

用多张全息干涉图测定空间位移场的一种快速算法

王仕璠 范雅林

(成都电讯工程学院)

提要: 讨论用多张全息干涉图测定微小空间位移场的一种快速算法, 介绍了投影变换矩阵、计算公式及实验计算实例。结果表明, 这种快速算法对于处理复杂形体的微小变位是方便而有效的。

A fast algorithm for determination of minute spatial displacement field from multiple interferometric holograms

Wang Shifan, Fan Yalin

(Chengdu Institute of Radio Engineering)

Abstract: A fast algorithm for quantitative determination of minute spatial displacement field is discussed. First, fringes observed with orthogonal slit aperture is used to determine two components of object displacement transverse to the observation direction. Then the projection transformation is used to calculate spatial displacement. The projection matrix, operational formula, FORTRAN program and experimental results show that this algorithm is convenient and valid for dealing with minute displacement and deformation of complex objects.

一、引言

在文献[1]中, 本文作者之一介绍了应用单张全息干涉图, 通过多次观察来测定微小三维位移场的一种快速算法, 它具有简单、快速等优点。但因通常作实验时, 全息图的尺寸不易取得很大, 它所张的立体角较小, 因而各个观察方向所对应的灵敏度矢量近于平行。定量分析表明: 随着灵敏度矢量之间的

夹角减小, 测量条纹移动数所要求的精度增加^[2]。换言之, 条纹移动数测量中的小误差将被放大, 从而导致算出的位移值 L_x 、 L_y 、 L_z 不够准确。采用多余观测形成超定方程组(象文献[1]中所作的那样), 固然能使精度得到改善, 但我们也可从增大灵敏度矢量之间的夹角入手。为此, 常采用多全息图系统, 即从不同的观察方向同时拍摄多张全息干涉图。首先应用正交狭缝孔径, 通过各张全息

收稿日期: 1985年6月3日。

图测定垂直于观察方向的面内位移, 然后应用投影变换来计算空间位移矢量。采用此法处理位移场时, 计算其中任一点的位移都不必象单全息图分析法那样使用多次观察, 因而这种方法的实验测定和运算过程并不比用单张全息图分析法复杂。分析和计算表明: 这种快速算法对于处理微小变位是方便而有效的, 它可以用于一系列的研究领域中。

二、基本原理

由条纹定域理论已知^[3]: 应用正交狭缝孔径可以确定物点在垂直于观察方向的平面内的位移(称为观察横向位移)。办法是通过其中每一个狭缝测出面内位移在平行于该狭缝方向的一个位移分量(竖直分量或水平分量), 所用的公式为:

$$L_{op} = \lambda \frac{D_0}{d_0} \quad (1)$$

式中 λ 代表激光波长, D_0 代表狭缝到待测物

点之间的距离, d_0 代表观测者通过狭缝观察干涉条纹过程中, 改变观察方向使得有一个条纹越过待测物点时, 观察点移过的距离(图 1); L_{op} 即代表垂直于观察方向并平行于狭缝的位移分量。由正交狭缝测得的两个面内位移分量合起来, 即得观察横向位移。

待测物点的空间位移并不一定正好在垂直于观察方向的平面内。但可以把上述观察横向位移认为是空间位移的一个投影。如图 2, L 表示某空间位移, L_p 代表 L 在以 \hat{K}_2 为法线的平面上的投影。由图上看:

$$L_p = L - \hat{K}_2 (\hat{K}_2 \cdot L) \quad (2)$$

式中 \hat{K}_2 代表观察方向上的单位矢量。如以待测物点作为直角坐标系的原点(图 3), 则有

$$\hat{K}_2 = \mathbf{R}_2 / |\mathbf{R}_2| \quad (3a)$$

或

$$\begin{cases} \hat{K}_{2x} = R_{2x} / |\mathbf{R}_2| \\ \hat{K}_{2y} = R_{2y} / |\mathbf{R}_2| \\ \hat{K}_{2z} = R_{2z} / |\mathbf{R}_2| \end{cases} \quad (3b)$$

式中 $|\mathbf{R}_2| = \sqrt{R_{2x}^2 + R_{2y}^2 + R_{2z}^2}$

\mathbf{R}_2 代表观察点的位置矢量。

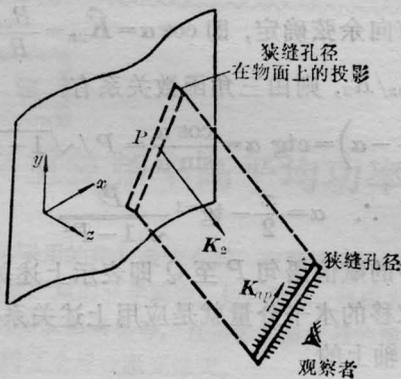
式(2)可写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} L_{px} \\ L_{py} \\ L_{pz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{K}_{2x} \\ \hat{K}_{2y} \\ \hat{K}_{2z} \end{pmatrix} \times (\hat{K}_{2x} \quad \hat{K}_{2y} \quad \hat{K}_{2z}) \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} \\ = \left[\tilde{I} - \begin{pmatrix} \hat{K}_{2x} \\ \hat{K}_{2y} \\ \hat{K}_{2z} \end{pmatrix} (\hat{K}_{2x} \quad \hat{K}_{2y} \quad \hat{K}_{2z}) \right] \times \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} \quad (4)$$

