

双光子激光连续振荡过程的讨论

孙松庚

(南京通信工程学院)

提要: 利用约化的光学布洛赫方程的稳态解, 讨论了双光子激光的连续振荡过程, 得到了双光子过程中激光物质的增益、色散和频率牵引的结果, 并就均匀增宽和非均匀增宽两种情况进行了讨论。

Discussion on two-photon laser oscillation process

Sun Songen

(Nanjing Communication Engineering Institute)

Abstract: Two-photon laser continuous oscillation process in terms of reduced optical Bloch equation is discussed. The formulas on gain and saturation effect, dispersion and frequency pulling of the laser material under the stationary condition are obtained. The results are compared with those of one-photon laser oscillation process

一、引言

对多光子及双光子过程的研究, 近年来进展迅速。文献[1]对任意场强下的单模双光子激光, 在原子模型为多能态时运用 Lamb 的半经典理论得到了双光子振荡的稳态条件。文献[2]运用光学布洛赫方程得到了单光子激光振荡过程中诸如激光物质的增益等特性的结果。

本文考虑的原子模型为多能态, 用 Nurducci 等^[3]的方法消去中间态化为二能态问题。在旋波近似下得到包括 $R_3^0(|C_0^0|^2 - |C_0^1|^2)$, 即初始几率差的光学布洛赫方程, 通

过该方程的稳态解, 讨论双光子激光连续振荡过程中具有均匀增宽和非均匀增宽谱线的激光物质的增益、饱和效应、色散和频率牵引, 且与单光子的结果进行了比较。可以看出本方法简单明了, 能同时得到双光子激光中色散和频率牵引均与场强有关的结果。

二、双光子激光的光学布洛赫方程

原子模型为多能态, 非简并态 $|a\rangle$ 、 $|b\rangle$ 具有相同的宇称, 直接偶极跃迁禁戒。中间态 $|j\rangle$ 和 $|a\rangle$ 、 $|b\rangle$ 偶极耦合^[3]。

收稿日期: 1985年10月31日。

$$H = E_a |a\rangle\langle a| + E_b |b\rangle\langle b| + \sum_j E_j |j\rangle\langle j| - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(z, t) \quad (1)$$

其中光场为:

$$E(z, t) = E_0 \cos(\nu t - kz) \quad (2)$$

且设 $E_0(t)$ 是慢变包络,

$$2\nu \approx \frac{E_b - E_a}{\hbar} = \omega_b - \omega_a \quad (6) \text{ 式可表示成}$$

薛定谔方程:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H |\psi(t)\rangle \quad (3)$$

式中

$$|\psi(t)\rangle = \sum_j C_j(t) e^{-iE_j t/\hbar} |j\rangle + C_a(t) e^{-iE_a t/\hbar} |a\rangle + C_b(t) e^{-iE_b t/\hbar} |b\rangle \quad (4)$$

定义变量

$$R_1 = C_a(t) C_b^*(t) e^{-i\Omega t} + C_a^*(t) C_b(t) e^{-i\Omega t} \quad (5.a)$$

$$R_2 = i(C_a^*(t) C_b(t) e^{i\Omega t} - C_a(t) C_b^*(t) e^{-i\Omega t}) \quad (5.b)$$

$$R_3 = |C_b(t)|^2 - |C_a(t)|^2 \quad (5.c)$$

在旋波近似下有

$$\dot{R}_1 = \tilde{\Omega} R_2 - \frac{R_1}{T_2} \quad (6.a)$$

$$\dot{R}_2 = -\tilde{\Omega} R_1 + \omega_R R_3 - \frac{R_2}{T_2} \quad (6.b)$$

$$\dot{R}_3 = -\omega_R R_2 - \frac{R_3 - R_3^0}{T_1} \quad (6.c)$$

式中 $\tilde{\Omega} = \Omega + \gamma \omega_R$,

$$\gamma = \frac{k_{bb} - k_{aa}}{2k_{ab}}$$

$$\Omega = 2\nu - \omega_{ba} - 2k\nu z,$$

$$k_{aa} = \frac{2}{\hbar} \sum_j \mu_{ja}^2 \frac{\omega_{ja}}{(\omega_{ja}^2 - \nu^2)}$$

$$k_{bb} = \frac{2}{\hbar} \sum_j \mu_{jb}^2 \frac{\omega_{jb}}{(\omega_{jb}^2 - \nu^2)},$$

$$k_{ab} = \frac{1}{\hbar} \sum_j \frac{\mu_{ja} \mu_{jb}}{\omega_{jb} + \nu}$$

$$\mu_{ji} = -e \langle i | \gamma | j \rangle,$$

$$\omega_{ji} = \frac{E_j - E_i}{\hbar} \quad (i = a, b)$$

$$\mu_{ji} = \mu_{ij}^*$$

这里 $\omega_R = \frac{k_{ab}}{2\hbar} E_0^2$ 为约化 Rabi 翻转频率;

