中国激光
第13卷 第7期

自由电子激光器的能量模型

陈建文 张大可 雷仕湛 王润文

（中国科学院上海光机所）

提要：本文建立了自由电子激光器(FEL)的能量模型，分别计算了弱信号和强信号两种条件下FEL的能量转换效率。这一模型计算简便，物理意义清晰，适用于具有不同磁场结构的FEL，如螺旋场FEL、轴向场FEL或者螺旋场和轴向场相迭加FEL；并可用于处理多种问题，如谐波辐射、短波长辐射……及参量变化等。最后，值得一提的是，该模型对于三维问题也是完全有效的。

Energy model of FEL

Chen Jianwen, Zhang Dake, Lei Shizhan, Wang Renwen

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: In this paper, an energy model of FEL was set up to calculate the energy tranfer rate of FEL under the conditions of small signal and strong signal respectively. This model was simple in calculating, clear in physical meaning and adequate for FEL with different magnetic structures, such as FEL uwith wigglers, FEL with axial magnetic field FEL with helical axial magnetic field combination. It could be used to deal with various problems such as harmonc radiation, short wavelength radiation, parameter variations and so on. The model is suitable for three dimensional problems.

一、引 言

自从1976年自由电子激光器问世以来，已经发展起了多种理论，例如：虚光子理论[1]、耦合麦克斯韦尔-玻尔兹曼方程[2]、单粒子模型[3]以及量子理论[4]等。虽然这些方法都已在实际运用中获得成功，但是，其计算过程都比较复杂，而且近似程度也比较高。特别是在强信号条件下，或者当一维模型不再适用，例如，在螺旋磁场中再引入一轴向磁场来准直电子束的时候，这种缺点就变得更为明显。此外，还有一点需要指出的是，上述各种方法都具有一定的局限性，亦即只适用于某几种特定的情况，换言之，它们并不具有普适性。为了克服这些不足之处，我们建议可以采用一种新的模型以简化计算，使之具有广泛的应用性，同时又能给出一个比较清晰的物理图象。众所周知，当具有一定速度，亦即

收稿日期：1985年12月3日。

具有一定能量的相对论电子进入激光器之后，通过与电磁场的相互作用，在一定的位相匹配条件下，其运动状态将发生变化，并由此引起辐射场和电子束之间的能量交换，而这一能量交换又将进一步改变电子的运动状态，从而导致更进一步的能量交换，这样场和电子互相作用，互相影响，直至位相匹配条件不再满足为止。因此，在这种相互作用过程中，我们既可以把相对论电子和辐射场的能量变化看作是电子运动状态的函数，通过确定电子的状态参数来求取能量转换效率和辐射强度的变化，如在前述一些理论中所做的那样，同样，也可以把相对论电子的运动状态看作是它的能量的函数，而用能量变化来表征电子与场的相互作用过程及其结果。这两种不同的数学处理方法，它们所反映的物理实质其实是完全一致的。有鉴于此，特别是考虑到在相对论电子与电磁场的相互作用过程中必须遵循能量守恒定律，我们建立了本文所述的自由电子激光器的能量模型，这一模型的特点可以简单地概括如下：将相对论电子运动参数的变化表示为相应的能量参数的变化，同时，通过能量守恒定律，建立起辐射强度的变化与相对论电子能量变化之间的函数关系。在下面我们将会看到，由于用单一的能量转换率方程取代耦合动力学方程，这样就极大地简化了计算过程。特别值得一提的是，这一模型对于具有不同磁场结构的自由电子激光器，如螺旋磁场 FEL、轴向磁场 FEL 或者螺旋场和轴向场相迭加 FEL 等都是适用的，它不仅可以用来计算自由电子激光器的能量转换效率和增益，而且还可以用来讨论诸如谐波辐射、短波长辐射以及变参数等问题。

二、基本方程

在本节中，我们将从单个相对论电子的 Lorentz 方程和能量方程出发，导出具有圆偏振 Wiggler 自由电子激光器的能量转换率方程。而相对论电子束的整体宏观效应，则可通过对单电子效应的平均来求得。

