中国激光
第13卷 第7期

行波场 Wiggler 自由电子激光器

陆瑞征 (同济大学物理系)
雷仕湛 (中国科学院上海光机所)

提要：分析了辐射行波场Wiggler自由电子激光器的工作状态，计算了激光器的增益，分析了获得正增益的条件。

Free-electron lasers with travelling wave field wiggler

Lu Ruizheng
(Physics Department, Tongji University)
Lei Shizhan
(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: The working state of Free-electron lasers with travelling wave radiation field wiggler is analysed, the laser gain is calculated and the conditions for obtaining gains are also analysed.

自由电子激光器输出的辐射波长与相对论电子的能量和 wiggler 的空间周期长度 λ_w 的关系是[1]:

$$\lambda_r=\frac{\lambda_w}{2\gamma^2}(1+k^2) \tag{1}$$

式中 γ 是相对论电子的动能与静止质量能的比值，也称相对论因子，其定义为

$$\gamma=1/\sqrt{1-v^2/c^2} \tag{2}$$

式中 v 是相对论电子的运动速度; k 是与 Wiggler 的参数有关的常数。要获得短波长自由电子激光器，一种做法是使用能量很高的相对论电子束，即公式(1)中的 γ 取很高的值; 第二种做法是使用空间周期长度短的 Wiggler。因为 λ_r 反比于 γ 的平方，所以，提高相对论电子的能量来获得短波长辐射，比起用小空间周期长度的 Wiggler 会更有效。因此，迄今研究使用小周期长度的 Wiggler 的工作并不多。然而，如果要获得远紫外或者 X 射线波段的自由电子激光器，对相对论电子的能量要求就非常高。假定 Wiggler 的空间周期长度取 3 cm，要获得 X 射线波段的激光，相对论电子的能量要高达千兆电子伏以上，而且能量单色性 $\Delta\gamma/\gamma$ 又要求小于 0.1%[2]。要获得这样的电子束，技术要求相当复杂，而且设备相当庞大。要是使用空间周期长度很短的 Wiggler，则可以避开对电子束过于苛刻的要求。但是，用普通的静磁

收稿日期：1985年8月16日。

场或者静电场做的 Wiggler，要求空间周期长度短于 1 cm 也会遇到困难，为此，我们曾经提出使用辐射的驻波场做 Wiggler[3]，它的空间周期长度就可以做得很短。在这里，我们进一步指出，利用与相对论电子相向传播的高功率激光束构成的 Wiggler，也可以获得自由电子激光放大，它的工作原理类似于用激光做光泵的气体或液体激光器。

假定相对论电子沿 z 轴方向传播，运动速度为 $\boldsymbol{v}$。泵浦用的高功率脉冲激光(即 Wiggler)沿 z 方向传播，它的圆频率为 ω_w，波矢 $\boldsymbol{k}_w$ 为 $c\omega_w\hat{z}$。

Wiggler 的矢势 $\boldsymbol{A}_w$ (Wiggler 的磁场 $\boldsymbol{B}_w=\nabla\times\boldsymbol{A}_w$，电场为 $\boldsymbol{E}_w=-\partial\boldsymbol{A}_w/\partial t$) 为

$$\boldsymbol{A}_w=A_w\{\exp[-i(k'_{wz}+\omega'_w t+\varphi_B)] + \exp i(k'_{wz}+\omega'_w t+\varphi_B)\}\hat{e}+C.C. \tag{3}$$

式中 $\hat{e}=(\hat{x}-i\hat{y})$

$\hat{x}$、$\hat{y}$ 为横坐标单位矢，A_w 是 Wiggler 矢势振幅，φ_B 是初位相。根据多普勒效应，波矢 k'_w 和圆频率 ω'_w 与泵浦激光束的波矢 k_w 和圆频率 ω_w 的关系是：

$$\omega'_w=\frac{(1+\beta_z)\omega_w}{\sqrt{1-\beta_z^2}}\approx 2\gamma\omega_w \tag{4}$$

$$k'_w\approx 2\gamma k_w \tag{5}$$

式中 $\beta_z=v_z/c$，v_z 是相对论电子沿 z 方向运动的速度分量。

辐射场的矢势 $\boldsymbol{A}_r$ 是：

$$\boldsymbol{A}_r=A_r\{\exp i(k_r z-\omega_r t+\varphi_r) + \exp[-i(k_r z-\omega_r t+\varphi_r)]\}+C.C. \tag{6}$$