$|C_a^0|^2$ 、 $|C_b^0|^2$ 为系统处在平衡状态或非相干激发时原子处在 $|a\rangle$ 、 $|b\rangle$ 上的几率, 与 [3] 不同的是我们引进了几率差 $R_3^0 = |C_b^0|^2 - |C_a^0|^2$; T_1 、 T_2 表示唯象的阻尼的弛豫时间。

(6) 式可表示成

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta} - \frac{i\mathbf{R}_1 + \mathbf{j}R_2}{T_2} - \frac{\mathbf{k}(R_3 - R_3^0)}{T_1} \quad (7)$$

式中 $\mathbf{B} = (R_1, R_2, R_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (\omega_R, 0, \tilde{\Omega})$, 上式为约化二能态双光子光学布洛赫方程, \mathbf{B} 为 Bloch 矢量, $\boldsymbol{\beta}$ 为约化有效场。 \mathbf{B} 为抽象的三维数学空间中矢量, 其分量有明确的物理意义,

$$P = N \langle \psi | p | \psi \rangle = NT_r(\rho p) = N E_0 k_{ab} \left\{ \left[R_1 - \gamma R_3 - \frac{k_{aa} + k_{bb}}{2k_{ab}} \right] \times \cos(\nu t - kz) - R_2 \sin(\nu t - kz) \right\} \quad (8)$$

与单光子相比, 极化不仅与横向分量

R_1 、 R_2 有关, 且与纵向分量 R_3 及 $\frac{k_{aa} + k_{bb}}{2k_{ab}}$

有关。在 $\nu \rightarrow 0$ (即 $k_{aa} \approx k_{bb}$) 时, Bloch 矢量的横向分量 \tilde{R}_1 与 R_2 分别对应于感应极化强度中与外场同相和正交的分量。这里

$$\tilde{R}_1 = R_1 - \frac{k_{aa} + k_{bb}}{2k_{ab}}.$$

又

$$NR_3 = N(|C_b|^2 - |C_a|^2) = N_b - N_a = \Delta N \quad (9)$$

纵向分量与系统中处于能级 $|b\rangle$ 、 $|a\rangle$ 上的原子数差或反转原子数 ΔN 成正比。

三、双光子过程激光物质的特性

感应极化强度由一般理论有^[4]

$$P = \epsilon_0 \chi' E_0 \cos(\nu t - kz) - \epsilon_0 \chi'' E_0 \sin(\nu t - kz) \quad (10)$$

由 (10) 和 (8) 可得

$$Nk_{ab}R_3 = \varepsilon_0 \chi'' \quad (11.a)$$

$$Nk_{ab} \left(R_1 - \gamma R_3 - \frac{k_{aa} + k_{bb}}{2k_{ab}} \right) = \varepsilon_0 \chi' \quad (11.b)$$

进一步由式 $G = \frac{2\nu}{C} \chi''$ 和 $n = 1 + \frac{1}{2} \chi'$ 可得

$$G = \frac{2Nk_{ab}\nu}{C\varepsilon_0} R_3 \quad (12)$$

和

$$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{Nk_{ab}}{\varepsilon_0} \left(R_1 - \gamma R_3 - \frac{k_{aa} + k_{bb}}{2k_{ab}} \right) \quad (13)$$

由方程(6)求出稳态条件下的 R_1 、 R_2 和 R_3 ，再由(12)和(13)式可求得双光子激光振荡时 G 和 n 的表达式：

$$G = \frac{k_{ab}^2 \nu E_0^2}{\varepsilon_0 C \hbar} \frac{T_2^{-1}}{\Omega^2 + T_2^{-2}(1+\Delta)} \Delta N^0 \quad (14)$$

$$n = 1 + \frac{1}{2\varepsilon_0} \left\{ \frac{k_{ab}^2}{2\hbar} E_0^2 \frac{\tilde{\Omega}}{\tilde{\Omega}^2 + T_2^{-2}(1+\Delta)} - \frac{k_{bb} - k_{aa}}{2} \frac{\tilde{\Omega}^2 + T_2^{-2}}{\tilde{\Omega}^2 + T_2^{-2}(1+\Delta)} - \frac{k_{bb} + k_{aa}}{2R_3^0} \right\} \Delta N^0 \quad (15)$$

$$\Delta N = \frac{\tilde{\Omega}^2 + T_2^{-2}}{\tilde{\Omega}^2 + T_2^{-2}(1+\Delta)} \Delta N^0 \quad (16)$$