设圆偏振 Wiggler $\boldsymbol{B}_w$ 以及辐射场 $\boldsymbol{E}_r$ 和 $\boldsymbol{B}_r$ 可以分别表示为：

$$\boldsymbol{B}_w=B_w\{\hat{e}_x\cos\xi_w+\hat{e}_y\sin\xi_w\} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_r&=E_r\{\hat{e}_x\cos\xi_r-\hat{e}_y\sin\xi_r\}\\ \boldsymbol{B}_r&=E_r/c\{\hat{e}_x\sin\xi_r+\hat{e}_y\cos\xi_r\}\end{aligned} \tag{2}$$

式中，B_w 是螺旋磁场的振幅，$\xi_w\equiv K_wz+\phi_w$，而 $K_w=2\pi/\lambda_w$，λ_w 是螺旋磁场的空间周期，ϕ_w是所讨论的电子进入空间周期磁场的初始位相；$\xi_r\equiv K_rz-\omega_rt+\phi_r,\omega_r=cK_r$ 是辐射场的圆频率，ϕ_r 是相应的初始位相，而 E_r 和 E_r/c 分别是辐射场电矢量和磁矢量的振幅，可以表示为纵向座标 z 的函数。

单个相对论电子的能量方程和动力学方程分别为：

$$\frac{d}{dt}\gamma=-\frac{|e|}{mc^2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}_r \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\gamma\boldsymbol{v}=-\frac{|e|}{m}\{\boldsymbol{E}_r+\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{B}_r+\boldsymbol{B}_w)\} \tag{4}$$

式中 γ 是相对论能量参数，$|e|$ 和 m 分别是电子电荷数和静止质量。方程 (4) 是矢量方程，其 x 和 y 方向的分量分别为：

$$\frac{d}{dt}\gamma\dot{x}=\frac{|e|B_w}{m}\dot{z}\sin\xi_w-\frac{|e|E_r}{m}(1-\beta_z)\cos\xi_r \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\gamma\dot{y}=-\frac{|e|B_w}{m}\dot{z}\cos\xi_w+\frac{|e|E_r}{m}(1-\beta_z)\sin\xi_r \tag{6}$$

式中 $\beta_z=\dot{z}/c$。

方程(5)两边同时积分，即有：

$$\gamma\dot{x}=\frac{|e|E_r}{m\omega_r}\sin\xi_r-\frac{|e|B_w}{mK_w}\cos\xi_w-\frac{|e|}{m\omega_r}\int\sin\xi_r\,dE_r \tag{7}$$

式中略去了积分常数。这样做的目的只是使表达式更为简洁，而不会对计算结果有任何

实质性的影响。同样有:

$$\gamma\dot{y}=\frac{|e|E_r}{m\omega_r}\cos\xi_r-\frac{|e|B_w}{mK_w}\sin\xi_w-\frac{|e|}{m\omega_r}\int\cos\xi_r dE_r \tag{8}$$

将(7)、(8)两式代入方程(3),我们得到:

$$\begin{aligned}\gamma\frac{d}{dt}\gamma&=-\frac{|e|E_r}{mc^2}\{\gamma\dot{x}\cos\xi_r-\gamma\dot{y}\sin\xi_r\}\\&=\left(\frac{|e|}{mc}\right)^2\frac{E_rB_w}{K_w}\cos(\xi_w+\xi_r)\\&\quad+\left(\frac{|e|}{mc}\right)^2\frac{E_r}{\omega_r}\left\{\cos\xi_r\int\sin\xi_r dE_r-\sin\xi_r\int\cos\xi_r dE_r\right\}\end{aligned} \tag{9}$$

方程(9)已不显含横向运动参量,为了进一步消去纵向运动参量,我们设:

$$\begin{aligned}\beta_z&=\beta_{z0}-\delta\beta_z\\\gamma&=\gamma_0-\delta\gamma\end{aligned} \tag{10}$$

式中,下标"0"表示初始值。考虑到 $\beta_\perp\ll\beta_z\approx1$,那么,从相对论能量参数 γ 的定义式可以求出下述近似关系式:

$$\delta\beta_z\approx\frac{1}{\gamma_0^2}\left(\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}\right) \tag{11}$$