式中 A_r 是辐射场的矢势振幅，$k_r=2\pi/\lambda_r$，λ_r 是辐射波长，ω_r 是圆频率，φ_r 是初位相。

相对论电子的 Hamiltonian 量 H 是：

$$H=c[(c\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A})+m_0^2c^2]^{\frac{1}{2}}=\gamma m_0c^2 \tag{7}$$

式中 $\boldsymbol{P}$ 是相对论电子的正则动量，m_0 是电子的静止质量，c 是光速，e 是电子的电荷。相对论电子 Hamiltonian 量的运动方程是：

$$p_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$$
$$q_i=\frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{8}$$

式中 p_i 是电子正则动量的三个分量，q_i 是它的三个位置坐标。

据根(3)、(6)式，Hamiltonian 量不显含横向坐标 x、y，所以

$$\dot{p}_x=-\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}=0$$
$$\dot{p}_y=-\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=0 \tag{9}$$

即横向正则动量是一个常数，它由初始条件来确定。假定相对论电子进入 Wiggler 的横向速度 $v_\perp=0$，那么，这个常数可以取为零，即

$$\boldsymbol{p}_\perp=0 \tag{10}$$

这表明，相对论电子的动力学横向动量 $\boldsymbol{p}_\perp$ 是：

$$\boldsymbol{p}_\perp=-e\boldsymbol{A}=m_0\boldsymbol{\beta}_\perp c\gamma \tag{11}$$

$\boldsymbol{\beta}_\perp$ 是横向单位速度矢，$\boldsymbol{\beta}_\perp=\boldsymbol{v}_\perp/c$。

电子在 Wiggler 内的运动状态由洛仑兹力运动方程来描述：

$$\frac{d\gamma}{dt}=-\frac{e}{m_0c}\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E} \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma\boldsymbol{\beta})=-\frac{e}{m_0c}[\boldsymbol{E}+c\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}] \tag{13}$$

由(12)、(13)式可以求得

$$\frac{d}{dt}\gamma\beta_z=\frac{d\gamma}{dt} \tag{14}$$

对(14)式积分后得：

$$\gamma(1-\beta_z)=\gamma_0(1-\beta_{z0}) \tag{15}$$

式中 γ_0 是电子进入 wiggler 时的相对论因子：

$$\gamma_0=(1-\beta_{z0}^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\beta_{z0}=v_{z0}/c$$

v_{z0} 是相对论电子进入 wiggler 时的纵向运动速度。考虑到电场 E 只有横向分量，所以，(12)式可以写成：

$$\frac{d\gamma}{dt}=-\frac{c}{m_0c}\boldsymbol{\beta}_\perp\cdot\boldsymbol{E}_\perp \tag{16}$$

把(11)式代入上式，得:

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{e^2}{m_0^2c^2\gamma}\boldsymbol{A}_\perp\cdot\boldsymbol{E}_\perp \tag{17}$$

把(3)、(6)式代入(17)式，经简单运算后得

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{e^2}{m_0^2c^2\gamma}A_wE_r[\sin\theta+\cos\theta] \tag{18}$$

$$\theta=(2\gamma k_w+k_r)z+(2\gamma\omega_w-\omega_r)t+\varphi_B-\varphi_r$$

相对论电子在 wiggler 中运动的能量变化一般来说并不大，我们可以假定 γ 由下面的多项式表示:

$$\gamma=\gamma_0+\delta\gamma_1+\delta\gamma_2+\cdots \tag{19}$$

$$\theta=\theta_0+\delta\theta_1+\delta\theta_2+\cdots$$

式中 $\delta\gamma_1$、$\delta\gamma_2\cdots$ 分别为 γ 的一级小量、二级小量。把(19)式代入(18)式，可以得下面的方程:

$$\delta\dot{\gamma}_1=\frac{e^2}{\gamma_0m_0^2c^2}A_wE_r[\sin(\theta_0+\theta_0')+\cos(\theta_0+\theta_0')] \tag{20}$$