式中 $\Delta = \omega_r^2 T_1 T_2 = \left(\frac{k_{ab}}{2\hbar} E_0^2 \right)^2 T_1 T_2$ 。当 E_0 较小时，即当 $\Delta \ll 1$ ，且 $k_{aa} \approx k_{bb}$ 时有

$$G = \frac{k_{ab}^2 \nu}{\varepsilon_0 C \hbar} E_0^2 \frac{T_2^{-1}}{\Omega^2 + T_2^{-2}} \Delta N^0 \quad (17)$$

$$n = 1 + \frac{1}{2\varepsilon_0} \left[\frac{K_{ab}^2 E_0^2}{2\hbar} \frac{\Omega}{\Omega^2 + T_2^{-2}} - \frac{k_{aa}}{R_3^0} \right] \Delta N^0 \quad (18)$$

$$\Delta N = \Delta N^0 \quad (19)$$

(17)~(19)为小信号近似下的增益、色散和反转原子数的表达式。可见与单光子不同，增益与 k_{ab}^2 成正比而不是与 μ_{12}^2 成正比。这是直接偶极跃迁禁戒、中间态 $|j\rangle$ 和 $|a\rangle$ 、 $|b\rangle$ 间接耦合的结果。色散与 E_0^2 有关，而不是单光子激光振荡时的色散与 E_0 成正比的那种情况。此外，与单光子相同的是在连续

振荡时，反转原子数不变， $\Delta N = \Delta N^0$ 。

当 Δ 与 1 相比不能忽略时，增益和反转原子数均比小信号时小。 Δ 和单光子时的 s 一样描述了饱和效应的特性可称为饱和参量，饱和条件由 $\Delta \gg 1$ 给出。设 $T_1 = T_2$ ，从 Δ 的定义可得

$$\frac{k_{ab} E_0^2}{2\hbar} \geq T_2^{-1} \quad (20)$$

由(20)式，当 E_0 增大时，双光子激光的饱和比单光子易于达到，状态变化速率与 E_0^2 成正比。 $E_0 \geq \sqrt{2\hbar T_2^{-1}/k_{ab}}$ 时即达到饱和。

四、均匀增宽情形

对静止原子或 Doppler 频移可以忽略时，有 $\tilde{\Omega} = 2\nu - \omega_{ba} + \gamma \frac{k_{ab}}{2\hbar} E_0^2$ ，此时均匀增宽小信号增益系数为

$$G_h^0(2\nu) = \frac{\pi k_{ab}^2 \nu}{\varepsilon_0 C \hbar} E_0^2 \Delta N^0 g_h(2\nu, \omega_{ba}) \quad (21)$$

式中

$$g_h(2\nu, \omega_{ba}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta\nu}{\left(\nu - \frac{\omega_{ba}}{2} + \gamma \frac{k_{ab}}{4\hbar} E_0^2 \right)^2 + (\Delta\nu)^2} \quad (22)$$

为均匀增宽的 Lorentz 型线型函数，该函数与光波场强度有关，这与单光子相应的 Lorentz 型线型函数与 E_0 有关是不一样的。

$\Delta\nu = \frac{T_2^{-1}}{2}$ 是增益曲线的半最大值半宽度。在 $2\nu = \omega_{ba} - \gamma \frac{k_{ab}}{2\hbar} E_0^2$ 时共振发生，令 $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{ba} = 2\nu + \frac{\gamma k_{ab}}{2\hbar} E_0^2$ 。仅当 $\gamma \sim 0$ 时线型函数与 E_0 无关。

与文献[5]的三能级双光子增益公式(8)比较， G 与(8)式的第二项是一致的。文献[5]的(8)式中第一项与单光子过程有关，我们求得的 G 仅涉及纯双光子过程。与文献[2]的单光子过程相比不是在 $2\nu = \omega_{ba}$ ，而是在 $2\nu =$

$\omega_{ba} - \gamma \frac{\nu k_{ab}}{2\hbar} E_0^2$ 时准确共振。共振时的 G 为:

$$G_h^0(\tilde{\omega}_{ba}) = \frac{k_{ab}^2 \nu}{2\varepsilon_0 C \hbar \Delta \nu} E_0^2 \Delta N^0 \quad (23)$$

