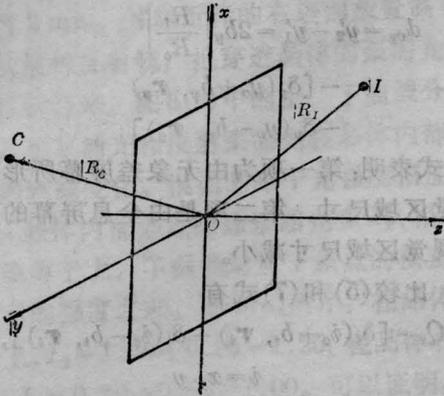


图2 屏幕显示几何学

点源全息图的近轴成象方程<sup>[3]</sup>为:

$$\frac{1}{R_I} = \frac{1}{R_o} \pm \mu \left( \frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_R} \right) \quad (1)$$

式中, $R_i = |\mathbf{r}_i|$ ,  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = O, R, C, I$ ,  $\mu = \lambda_o / \lambda_c$ ,  $\lambda_o$ 是记录波长, $\lambda_c$ 是显示波长。(1)式中参数的符号应按实象关系选择:

对透射屏幕:

$$\text{sign } R_I = -\text{sign } R_o,$$

$$\text{sign } R_R = \text{sign } R_o,$$

对反射屏幕

$$\text{sign } R_I = \text{sign } R_o,$$

$$\text{sign } R_R = -\text{sign } R_o.$$

### 三、全息屏幕的光线象差

在对全息屏幕象差特性的研究中,一种较方便的方法是研究由屏幕对投影物镜出瞳象的形成,并研究该出瞳象对高斯象的偏离 $\delta_i (i = x, y)$ 。如图3所示,投影物镜出瞳上 $O$ 点经屏幕所成的出瞳象 $O'$ 与高斯象 $I$ 的偏离 $O'I$ 即为光线象差 $\delta_i$ ,它是 $\mathbf{r}_o$ 和 $\mathbf{r}_s$ 的函数 $\delta_i = f(\mathbf{r}_o, \mathbf{r}_s)$ 。图中 $\mathbf{r}_o$ 是投影物镜上 $O$ 点的方向矢量; $\mathbf{r}_o = (x_o, y_o, z_o)$ ,  $\mathbf{r}_s$ 是来自

投影物镜出瞳的投射光线在屏幕上的位置的方向矢量, $\mathbf{r}_s = (x_s, y_s, z_s)$ 。

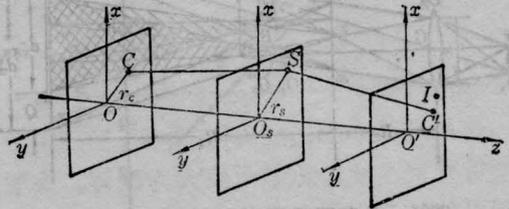


图3 投影物镜出瞳平面、全息屏幕平面和高斯象面的关系

全息屏幕的光线象差分量<sup>[3~5]</sup>可写为:

$$\begin{aligned} \delta_x = & \frac{R_I}{2} A_{00}(x^2 + y^2)x \\ & - \frac{R_I}{2} A_{10}(3x^2 + 3y^2) \\ & - R_I A_{01}xy + R_I A_{20}x + R_I A_{11}y \\ \delta_y = & \frac{R_I}{2} A_{00}(x^2 + y^2)y \\ & - \frac{R_I}{2} A_{01}(3y^2 + 3x^2) \\ & - R_I A_{01}xy + R_I A_{02}y + R_I A_{11}x \end{aligned} \quad (2)$$

式中,

$$\begin{aligned} A_{nm} = & \frac{x_o^n y_o^m}{R_o^3} - \frac{x_s^n y_s^m}{R_s^3} \\ & + \mu \left( \frac{x_o^n y_o^m}{R_o^3} - \frac{x_r^n y_r^m}{R_r^3} \right), \\ & n, m = 0, 1 \end{aligned} \quad (3)$$

因此,由近轴成象公式(1)和光线象差公式(2)及(3)就可确定由投影物镜出瞳 $O$ 点发出的、经在向量半径 $\mathbf{r}_o = (x, y, O)$ 的屏幕处所形成的与投影物镜出瞳平面相共轭的平面上的视觉区域尺寸。

如图4所示,在透镜-屏幕系统中,当屏幕按(1)式近轴成象时,中间象点 $B'$ (由物点 $B$ 经投影物镜所成的象)由屏幕成象在 $B'_s$ ,而当全息屏幕存在象差时,则按(2)式成象在 $B''_s$ 。 $B''_s$ 对高斯象点 $B'_s$ 的偏离 $B'_s B''_s$ 即为屏幕光线象差的度量(对轴上主光线偏离量为 $O'_s O''_s$ )。