式中

$$\theta_0=(2\gamma_0k_w+k_r)c\beta_{z0}t+(2\gamma_0\omega_w-\omega_r)t$$

$$\theta_0'=\varphi_B-\varphi_r$$

对(20)式积分后求得:

$$\delta\gamma_1=\frac{e^2A_wE_r}{\gamma_0m_0^2c^2}\times\left[\frac{\sin(\theta_0+\theta_0')-\cos(\theta_0+\theta_0')}{2\gamma_0(1+\beta_{z0})\omega_w-(1-\beta_{z0})\omega_r}\right] \tag{21}$$

在得到上式时假定了 $t=0$ 时 $\delta\gamma_1=0$。

二级小量的方程是:

$$\gamma_0\delta\dot{\gamma}_2=\frac{e^2A_wE_r}{m_0^2c^2}[\sin(\theta_0+\theta_0'+\delta\theta)+\cos(\theta_0+\theta_0'+\delta\theta)]-\gamma_0\delta\dot{\gamma}_1 \tag{22}$$

利用关系

$$\beta_z=\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}(1-\beta_{z0})+\beta_{z0} \tag{23}$$

以及利用方程(21)，可以求得 $\delta\theta$:

$$\delta\theta=2\omega_w\delta\gamma_1(1+\beta_{z0})t\approx4\omega_w\delta\gamma_1t \tag{24}$$

考虑到 $\delta\theta\ll\theta_0+\theta_0'$，对(22)式右边括号内的三角函数展开后得:

$$\gamma_0\delta\dot{\gamma}_2=\frac{e^2A_wE_r}{m_0^2c^2}[\sin(\theta_0+\theta_0')-\delta\theta\sin(\theta_0+\theta_0')+\delta\theta\cos(\theta_0+\theta_0')+\cos(\theta_0+\theta_0')]-\gamma_0\delta\gamma_1 \tag{25}$$

将(25)式对时间积分后，在 $0\sim2\pi$ 的范围对 θ_0' 求平均，平均值 $\langle\delta\gamma_2\rangle$ 为:

$$\langle\delta\gamma_2\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta\gamma_2\,d\theta_0' =\mathscr{A}\{\cos\psi+\psi\sin\psi+\sin\psi-\psi\cos\psi-1\} \tag{26}$$

式中

$$\mathscr{A}=\left(\frac{2\omega_we^2A_wE_\gamma}{\gamma_0m_0^2c^2}\right)^2\times\frac{1}{[2\gamma_0(1+\beta_{z0})\omega_w-(1-\beta_{z0})\omega_r]^3}$$

$$\psi=[2\gamma_0(1+\beta_{z0})\omega_w-(1-\beta_{z0})\omega_r]t$$

自由电子激光器的辐射是由电子的动能转换过来，假定电子束的电子通量密度为 n_e，那么，电子束在 wiggler 产生的辐射通量密度将是:

$$I_r=-(\gamma-\gamma_0)m_0c^2n_e=-\langle\delta\gamma_2\rangle m_0c^2n_e \tag{27}$$

把(26)式代入(27)式，便得到相对论电子束产生的辐射通量密度 I_r 为:

$$I_r=-\mathscr{A}m_0c^2n_e\{\cos\psi+\psi\sin\psi+\sin\psi-\psi\cos\psi-1\} \tag{28}$$

入射的辐射通量密度假定为 I_0

$$I_0=\frac{c}{4\pi}E_r^2 \tag{29}$$

自由电子激光器的增益 G 定义为:

$$G=I_r/I_0 \tag{30}$$

把(28)、(29)式代入(30)式，整理后得:

$$G=\mathscr{A}'n_e\{1+\psi\cos\psi-\cos\psi-\psi\sin\psi-\sin\psi\} \tag{31}$$

式中

$$\mathscr{A}'=4\pi m_0c\left(\frac{2\omega_we^2A_w}{\gamma_0m_0^2c^2}\right)^2\times\frac{1}{[4\gamma_0\omega_w-(1-\beta_{z0})\omega_r]^3}$$