均匀增宽大信号增益系数由(14)式得

$$G_h(\omega_{ba}) = G_h^0(\tilde{\omega}) \frac{(2\Delta\nu)^2}{\tilde{\Omega}^2 + (2\Delta\nu)^2(1+\Delta)} \quad (24)$$

式中 $G_h^0(\tilde{\omega})$ 为共振时的小信号增益系数。

增益曲线等效半宽度为 $\delta(2\nu) = \Delta(2\nu) \times (1+\delta)^{\frac{1}{2}}$, Δ 与单光子时的 s 相比说明等效半宽度与 E_0 有关而不是与 $E_0^{\frac{1}{2}}$ 有关, 且饱和效应与 2ν 相关, 在 ν 偏离

$$\frac{1}{2} \left(\omega_{ba} - \gamma \frac{k_{ab}}{2\hbar} E_0^2 \right)$$

越远时饱和效应越弱, 当

$$\nu = \frac{1}{2} \left(\omega_{ba} - \gamma \frac{k_{ab}}{2\hbar} E_0^2 \right)$$

时有

$$G_h(\tilde{\omega}_{ba}) = G_h^0(\tilde{\omega}_{ba}) / (1+\Delta) \quad (25)$$

具有均匀增宽谱线的激光物质双光子激光振荡过程中在 $\nu = \frac{1}{2} \left(\omega_{ba} - \gamma \frac{k_{ab}}{2\hbar} E_0^2 \right)$ 附近的色散关系为

$$n_h(2\nu) = 1 + \frac{k_{ab}^2}{4\varepsilon_0 \hbar} \times \left[\frac{(2\nu - \omega_{ba}) E_0^2}{(2\nu - \omega_{ba})^2 + (2\Delta\nu)^2(1+\Delta)} - \frac{2k_{aa}}{k_{ab}^2 R_R^0} \right] \Delta N^0 \quad (26)$$

这里设 $k_{aa} \approx k_{bb}$, 即 $\gamma \rightarrow 0$, 这是中间能态的一种可实现的情形, 由(24)和(26)可得增益系数和色散的关系为:

$$n_h(2\nu) = 1 + \frac{C(2\nu - \omega_{ba})}{2(2\nu)\Delta(2\nu)} \times (1 - BE_0^2) G_h(2\nu) \quad (27)$$

式中

$$B = \frac{2k_{aa}}{(k_{ab})^2 R_R^0} \frac{(2\nu - \omega_{ba})^2 + (2\Delta\nu)^2(1+\Delta)}{2\nu - \omega_{ba}}$$

在阈值条件下, 由色散引起的线性频率牵引为:

$$\nu' - 2\nu = \frac{\Delta\nu_0}{\Delta\nu} \left(\frac{\omega_{ba}}{2} - \nu \right) (1 - BE_0^2) \quad (28)$$

式中 ν' 为有源腔的纵模频率, $\Delta\nu_0$ 为无源腔的半宽度, 在均匀增宽情况下与单光子振荡时不同, 其频率牵引与光波场强度有关, 这与文献[1]的结果是一致的。

五、非均匀增宽情形

对双光子激光振荡过程中具有非均匀增宽谱线的激光物质, Doppler 频移不能忽略时应考虑具有各种速度的全部原子对增益的贡献。设处于高、低能级上的原子具有相同的热运动速度分布, 由(17)式可得非均匀增宽小信号增益系数为:

$$G_i(2\nu) = \frac{\pi k_{ab}^2 \nu}{C \varepsilon_0 \hbar} E_0^2 \Delta N^0 g_i(2\nu, \omega_{ba}) \quad (29)$$

其中

$$g_i(2\nu, \omega_{ba}) = \frac{1}{\Delta\omega_d} \left(\frac{\ln 2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \times \exp \left[- \left(2\nu - \omega_{ba} + \gamma \frac{k_{ab}}{2\hbar} E_0^2 \right)^2 \cdot \frac{\ln 2}{\Delta\omega_d^2} \right]$$

是非均匀增宽谱线的高斯型线型函数, 而

$$\Delta\omega_d = \left(\omega_{ba} - \gamma \frac{k_{ab}}{2\hbar} E_0^2 \right) \left(\frac{2K_B T}{m} \ln 2 \right)^{\frac{1}{2}} / C \quad (30)$$

为 Doppler 半宽度, $\Delta\omega_d$ 与 E_0^2 有关, 而单光子激光均匀、非均匀增宽时半宽度与 E_0 无关。双光子激光小信号均匀增宽时的半宽度 $\Delta\nu = \frac{T_2^{-1}}{2}$ 与 E_0 无关, 但 $\Delta\omega_d$ 随 E_0 的增大而减小是 E_0 的二次函数。 G_i 与 G_h^0 相比, 随 E_0 的增大而减小的速率大得多。在

