

制作变间距光栅的新方法

陈建文 傅淑芬 张大可 戚张芬 杨森 王之江

(中国科学院上海光机所)

提要: 本文提出一种制作空间频率线性变化光栅的新方法, 通过调节该装置的几何结构参数, 就可以方便地改变光栅空间频率的变化幅度。给出了光栅空间频率的解析表达式。

Producing grating with variable spacing

Chen Jianwen, Fu Shufeng, Zhang Dake, Qi Zhangfen, Yang Sen, Wang Zhijiang

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: In this article, a new method of producing linearly variable spatial frequency grating is proposed and expression of grating frequency is given. This is very simple and reliable. The range of grating frequency can be easily varied by adjusting the geometrical parameters of the experimental arrangement.

一、引言

全息光栅是利用全息照相的方法, 用两束相干光迭加后所产生的干涉条纹作为其“刻线”而制成的。文献 [1] 提出了一种用改进的 Michelson 干涉仪产生空间频率作线性变化的干涉条纹的方法, 但实验装置的精度要求很高, 除干涉仪末端的反射镜必须固定于特定位置之外, 分束器和补偿板的厚度之间也需要满足某种关系。文献 [2] 采用一束相干光在柱面透镜前(曲面)、后(平面)表面的反射光干涉制作变频光栅, 其优点是比较简便, 不象前一种方法那样对实验装置的精度有严格的要求, 缺点是由于入射光是从柱面镜的曲面入射的, 为了使干涉条纹的空间频率按照线性规律变化, 入射角的值受到限

制, 结果空间频率不可能做得很高。我们在全息干涉仪的一条光路中插入一柱面透镜, 使得由柱面镜透射的物光与另一条光路中的平面参考光相干涉, 形成干涉条纹间距可变的干涉图形。当柱面镜的横向宽度有限而引起的衍射效应可以忽略不计时, 干涉条纹的空间频率将是条纹所在位置的严格的线性函数, 而且从原则上说, 只要适当地选取该实验装置的几何参数, 例如: 柱面镜曲面的曲率半径 R , 从柱面镜到全息记录平面的距离 D 等, 就可使条纹的空间频率很高。

二、波动理论

设柱面镜可以作为薄透镜处理, 亦即光线在柱面镜内的平移可以忽略不计时, 在光

收稿日期: 1985年7月1日。

路中插入柱面镜只是使入射波前的位相受到延迟, 其延迟效应的大小正比于柱面镜各点的厚度。现设柱面镜的最大厚度为 Δ_0 , 而在坐标 (x, y) 处的厚度为 $\Delta(x, y)$, 那么, 当入射波通过柱面镜时, 在位置 (x, y) 处所引起的总的位相延迟为:

$$\phi(x, y) = Kn\Delta(x, y) + K\{\Delta_0 - \Delta(x, y)\} \quad (1)$$

式中 $K = 2\pi/\lambda$ 是入射波的波数, n 是柱面镜材料的折射率, $Kn\Delta(x, y)$ 是由柱面镜引起的位相延迟, $K\{\Delta_0 - \Delta(x, y)\}$ 则是由曲面引起的自由空间区域中的位相延迟。因此, 柱面镜对入射波前的作用等效于一个透射系数为:

$$\psi(x, y) = \exp\{iK(n-1)\Delta(x, y)\} \quad (2)$$

的位相物体。

当振幅为 A 、波长为 λ 的平面波由柱面镜底平面正入射时, 在紧靠柱面镜曲面的平面上, 相应的透射波的复振幅 $U_0(x, y)$ 为:

$$\begin{aligned} U_0(x, y) &= A\psi(x, y) \\ &= A\exp\{iK(n-1)\Delta(x, y)\} \end{aligned} \quad (3)$$

此透射波 $U_0(x, y)$ 即作为物波, 与另一束作为参考波的平面波发生干涉, 其干涉光强的分布, 将取决于柱面镜的厚度函数 $\Delta(x, y)$ 的具体表达式, 以及全息干涉仪中, 当柱面镜未插入时两束光之间的夹角 α 。

根据图 1 所示的简单几何关系, 很容易求出柱面镜的厚度函数 $\Delta(x, y)$:

$$\begin{aligned} \Delta(x, y) &= \Delta_0 + R' \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{R'^2}} \right\} \\ &\approx \Delta_0 + \frac{x^2}{2R'} = \Delta_0 - \frac{x^2}{2R} \end{aligned} \quad (4)$$