因为增益 G 的式中含有位相因子 θ_0，它可以取任意数值。对 θ_0 在 $0\sim\frac{\pi}{2}$ 的范围内求平均，结果得到

$$G=(\pi-2)\mathscr{A}'n_e \tag{32}$$

由(32)式可以得到，当

$$4\gamma_0\omega_w>(1-\beta_{z0})\omega_r \tag{33}$$

时，增益 G 为正，即

$$G>0$$

而当

$$4\gamma_0\omega_w<(1-\beta_{z0})\omega_r \tag{34}$$

时，增益 G 为负，即

$$G<0$$

又因为
$$(1-\beta_{z0})\approx\frac{1}{2\gamma_0^2} \tag{35}$$

相对论因子 γ_0 总是大于1，把(35)代入(33)和(34)式，我们就发觉条件(33)能够得到满足，而条件(34)并不被满足。这就是说，只要我们选择合适的工作条件，使得位相因子 θ_0 的变化范围是在 $0\sim\frac{\pi}{2}$ 之间，则就有希望用一束高功率激光束同时做自由电子激光器的泵浦源和放大光束。

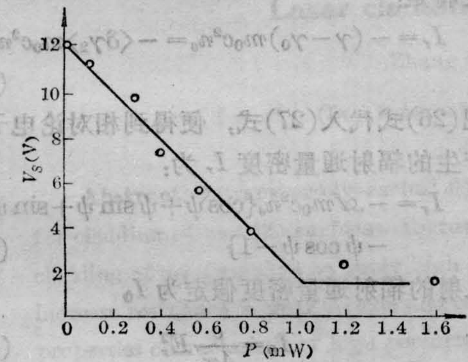
参考文献

[1] Luis R. Elias *et al.*; *Phys. Rev Lett.*, 1976, **36**, 717.

[2] R. Colella, A. Lucclo; *Opt. Commun.*, 1984, **50**, 41.

[3] 雷仕湛;《红外研究》,(待发表)。

(上接第405页)



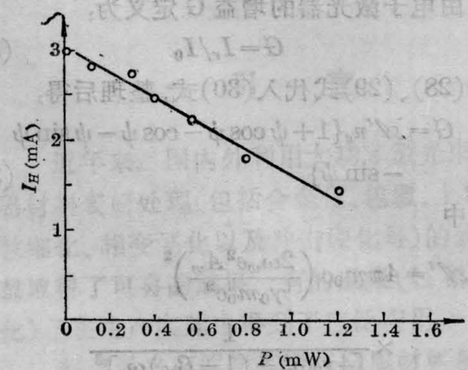


图5 器件的光控制特性

(上) 转折电压随入射功率的变化

(下) 维持电流随入射功率的变化

GaAs/GaAlAs PNPN 负阻激光器相似[1,2]，而自振激射频率除仍可用外加电压电阻或电容调节外[6]，还随入射功率的增加而变大。

此外，我们还用此种器件开展了光学双稳态研究工作，其双稳特性十分良好。关于这方面的内容，请参阅文献[5]。

此文承蒙王守武教授审阅。石志文、何军等同志提供了实验用 GaAs/GaAlAs 双异质结激光器，王丽明、吕卉等同志在器件制备中给予了很多协助、作者谨致热忱感谢。

参考文献

[1] 王守武等;《电子学报》,1979,**3**, 35～43.

[2] Wang Shouwu *et al.*; *IEEE Proc. I, Solid State & Electron Dev.*, 1982, **129**, (6), 306～309.

[3] 张权生,吴荣汉;《第三届全国半导体化合物材料、微波器件、光电器件学术会议论文集》, 1984, 240页。

[4] Miller S. L.; *Phys. Rev.*, 1955, **99**, 1234.

[5] 王守武等;《半导体学报》, 1986, **7**, 147～153。

[6] Wang Shouwu *et al.*; *IEEE Proc.*, 1985, **132**, Pt. J, No. 1, 69～76.