$\nu = \frac{\omega_{ba}}{2} - \gamma \frac{k_{ab}}{4\hbar} E_0^2$ 时共振, 此时有

$$G_i^0(\tilde{\omega}_{ba}) = \frac{k_{ab}^2 \nu E_0^2}{C \varepsilon_0 \hbar \Delta\omega_d} (\pi \ln 2)^{\frac{1}{2}} \Delta N^0 \quad (31)$$

(下转第7页)

考光束和信号光束分别经滤光器 F_1 和 F_2 滤除背景光并由光电倍增管 PMT_1 和 PMT_2 接收, 经过电信号的放大。模数转换最后由数字记录系统记录。逐点改变光学延迟线就可测得如图 4 中实线所示的三级相关函数曲线。

由图 3 和图 4 的曲线可清楚地看出, 二

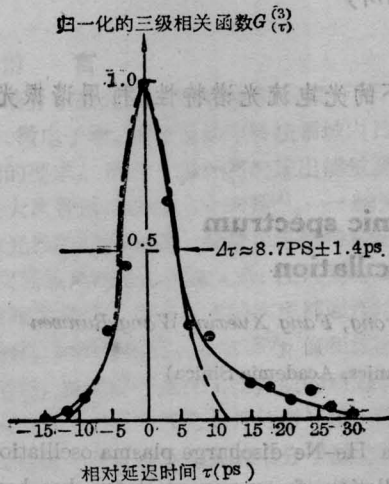


图 4 用三次谐波法测得的三级相关函数曲线
实线为实验曲线, 虚线为理论曲线

级相关函数曲线基本上是对称的, 不能反映光脉冲的形状, 而三级相关函数则呈现出轻微的不对称性, 也即光脉冲的形状是不对称的, 具有较陡的上升前沿和较慢的下降后沿, 这与被动锁模激光器输出光脉冲形状的理论计算曲线是相符的^[3]。我们将实验结果与由高斯线型的理论计算公式^[4],

$$I(t) = \frac{I_0}{\sqrt{\pi}} \frac{2(\ln 2)^{1/2}}{\Delta t_{1/2}} \times \exp\left(-4 \ln 2 \frac{t^2}{\Delta t_{1/2}^2}\right) \quad (5)$$

计算的结果进行了比较。由图可见, 除了实验曲线的尾部之外, 光脉冲的形状是接近高斯线型的。由图 4 的实验曲线和公式 (4) 计算的脉宽为 7 ± 1 ps, 与 TPF 方法测量的 8 ps 是一致的。

参 考 文 献

- [1] D. H. Auston; *Appl. Phys. Lett.*, 1971, **18**, 249.
- [2] R. C. Eckardt; C. H. Lee; *Appl. Phys. Lett.*, 1969, **15**, 425.
- [3] 朱振和; 《物理学报》, 1985, **34**, 611.
- [4] A. W. Smith, A. J. Landon; *Appl. Phys. Lett.*, 1970, **17**, 340.

(上接第 4 页)

同样由 (14) 式求得 Doppler 极限近似下的非均匀增宽大信号增益系数为:

$$G_i(2\nu) = \frac{G_i^0(\tilde{\omega}_{ba})}{(1+\Delta)^{1/2}} \exp\left[-\left(2\nu - \omega_{ba} + \gamma \frac{k_{ab}}{2\hbar} E_0^2 \ln 2 / \Delta \omega_a^2\right)^2\right] \quad (32)$$

共振时, 即 $\nu = \frac{\omega_{ba}}{2} - \gamma \frac{k_{ab} E_0^2}{4\hbar}$ 时, 有

$$G_i(\tilde{\omega}_{ba}) = G_i^0(\tilde{\omega}_{ba}) / (1+\Delta)^{1/2} \quad (33)$$

可见, 无论是均匀增宽或非均匀增宽, 共振时, 大信号增益系数都是其相应小信号增益系数的 $(1+\Delta)^{-1/2}$ 。

参 考 文 献

- [1] 汪志诚; 《光学学报》, 1983, **3**, No. 1, 36.
- [2] 李长江; 《中国激光》, 1983, **10**, No. 10, 692.
- [3] M. Narducci; *Phys. Rev. A*, 1977, **16**, No. 4, 1665.
- [4] 周炳琨; “激光原理”, 国防工业出版社, 1984, 11, p. 128.