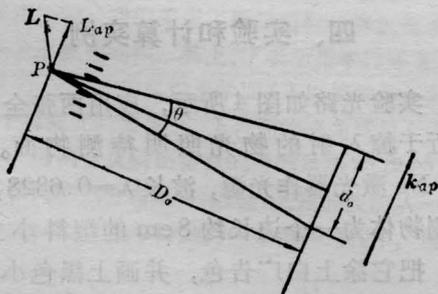
或简写成

$$L_p = \tilde{P}L \quad (5)$$

式中



(a) 观察系统的几何结构



(b) 通过狭缝看到的定域条纹

图 1 通过狭缝孔径观察条纹

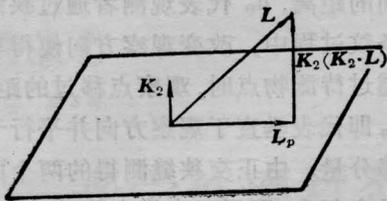


图2 矢量投影

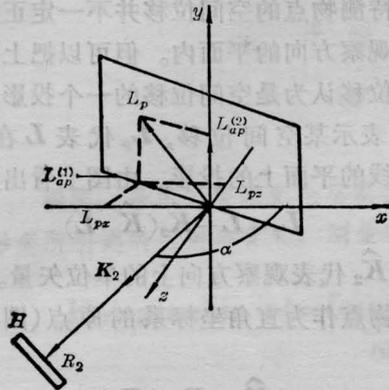


图3 观察方向的角度关系

$$\underline{P} = \underline{I} - \begin{pmatrix} \hat{K}_{2x} \\ \hat{K}_{2y} \\ \hat{K}_{2z} \end{pmatrix} (\hat{K}_{2x} \quad \hat{K}_{2y} \quad \hat{K}_{2z}) \quad (6)$$

$$\underline{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

\underline{P} 代表一个变换矩阵, 它把位移矢量 \underline{L} 投影到以 \hat{K}_2 为法线的平面上形成投影 \underline{L}_p , 故 \underline{P} 称为投影变换矩阵。由式(3)及式(6)知, \underline{P} 只与观察点位置矢量 \underline{R}_2 有关, 并且容易验证:

(i) \underline{P} 是对称矩阵, 且 $\underline{P}\underline{P} = \underline{P}$ 。

(ii) \underline{P} 的行列式等于 0, 故 \underline{P} 是降秩矩阵, 无逆矩阵。

显然, 仅由方程式(5)求解 \underline{L} 是不行的, 必须形成超定方程组。这就需要从不同的观察方向同时拍摄多张全息干涉图。对每张全息图可得类似于式(5)的一个方程, n 张全息图就有 n 个方程。结果可得

$$\begin{pmatrix} \underline{L}_{p1} \\ \underline{L}_{p2} \\ \vdots \\ \underline{L}_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \\ \vdots \\ \underline{P}_n \end{pmatrix} \underline{L} \quad (7)$$

用 $(\underline{P}_1^T \underline{P}_2^T \dots \underline{P}_n^T)^*$ 乘式(7)两端, 并利用 $\underline{P}_i (i=1, 2, \dots)$ 的对称性, 容易得到:

$$\underline{L} = \left[\sum_{i=1}^n \underline{P}_i^T \right]^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \underline{L}_{pi} \right) \quad (8a)$$

在简单的情况下, 可取 $n=2$, 这时有

$$\underline{L} = [\underline{P}_1 + \underline{P}_2]^{-1} (\underline{L}_{p1} + \underline{L}_{p2}) \quad (8b)$$

式(8)就是应用多张全息干涉图计算空间位移的公式。根据最小二乘法原理可以证明, 用式(8)求得的结果具有最小均方误差。

三、计算机程序介绍

根据前节介绍的各关系式, 我们编制了一个计算机程序。它由一个主程序和一个求逆矩阵的子程序构成。首先输入原始数据 (包括 $\lambda, d_{01}^{(i)}, d_{02}^{(i)}, D_0^{(i)}, R_{2x}^{(i)}, R_{2y}^{(i)}, R_{2z}^{(i)}$), 然后按式(6)计算 \underline{P}_i , 按式(1)计算横向位移的两个分量 $L_{ap1}^{(i)}, L_{ap2}^{(i)}$, 并将此横向位移投影到各坐标轴上 (见图3); 最后把它们代入公式(8)中计算位移。图3中的角度 α 由 $\hat{K}_2^{(i)}$ 在 x 方向的方向余弦确定, 即 $\cos \alpha = \hat{K}_{2x} = \frac{R_{2x}}{R_2}$ 。令