式中, $R \equiv -R' > 0$ 。

将(4)式代入(3)式, 同时略去共有的恒定位相因子 $K(n-1)\Delta_0$, 即有:

$$U_0(x, y) = A \exp\left\{-iK \frac{n-1}{2R} x^2\right\} \quad (5)$$

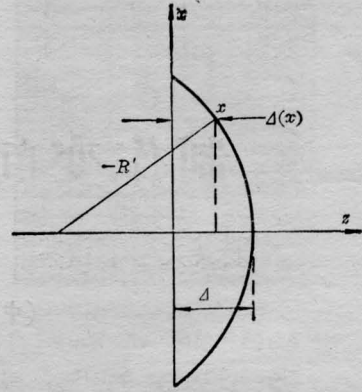


图 1 计算 $\Delta(x)$ 的示意图

设由柱面镜透射的物波到全息记录平面之间的传播满足 Fresnel 衍射条件, 则物波在记录平面上的复场分布 $\psi_0(x_i, y_i)$ 为:

$$\begin{aligned} \psi_0(x_i, y_i) &= \frac{A}{i\lambda D} \iint dx dy P(x, y) \\ &\quad \times \exp\left\{-iK \frac{n-1}{2R} x^2\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{iK}{2D} [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2]\right\} \end{aligned} \quad (6)$$

式中 D 为柱面镜到全息记录平面之间的距离, $P(x, y)$ 为柱面镜的光瞳函数, 定义为:

$$P(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{在光瞳内,} \\ 0 & \text{在光瞳外.} \end{cases}$$

当柱面镜的轴线正好平行于 y 轴时, 对变量 y 的积分限可以认为是无穷大。于是方程(6)可以简化为:

$$\begin{aligned} \psi_0(x_i, y_i) &= \frac{A}{A_1 \sqrt{2D}} \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda} \left[\frac{n-1}{D(n-1) - R}\right] x_i^2\right\} \\ &\quad \times \left\{ \int_0^{w_1(x_i)} d\xi \exp\left(-\frac{i\pi}{2} \xi^2\right) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{w_2(x_i)} d\xi \exp\left(-\frac{i\pi}{2} \xi^2\right) \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

式中: $\xi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} \frac{A_1}{A_1^2} \left(x + \frac{A_2}{A_1^2} x_i\right)$

$$w_1(x_i) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} \frac{A_1}{A_1^2} \left(H_x + \frac{A_2}{A_1^2} x_i\right)$$

$$w_2(x_i) = \frac{\sqrt{2} A_1}{\sqrt{\lambda}} \left(-H_0 + \frac{A_2}{A_1^2} x_i \right)$$

$$A_1^2 = \frac{n-1}{2R} - \frac{1}{2D}, \quad A_2 = \frac{1}{D}$$

而 $2H_0$ 为柱面镜的横向线度。

方程(7)中的 Fresnel 积分:

$$\int_0^{w(x_i)} d\xi \exp \left\{ -\frac{i\pi}{2} \xi^2 \right\}$$

实际上反映了由于柱面镜的有限横向线度而引起入射光在其边缘上的衍射效应。下面我们将看到, 这一边缘衍射的结果将降低全息记录平面上干涉条纹的对比度, 同时使条纹位置有一微小的偏移。当此衍射效应可以忽略不计, 方程(7)可简化为:

$$\begin{aligned} \psi_0(x_i, y_i) &= \frac{A}{A_1 \sqrt{\lambda D}} \\ &\times \exp \left\{ \frac{i\pi}{\lambda} \left[\frac{n-1}{D(n-1)-R} \right] x_i^2 \right\} \\ &\times \exp \left(-\frac{i\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

现在我们仍然考虑衍射存在时的情况。

令:

$$\begin{aligned} &\int_0^{w_1(x_i)} d\xi \exp \left(-\frac{i\pi}{2} \xi^2 \right) \\ &- \int_0^{w_2(x_i)} d\xi \exp \left(-\frac{i\pi}{2} \xi^2 \right) \\ &= [C(w_1) - iS(w_1)] - [C(w_2) - iS(w_2)] \\ &= C(w) - iS(w) \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $C(w) = C(w_1) - C(w_2)$

$$S(w) = S(w_1) - S(w_2)$$

$$C(w_{1,2}) = \int_0^{w_{1,2}} d\xi \cos \left(\frac{\pi}{2} \xi^2 \right) \quad (10)$$

$$S(w_{1,2}) = \int_0^{w_{1,2}} d\xi \sin \left(\frac{\pi}{2} \xi^2 \right)$$

$C(w)$ 和 $S(w)$ 都是全息记录平面坐标 x_i 的函数, 对于不同的 x_i , $C(w)$ 和 $S(w)$ 的值都可以由 Fresnel 考纽线求得。