可以证明,这一近似对本文的计算结果没有任何影响[5]。

方程(11)给出了相对论电子纵向速度的变化与其能量变化之间的函数关系,由此有:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=c\beta_z=u-\frac{c}{\gamma_0^2}\left(\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}\right)\\z&=z_0+ut-\frac{c}{\gamma_0^2}\int\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}dt\end{aligned} \tag{12}$$

式中 $u=c\beta_{z0}$ 和 z_0 分别为相对论电子的初始纵向速度和座标。

将(12)式代入方程(9),即有:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}\right)\approx&-\left(\frac{|e|}{\gamma_0 mc}\right)^2\frac{E_rB_w}{K_w}\\&\times\cos(\Delta\omega t+\phi_0)-\left(\frac{|e|}{\gamma_0 mc}\right)^2\\&\times\frac{E_rB_w\omega}{K_w\gamma_0^2}\sin(\Delta\omega t+\phi_0)\int\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}dt\\&-\left(\frac{|e|}{mc}\right)^2\frac{E_r}{\omega_r}\Big\{\cos(\xi_{r0}+\delta\xi_r)\\&\times\int\sin(\xi_{r0}+\delta\xi_r)dE_r\\&-\sin(\xi_{r0}+\delta\xi_r)\int\cos(\xi_{r0}+\delta\xi_r)\\&\times dE_r\Big\}\end{aligned} \tag{13}$$

式中:

$$\begin{aligned}\Delta\omega&=K_wu-\omega_r(1-\beta_{z0})\\\phi_0&=(K_w+K_r)z_0+\phi_w+\phi_r,\\\omega&=c(K_r+K_w)\\\xi_{r0}&=-\omega_r(1-\beta_{z0})t+\phi_r\\\delta\xi_r&=-\frac{\omega_r}{\gamma_0^2}\int\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}dt\end{aligned} \tag{14}$$

方程(13)就是我们所要导出的能量模型的基本方程,我们注意到在方程的等式两边都出现了 $\delta\gamma/\gamma_0$ 这个物理量,但是,对它们所含的物理意义的理解却并不相同:在方程式左边,代表了相对论电子的能量转换率,而在方程式右边,考虑到方程(11)和(12),则代表了相对论电子运动状态的变化。这就是说,我们用一个简单的方程概括描述了自由电子受激辐射过程中电子与场之间的作用和反作用,这样,不仅在很大程度上简化了计算步骤,而且还使我们的理论模型具有十分鲜明的物理图象。以下,我们将根据这一基本方程,分别计算在弱信号和强信号这两种不同条件下的能量转换效率。

三、弱信号条件

在弱信号条件下,辐射场电矢量的振幅 E_r 可以近似地看作是一个常量,即 $E_r\approx E_0$,于是,方程(13)即简化为:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}\right)\approx&-\left(\frac{|e|}{\gamma_0 mc}\right)^2\frac{E_0B_w}{K_w}\\&\times\cos(\Delta\omega t+\phi_0)-\left(\frac{|e|}{\gamma_0 mc}\right)^2\\&\times\frac{E_0B_w\omega}{K_w\gamma_0^2}\sin(\Delta\omega t+\phi_0)\\&\times\int\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}dt\end{aligned} \tag{15}$$

方程(15)式两边同时积分,即有:

$$\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}\approx-\frac{G_{wr}}{\Delta\omega}\{\sin(\Delta\omega t+\phi_0)-\sin\phi_0\}$$
$$-D_{wr}\int\sin(\Delta\omega t+\varphi_0)$$
$$\times\left[\int_0^t\delta\gamma/\gamma_0\,dt'\right]dt \tag{16}$$

式中:

$$G_{wr}\equiv\left(\frac{|e|}{\gamma_0 mc}\right)^2\frac{E_0B_w}{K_w},\ D_{wr}\equiv G_{wr}\frac{\omega}{\gamma_0^2} \tag{17}$$