对全息屏幕而言,投影物镜出瞳 $d_p$ 与视

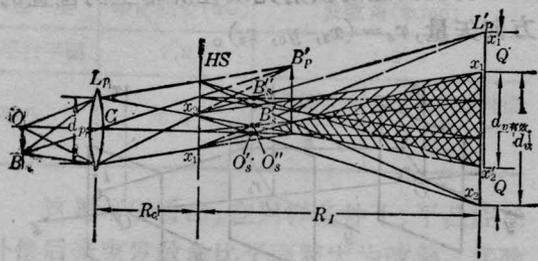


图4 全息屏幕视觉区域的形成光路

视觉区域  $d_v$  是共轭的。也就是说  $d_v$  是  $d_p$  经由屏幕所成的象<sup>[1]</sup>。由图4几何关系可得:

$$d_v = d_p \frac{R_1}{R_0} \quad (4)$$

由图4的几何关系还可知:当屏幕有象差时会使视觉区域  $d_v$  减小。这是由于有象差的屏幕在形成投影物镜出瞳的位置在空间上的不重迭( $d_0$  向上移动了  $Q$  值)。

所以,有象差的全息屏幕的有效视觉区域为:

$$d_{v\text{有效}} = d_p \frac{R_1}{R_0} - Q \quad (5)$$

因此,我们若求出投影物镜出瞳经由屏幕后所形成的物镜出瞳象(即视觉区域)的光线象差,不仅可以对屏幕的象差作出客观评价,而且也可以了解屏幕象差对  $d_v$  变化的影响。

由于全息屏幕的聚焦特性,由屏幕上各向量半径  $\mathbf{r}_s = (x, y, 0)$  处不同部分衍射的光线均会落在每一单元视觉区域内。所以整个全息屏幕的总视觉区域为不同屏幕部分所形成的各单元视觉区域的总和。假定中心位于  $C_0$  处的投影物镜出瞳尺寸为  $2b_i$  ( $i=x, y$ ) 的方形瞳孔时,则在  $x, y$  方向单元视觉区域端点坐标可写为:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + \delta_x(x_0 + b_x, \mathbf{r}_x) \\ x'_2 &= x_2 + \delta_x(x_0 - b_x, \mathbf{r}_x) \end{aligned} \quad (6)$$

和

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_1 + \delta_y(y_0 + b_y, \mathbf{r}_y) \\ y'_2 &= y_2 + \delta_y(y_0 - b_y, \mathbf{r}_y) \end{aligned}$$

因此在近轴近似情况下视觉区域的尺寸可写为:

$$\begin{aligned} d_{vx} &= x'_2 - x'_1 = 2b_x \left| \frac{R_1}{R_0} \right| \\ &\quad - [\delta_x(x_0 + b_x, \mathbf{r}_x) \\ &\quad - \delta_x(x_0 - b_x, \mathbf{r}_x)] \\ d_{vy} &= y'_2 - y'_1 = 2b_y \left| \frac{R_1}{R_0} \right| \\ &\quad - [\delta_y(y_0 + b_y, \mathbf{r}_y) \\ &\quad - \delta_y(y_0 - b_y, \mathbf{r}_y)] \end{aligned} \quad (7)$$

(7)式表明:第一项为由无象差屏幕所形成的视觉区域尺寸,第二项是由全息屏幕的象差使视觉区域尺寸减小。

比较(5)和(7)式有

$$Q_i = [\delta_i(i_0 + b_i, \mathbf{r}_i) - \delta_i(i_0 - b_i, \mathbf{r}_i)], \quad i = x, y \quad (8)$$

对于  $x$  方向( $y=0$ )的屏幕象差可由(2)式直接写出:

$$\begin{aligned} \delta_x(x_0, x_s) &= \left(\frac{1}{2}\right) R_1 A_{00} x^2 \\ &\quad - \left(\frac{3}{2}\right) R_1 A_{10} x^2 + R_1 A_{20} x. \end{aligned} \quad (9)$$

把(3)式代入(9)式,并令  $R_{10} = R_1, R_{c0} = R_0$ 。则可得物镜出瞳象端点的光线象差:

$$\begin{aligned} \delta_x(x_{c0} \pm b_x, x_s) &= \delta_x(x_{c0}, x_s) \\ &\quad \pm \frac{3}{2} R_1 \frac{b_x}{R_0} \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R_1^2}\right) x^2 \\ &\quad \pm 2R_1 \frac{b_x}{R_0} \left(\frac{x_0}{R_0^2} - \frac{x_1}{R_1^2}\right) x \\ &\quad + R_1 \frac{b_x^2}{R_0^2} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right), \end{aligned} \quad (10)$$