$P = R_{2x}/R_2$, 则由三角函数关系有

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = P / \sqrt{1 - P^2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{P}{\sqrt{1 - P^2}} \quad (9)$$

程序中的赋值语句 P 至 Q 即表示上述关系。横向位移的水平分量就是应用上述关系投影到 x, z 轴上的。

四、实验和计算实例

实验光路如图4所示, 应用两张全息片与近于掠入射的物光照明待测物面。以 He-Ne 激光器作光源, 波长 $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ 。待测物体为一个边长约 8cm 的塑料小立方体, 把它涂上白广告色, 并画上黑色小方格后, 固定在一个装有测微螺旋可微微旋转的

* P_i^T 表示 P_i 的转置矩阵, 余类推。

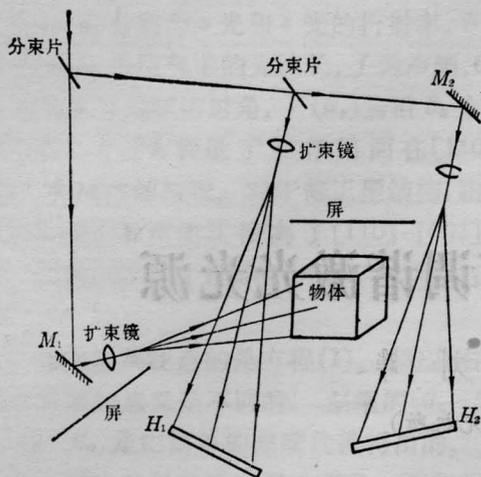


图4 实验光路

支架上,以便作整体的微小位移。实验中还采用一只千分表(精度为 $1\mu\text{m}$,量程 $100\mu\text{m}$),将触针顶在小立方体的一侧,便于估计二次曝光之间的微小位移值。 d_{01} 、 d_{02} 值的读取系通过放在观察者和二次曝光全息图

表1 原始数据举例

干板序号	$D_0^{(1)}$ (cm)	$d_{01}^{(1)}$ (cm)	$d_{02}^{(1)}$ (cm)	R_{2x} (cm)	R_{2y} (cm)	R_{2z} (cm)
1	15.60	0.456	0.683	14.70	1.10	10.60
2	19.30	0.373	0.586	4.20	0.50	14.30

之间的单缝进行。实验测得的原始数据如表1。

容易看到,如果调好光路后固定该光路系统,则 $D_0^{(1)}$ 、 $D_0^{(2)}$ 及 $R_2^{(1)}$ 、 $R_2^{(2)}$ 都可视为常数,因而在各次测量时只需测定各 d_{01} 、 d_{02} 值,输入计算机就可进行快速计算。

计算结果列于表2。实验中千分表的读数是 $41.5\mu\text{m}$ 。可见计算值与千分表读数是基本吻合的。

表2 计算结果

$L_x(\mu\text{m})$	$L_y(\mu\text{m})$	$L_z(\mu\text{m})$	$L(\mu\text{m})$
37.842	18.920	3.564	42.458

如果需要测定物面上各点的微小变位,只需重复本文所述过程即可。因而用这种方法实际可以测定空间位移场和全场形变。

参 考 文 献

- [1] 王仕璠;《中国激光》,1985,12, No. 11, 699
- [2] C. M. Vest;“全息干涉度量学”(第二章),机械工业出版社,1984年7月。
- [3] C. M. Vest;“全息干涉度量学”(第三章),机械工业出版社,1984年7月。
- [4] K. A. Stetson; *J. Opt. Soc. Am.*, 1979, 69, 1705.



简 讯

LRZ-1 型激光喇曼光谱仪研制成功

经过五年多的努力,浙江大学光仪系研制成功了“LRZ-1型激光喇曼光谱仪”,并于6月5日至7日由国家教委科技司组织了技术鉴定。

该仪器是我国自行研制的第一台带微机的激光喇曼光谱仪,它采用了新型线性编码器和计算机闭环控制技术,并设计了性能稳定的高精度波数扫描机构。仪器可以手控,也可用微机控制,能以多种方式采集、处理、显示和输出光谱数据,具有平滑、累

加、微分、找峰等多种功能,能满足常规测试和一般科研工作的需要。

与会代表认为,该仪器达到和超过了原定设计指标,在国内处领先地位,其功能和主要技术指标达到了国外80年代初同类仪器的水平。它的研制成功,说明我国在大型精密光谱仪器的研制方面又前进了一步。

(吉禾)