为了解出方程(16), 我们将 $\delta\gamma$ 展开为各级量的级数, 即:

$$\delta\gamma=\delta\gamma_1+\delta\gamma_2+\cdots=\sum_n\delta\gamma_n \tag{18}$$

其中, $\delta\gamma_1\propto E_0$, $\delta\gamma_2\propto E_0^2$…… 将此展开式代入方程(16), 我们得到了一系列关于不同级次的 $\delta\gamma_n$ 的耦合方程:

$$\frac{\delta\gamma_1}{\gamma_0}=\frac{G_{wr}}{\Delta\omega}\{\sin\phi_0-\sin(\Delta\omega t+\phi_0)\}$$
$$\frac{\delta\gamma_2}{\gamma_0}=-D_{wr}\int\sin(\Delta\omega t+\phi_0)\left[\int_0^t\frac{\delta\gamma_1}{\gamma_0}dt'\right]dt$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{\delta\gamma_n}{\gamma_0}=-D_{wr}\int\sin(\Delta\omega t+\phi_0)$$
$$\times\left[\int_0^t\frac{\delta\gamma_{n-1}}{\gamma_0}dt'\right]dt \tag{19}$$

方程(19)所给出的实际上是单一相对论电子在同 Wiggler 磁场和辐射场相互作用过程中的能量变化规律。考虑到电子的初始位相在 $0\sim2\pi$ 的范围内无规地分布, 因此, 各个电子能量变化的幅度和方向就不尽相同, 这就要求我们对各个单电子的初始位相 ϕ_0 按其统计权重求取平均, 以了解相对论电子束作为一个整体的宏观效应。这样, 根据方程(19)我们有:

$$\left\langle\frac{\delta\gamma_1}{\gamma_0}\right\rangle_{\phi_0}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\delta\gamma_1}{\gamma_0}d\phi_0=0$$
$$\left\langle\frac{\delta\gamma_2}{\gamma_0}\right\rangle_{\phi_0}=\frac{G_{wr}D_{wr}}{\Delta\omega^3}\left\{1-\cos\Delta\omega t-\frac{1}{2}\Delta\omega t\sin\Delta\omega t\right\} \tag{20}$$

方程(20)表明, 当相对论电子进入 Wiggler 磁场之后, 按照其初始位相的不同, 一部分电子将获得能量而被加速, 另一部分电子则将失去能量而被减速, 但是, 就其总体而言, 电子束的能量并没有发生变化。此时, 场对电子束的作用结果, 仅使其形成空间聚束, 而只有经过聚束的电子束才会与辐射场有能量交换, 并在一定的初始条件下, 使辐射场得到放大。这一点, 与其他理论所给出的结论是完全一致的。

在能量守恒条件下, 求得辐射场的增益系数为:

$$g(t)=\frac{\rho_e\langle\delta\gamma\rangle_{\phi_0}mc^2V}{\epsilon_0E_0^2V} \tag{21}$$

式中 ρ_e 是相对论电子束的宏观密度, V 是相互作用区域的体积, $\epsilon_0E_0^2V$ 则代表了辐射场的初始能量。将方程(20)代入(21)式, 即有:

$$g(t)=\frac{2\rho_e|e|^4B_w^2}{\epsilon_0cK_wm^3\gamma_0^3\Delta\omega^3}\left\{1-\cos\Delta\omega t-\frac{\Delta\omega t}{2}\sin\Delta\omega t\right\} \tag{22}$$

由方程(22)所给出的增益线型, 与其他理论所给出的也是完全一致的。显然, 采用本能量模型来进行计算要简便得多。

四、强信号条件

在强信号条件下, 辐射场电矢量振幅 E_r 的变化对相对论电子束能量转换效率的影响不再能够忽略不计, 也就是说, 我们必须从基本方程(13)式出发来考虑有关强信号的一些问题。

在本节中, 我们将首先从能量守恒定律导出辐射强度的变化与相对论电子束能量变化之间的函数关系, 然后, 通过求解基本方程给出强信号条件下的能量转换效率, 并对饱和现象做出说明。