一般地,  $b_i/R_0 \ll 1$ , ( $i=x, y$ ), 因此(10)式第二项开始就可略去,故有:

$$\delta_x(x_{c0} \pm b_x, x) = \delta_x(x_{c0}, x) \quad (11)$$

上式表明:投影物镜出瞳范围边缘处( $x_{c0} \pm b_x$ )的光线象差的变化可看作与投影物镜出瞳中心( $x_{c0}$  处)有相等的象差变化。

因此,视觉区域线尺寸可写为:

$$d_v \approx 2b_x (R_1/|R_0|) - \Delta x \quad (12)$$

$$\Delta x = \max_{x_1, x_2} \{ \delta_x(x_{c0}, x_1) - \delta_x(x_{c0}, x_2) \} \quad (13)$$

(13)式表示投影物镜出瞳中心象的弥散斑尺寸。其中  $x_1, x_2$  为屏幕成象范围的坐标。

距屏幕为 $|R|$ 的物点由屏幕所形成的象斑尺寸可写为:

$$\Delta x(R) = \frac{|R|}{R_I} \max_{[x_1, x_2]} \{ \delta_x(x_{00}, x_1) - \delta_x(x_{00}, x_2) \} \quad (14)$$

我们可以按等式(2)和(3)求得列于表1的全息屏幕在不同成象范围上的象差 $\delta_x$ 、 $\delta_y$ 值。图5为屏幕的象差曲线。

表1 全息屏幕不同成象范围上的象差值

屏幕成象范围 $x(y)$ , (mm)	$\delta_x$ (mm)	$\delta_y$ (mm)
-150	-14.10	60.90
-100	-5.60	27.40
-50	-1.50	8.50
0	0	0
50	-10.00	-1.90
100	-34.00	-0.30
150	-74.00	0.60

屏幕在最大成象范围( $x_1 = -150$  mm,  $x_2 = 150$  mm)成象时的弥散斑尺寸可由(14)式求得:

$$\begin{aligned} \Delta x(R) &= \frac{|R_c|}{R_I} \max_{[x_1, x_2]} \{ \delta_{x1} - \delta_{x2} \} \\ &= \frac{1.64}{3.31} [-0.0744 \\ &\quad - (-0.0141)] = -0.0293\text{m} \end{aligned}$$

所以,若投影物镜出瞳尺寸 $2b_x \times 2b_y = 100 \times 100$ 时,由(12)式求得有效视觉区域尺寸为:

(上接第15页)

考式(1)、(2)可以推断, Y. Q. 探测的 X 光是等离子体的韧致辐射,并非复合辐射。因为波形的幅度比远远不符合于式(2)中的 Z 的四次方关系。

应该说明,示波图给出的电压变化,并不能由上式(3)所能表示,只是为了简单分析起见才用它。探头的时间响应函数还得另外推算,本文从略。但 X 光产额依赖于原子序数 Z 的关系是选择靶材的依据,根据这点可以

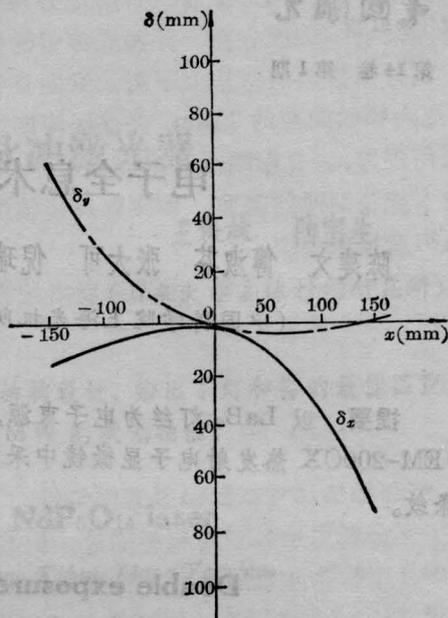


图5 全息屏幕的象差曲线

$$d_{v\text{有效}} = 2b_x(R_I/|R_c|) - \Delta x = 172\text{ mm}$$

我们曾按测量视觉区域平面上的不变照度范围来确定有效视觉区域的尺寸,证明上述结果与实验相一致。

### 参考文献

- [1] 徐昆贤;《仪器仪表学报》,1983, 4, No. 4, 357.
- [2] 徐昆贤;《中国激光》,1983, 10, No. 6, 362.
- [3] E. B. Champagne; *JOSA*, 1967, 57, 51.
- [4] Г. Н. Буйнов и др.; *Опт. и спектр.*, 1973, 34, No. 4, 768~774.
- [5] J. L. Rayces; *Optica Acta*, 1964, 11, 85.

选择各种原子序数的材料,去做特殊目的的实验。

本工作得到邓扬铭、徐至展同志的关心,实验中得到殷光裕同志实验组的大力支持,在此表示感谢。

### 参考文献

- [1] Eugene P. Bertin; "Principles and Practice of X-Ray Spectrometric Analysis", Second Edition, Plenum Press New York, London, 1975.