1. 辐射强度的变化规律

设辐射场和相对论电子束的能量密度分别为 W_r 和 W_e:

$$W_r=\epsilon_0 E_r^2$$
$$W_e=\rho_e\bar{\gamma}mc^2 \tag{23}$$

式中 $\bar{\gamma}$ 表示能量参数的平均值。而总的能量密度为：$W=W_r+W_e$，在能量守恒条件下，有：

$$dW=dW_r+dW_e$$
$$=\epsilon_0 d(E_r^2)+\rho_e mc^2 d(\bar{\gamma})=0 \tag{24}$$

方程(24)的解为：

$$E_r^2-E_{r0}^2=-\frac{\rho_e mc^2}{\epsilon_0}(\bar{\gamma}-\gamma_0)$$
$$=\frac{\rho_e\gamma_0 mc^2}{\epsilon_0}\left(\overline{\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}}\right)$$
$$E_r^2=E_{r0}^2\left\{1+\frac{W_{e0}}{W_{r0}}\left(\overline{\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}}\right)\right\} \tag{25}$$

式中，E_{r0} 为初始时刻辐射场电矢量的振幅，$W_{e0}=\rho_e\gamma_0 mc^2$，$W_{r0}=\epsilon_0 E_{r0}^2$ 分别代表相对论电子束和辐射场的初始能量密度。由于在强信号条件下，恒有：$W_{e0}(\delta\gamma/\gamma_0)\ll W_{r0}$，于是，$E_r$可以近似地表示为：

$$E_r\approx E_{r0}+\alpha\left(\overline{\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}}\right)\equiv E_{r0}+\delta E_r \tag{26}$$

$$\alpha=\frac{\rho_e\gamma_0 mc^2}{2\epsilon_0 E_{r0}} \tag{27}$$

方程(25)和(26)分别描述了辐射强度和辐射场电矢量振幅随相对论电子能量的变化而变化的规律。下面我们将讨论其相应的逆过程，即辐射场的变化如何影响电子的能量转换效率。

2. 强信号条件下的基本方程及其解

将方程(26)代入基本方程(13)，我们就得到了在强信号条件下相对论电子的能量转换率方程：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}\right)=-\left(\frac{|e|}{\gamma_0 mc}\right)^2\frac{B_w}{K_w}\left(E_{r0}+\alpha\overline{\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}}\right)$$
$$\times\cos(\varDelta\omega t+\phi_0)-\left(\frac{|e|}{\gamma_0 mc}\right)^2\frac{B_w\omega}{K_w\gamma_0^2}\left(E_{r0}\right.$$
$$\left.+\alpha\overline{\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}}\right)\sin(\varDelta\omega t+\phi_0)\int\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}dt$$
$$-\left(\frac{|e|}{\gamma_0 mc}\right)^2\frac{\alpha}{\omega_r}\left(E_{r0}+\alpha\overline{\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}}\right)$$
$$\times\left\{\cos(\xi_{r0}+\delta\xi_r)\int\sin(\xi_{r0}+\delta\xi_r)d\left(\overline{\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}}\right)\right.$$
$$\left.-\sin(\xi_{r0}+\delta\xi_r)\int\cos(\xi_{r0}+\delta\xi_r)d\left(\overline{\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}}\right)\right\} \tag{28}$$

对上述方程的物理解释与弱信号条件下的情况相同，只是在方程(28)式中更加突出了辐射场的变化对相对论电子能量转换率的影响。

为了求解方程(28)，让我们首先来设想一下相对论电子是如何与 wiggler 磁场和辐射场相互作用的。相对论电子在进入 wiggler 之后，其运动状态将受 wiggler 调制而发生变化，此时，如果有一强信号注入激光器内，那么，在一定的条件下，能量将从电子束向辐射场转换，而被放大的信号将继续同电子束作用，引起进一步的能量转换，从而使其本身得到进一步的放大。这一相互作用过程将一直持续到场与电子处于平衡为止。这就是通常意义上的增益饱和。有鉴于此，我们将辐射场电矢量振幅的变化δE_r 和电子相对论能量参数的变化 $\delta\gamma$展开为级数：

$$E_r=E_{r0}+\delta E_r=E_{r0}+\delta E_{r1}+\delta E_{r2}+\cdots$$
$$\gamma=\gamma_0-\delta\gamma=\gamma_0-(\delta\gamma_1+\delta\gamma_2+\cdots) \tag{29}$$

于是，上述相互作用过程就可以方便地用下列关系式来表征：

$$E_{r0}\to\frac{\delta\gamma_1}{\gamma_0},\qquad \delta E_{r1}=\alpha\left(\overline{\frac{\delta\gamma_1}{\gamma_0}}\right)$$
$$\delta E_{r1}\to\frac{\delta\gamma_2}{\gamma_0},\qquad \delta E_{r2}=\alpha\left(\overline{\frac{\delta\gamma_2}{\gamma_0}}\right)$$
$$\vdots\qquad\qquad\vdots$$
$$\delta E_{rn}\to\frac{\delta\gamma_{n+1}}{\gamma_0},\ \delta E_{rn+1}=\alpha\left(\overline{\frac{\delta\gamma_{n+1}}{\gamma_0}}\right) \tag{30}$$
$$\vdots\qquad\qquad\vdots$$

其中"→"代表了诱导过程。

采用方程(29)和(30)两式来表达辐射场和电子能量的变化以及这种变化之间的关系，不仅可以正确地反映辐射场和相对论电子相互作用的物理过程，此外，还有一个优点，就是避免了由于强信号的存在而引起的级数发散的问题，正是这样一个数学上的困

难，使得以往的强信号理论变得过于复杂。

将方程(29)和(30)两式代入方程(28)，我们得到一系列关于不同级次的$\delta\gamma_n/\gamma_0$的耦合方程。

(i) 令：

$$E_r=E_{r0},\ \delta\gamma=\delta\gamma_1,$$

$$\delta E_{r1}=\alpha\left(\frac{\overline{\delta\gamma_1}}{\gamma_0}\right) \tag{31}$$

于是有：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\gamma_1}{\gamma_0}\right)=-\left(\frac{|e|}{\gamma_0 mc}\right)^2\frac{E_{r0}B_w}{K_w}\times\cos(\Delta\omega t+\phi_0)-\left(\frac{|e|}{\gamma_0 mc}\right)^2\frac{E_{r0}B_w\omega}{K_w\gamma_0^2}\times\sin(\Delta\omega t+\phi_0)\int\frac{\delta\gamma_1}{\gamma_0}dt \tag{32}$$

由于方程(28)右边的第三、四两项所代表的是非共振项，所以在以下的计算中都被忽略了。计算表明，这一近似是完全合理的。

可以方便地求得方程(32)的解为：

$$\frac{\overline{\delta\gamma_1}}{\gamma_0}\equiv\left\langle\frac{\delta\gamma_1}{\gamma_0}\right\rangle_{\phi_0}=\frac{A_1B_1}{\Delta\omega^3}\left\{1-\cos\Delta\omega t-\frac{\Delta\omega t}{2}\sin\Delta\omega t\right\} \tag{33}$$

式中，

$$A_1=\left(\frac{|e|}{\gamma_0\omega c}\right)^2\frac{E_{r0}B_w}{K_w},\quad B_1=A_1\frac{\omega}{\gamma_0^2} \tag{34}$$

按此，δE_{r1}可以表示为

$$\delta E_{r1}=\alpha\left\langle\frac{\delta\gamma_1}{\gamma_0}\right\rangle_{\phi_0}=\frac{\alpha A_1B_1}{\Delta\omega^3}\left\{1-\cos\Delta\omega t-\frac{1}{2}\Delta\omega t\sin\Delta\omega t\right\} \tag{35}$$

(ii) 令：$E_r=E_{r0}+\delta E_{r1}$, $\dfrac{\delta\gamma}{\gamma_0}=\dfrac{\delta\gamma_1}{\gamma_0}+\dfrac{\delta\gamma_2}{\gamma_0}$，以及$\delta E_{r2}=\alpha\left(\dfrac{\overline{\delta\gamma_2}}{\gamma_0}\right)$，于是有：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\gamma_2}{\gamma_0}\right)=-\frac{A_1\delta E_{r1}}{E_{r0}}\cos(\Delta\omega t+\phi_0)-\frac{B_1\delta E_{r1}}{E_{r0}}\sin(\Delta\omega t+\phi_0)\times\int\frac{\delta\gamma_2}{\gamma_0}dt \tag{36}$$

令：$\delta\gamma_2=\delta\gamma_2'+\delta\gamma_2''+\cdots$，其中$\delta\gamma_2'\propto\delta E_{r1}$，$\delta\gamma_2''\propto(\delta E_{r1})^2\cdots\cdots$

这样，就有：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\gamma_2'}{\gamma_0}\right)=-\frac{A_1\delta E_{r1}}{E_{r0}}\cos(\Delta\omega t+\phi_0)=-\frac{A_2}{\Delta\omega^3}\left\{1-\cos\Delta\omega t-\frac{\Delta\omega t}{2}\sin\Delta\omega t\right\}\cos(\Delta\omega t+\phi_0) \tag{37}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\gamma_2''}{\gamma_0}\right)=-\frac{B_1\delta E_{r1}}{E_{r0}}\sin(\Delta\omega t+\phi_0)\times\int\frac{\delta\gamma_2'}{\gamma_0}dt=-\frac{B_2}{\Delta\omega^3}\left\{1-\cos\Delta\omega t-\frac{1}{2}\Delta\omega t\sin\Delta\omega t\right\}\times\sin(\Delta\omega t+\phi_0)\int\frac{\delta\gamma_2'}{\gamma_0}dt \tag{38}$$

式中，

$$A_2=\frac{\alpha A_1^2B_1}{E_{r0}},\quad B_2=\frac{\alpha A_1B_1^2}{E_{r0}} \tag{39}$$

方程(37)的解为：

$$\frac{\delta\gamma_2'}{\gamma_0}=-\frac{A_2}{\Delta\omega^4}\{\sin(\Delta\omega t+\phi_0)-\sin\phi_0\}+\frac{5A_2}{16\Delta\omega^4}\{\sin(2\Delta\omega t+\phi_0)-\sin\phi_0\}+\frac{A_2t}{2\Delta\omega^3}\cos\phi_0-\frac{A_2t}{8\Delta\omega^3}\times\cos(2\Delta\omega t+\phi_0)-\frac{A_2t^2}{8\Delta\omega^2}\sin\phi_0 \tag{40}$$

将方程(40)代入方程(38)，并对ϕ_0求平均，最后得到：

$$\left\langle\frac{\delta\gamma_2''}{\gamma_0}\right\rangle_{\phi_0}=\frac{A_2B_2}{\Delta\omega^9}\left\{1-\cos\Delta\omega t-\frac{11}{16}\Delta\omega t\sin\Delta\omega t+\frac{3}{16}(\Delta\omega t)^2\cos\Delta\omega t+\frac{5}{128}(\Delta\omega t)^2+\frac{1}{48}(\Delta\omega t)^3\sin\Delta\omega t+\frac{1}{192}(\Delta\omega t)^4-\frac{49}{256}(1-\cos 2\Delta\omega t)+\frac{1}{384}(\Delta\omega t)^4\cos 2\Delta\omega t\right.$$

$$-\frac{5}{192}(\Delta\omega t)^3\sin 2\Delta\omega t$$
$$-\frac{7}{64}(\Delta\omega t)^2\cos 2\Delta\omega t$$
$$+\frac{29}{128}\Delta\omega t\sin 2\Delta\omega t\Big\} \quad (41)$$

而有：

$$\delta E_{r2}=\alpha\left\langle\frac{\delta\gamma_2}{\gamma_0}\right\rangle_{\phi_0}\approx\alpha\left\langle\frac{\delta\gamma_2''}{\gamma_0}\right\rangle_{\phi_0} \quad (42)$$

借助于这一方法，可以求解方程(38)至任意阶的修正量，但是，对于本文所要讨论的问题而言，上述解就已经足够了。

3．强信号条件下的饱和现象

为了方便讨论起见，我们将δE_r表达式中的三角函数项 $\cos\Delta\omega t$ 和 $\sin\Delta\omega t$，展开为级数，并保留到 $(\Delta\omega t)^6$ 项。鉴于 $\Delta\omega t\ll 1$，这一近似是足够合理的。

按此，δE_{r1} 和 δE_{r2} 可以分别近似地表示为：

$$\delta E_{r1}\approx\frac{\alpha A_1B_1}{\Delta\omega^3}\frac{(\Delta\omega t)^4}{24}\left\{1-\frac{1}{15}(\Delta\omega t)^2\right\} \quad (43)$$

$$\delta E_{r2}\approx\frac{\alpha A_2B_2}{\Delta\omega^9}\frac{(\Delta\omega t)^4}{160} \quad (44)$$

且有：

$$\frac{\delta E_{r1}}{\delta E_{r2}}\approx\frac{\epsilon_0^2\gamma_0^4C^4K_w^4}{W_{e0}^2B\omega^4K_r^2\left(\frac{|e|}{\gamma_0mc}\right)^8}\times(\Delta\omega t)^4[15-(\Delta\omega t)^2] \quad (45)$$

显然，从方程(45)可知 $\delta E_{r2}\ll\delta E_{r1}$，这就是说，随着辐射场的增强，它从相对论电子束所获得的能量将逐渐减少，换言之，就是对辐射场的放大率存在着一定的界限，而这正是所谓饱和的特征。关于这个问题，我们还将另外撰文加以讨论。

4．强信号条件下的增益

由方程(25)可知辐射强度的变化规律为：

$$I=I_0\left\{1+\frac{W_{e0}}{W_{r0}}\left\langle\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}\right\rangle_{\phi_0}\right\} \quad (46)$$

现设增益系数为 G，即：

$$I=I_0\exp(G) \quad (47)$$

由方程(46)和(47)两式解得：

$$G=\ln\left[1+\frac{W_{e0}}{W_{r0}}\left\langle\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}\right\rangle_{\phi_0}\right] \quad (48)$$

考虑到 $\langle\delta\gamma/\gamma_0\rangle_{\phi_0}<1$，$W_{e0}\ll W_{r0}$，则 G 可以近似地表示为：

$$G\approx\frac{W_{e0}}{W_{r0}}\left(\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}\right)_{\phi_0}-\frac{1}{2}\left[\frac{\omega_{e0}}{\omega_{r0}}\left\langle\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}\right\rangle_{\phi_0}\right]^2+\frac{1}{3}\left[\frac{W_{e0}}{W_{r0}}\left\langle\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}\right\rangle_{\phi_0}\right]^3-\cdots\cdots \quad (49)$$

同弱信号情况相比，可以明显地看出，增益已不再是 $\langle\delta\gamma\rangle_{\phi_0}$ 的线性函数。这同样也反映了强信号条件下所发生的饱和效应。

在本文中，我们根据能量守恒定律，建立了自由电子激光器的能量模型，并成功地将这一模型运用于对弱信号和强信号这两种不同情况的处理。该模型的优点可以简单地概括为：1．简洁性，2．直观性，3．广泛应用性。今后，我们将借助于这一模型，对诸如变参量、谐波辐射、短波长辐射等一系列问题进行讨论。

参 考 文 献

[1] J. M. J. Madey; *J. Appl. Phys.*, 1971, **42**, No. 5, 1906

[2] F. A. Hopf *et al.*; *Opt. Commun.*, 1976, **18**, No. 4, 413; *Phys. Rev. Lett.*, 1976, **37**, No. 20, 1342.

[3] V. N. Baier *et al.*; *Phys. Lett.*, 1978, **65A**, No. 4, 319; W. B. Colson; *Phys. Lett.*, 1976, **59A**, No. 3, 187.

[4] G. Mayer; *Opt. Commun.*, 1977, **20**, No. 2, 200.

[5] Runwen Wang *et al.*; *Opt. Commun.*, 1985, **55**, No. 6, 430.