在略去常数位相因子之后有:

$$\begin{aligned} \psi_0(x_i, y_i) &= \frac{A}{A_1 \sqrt{2D}} \sqrt{C^2(w) + S^2(w)} \\ &\times \exp \left\{ -i \frac{2\pi}{\lambda} \varphi(w) \right\} \\ &\times \exp \left\{ \frac{i\pi}{\lambda} \left[\frac{n-1}{D(n-1)-R} \right] x_i^2 \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $\frac{2\pi}{\lambda} \varphi(w) \equiv \text{arc tg} \frac{S(w)}{C(w)}$ 。

设全息干涉仪中两路光束的夹角为 α 时, 平面参考波在全息记录平面上的复场振幅 $\psi_R(x_i, y_i)$ 可以表示为:

$$\psi_R(x_i, y_i) = A \exp \left\{ -\frac{i2\pi}{\lambda} \sin \alpha, x_i \right\} \quad (12)$$

而全息平面上总的波扰动 $\psi(x_i, y_i)$ 为:

$$\psi(x_i, y_i) = \psi_0(x_i, y_i) + \psi_R(x_i, y_i) \quad (13)$$

光强分布为:

$$\begin{aligned} I(x_i, y_i) &= |\psi(x_i, y_i)|^2 \\ &= I_0 \left\{ Q^2(w) + 1 + 2Q(w) \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} \Phi(x_i) \right] \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

式中

$$I_0 = A^2$$

$$Q(w) = \frac{1}{A_1 \sqrt{2D}} \sqrt{C^2(w) + S^2(w)}$$

$$\Phi(x_i) = \frac{n-1}{D(n-1)-R} \frac{x_i}{2} + x_i \sin \alpha - \varphi(w) \quad (15)$$

方程(14)式以及(15)式给出了全息记录平面上的光强分布, 其干涉条纹之间的间距随象平面坐标 x_i 的不同而变化。根据光强分布的极大条件, 分别令:

$$\begin{aligned} \Phi(x'_i) &= \frac{n-1}{D(n-1)-R} \frac{x_i'^2}{2} \\ &+ x_i' \sin \alpha - \varphi(w') = m\lambda \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \Phi(x''_i) &= \frac{n-1}{D(n-1)-R} \frac{x_i''^2}{2} \\ &+ x_i'' \sin \alpha - \varphi(w'') = (m+1)\lambda \end{aligned}$$

同时考虑到 $x_i''^2 - x_i'^2 \approx 2x_i'(x_i'' - x_i')$, 即可求得干涉条纹的间距为:

$$\Delta x = \frac{\lambda + [\varphi(w') - \varphi(w'')]}{\frac{n-1}{D(n-1) - R} x_i + \sin \alpha} \quad (16)$$

当 $\Delta(x) = (x_i'' - x_i')$ 很小时 $\varphi(w') \approx \varphi(w'')$, 于是方程(16)式可以近似地表示为:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\frac{n-1}{D(n-1) - R} x_i + \sin \alpha} \quad (17)$$

而干涉图样的空间频率 $\nu_x = \frac{1}{\Delta x}$ 为:

$$\nu_x = \frac{n-1}{\lambda [D(n-1) - R]} x_i + \frac{1}{\lambda} \sin \alpha \quad (18)$$

当柱面镜边缘的衍射效应可以不计, 根据方程(8)式, 按照与前完全相同的方法可以证明, (18)式中的近似关系即成为确切相等。事实上, 如果不考虑衍射效应, $\varphi(w)$ 就不再是全息记录平面坐标 x_i 的函数, 而是一个常量位相因子。

从方程(18)式可以看出, 为了使干涉图样的空间频率尽可能地高, 要求入射波的波长 λ 尽可能地短, 全息干涉仪中两条光路之间的夹角 α 尽可能地大。另一方面, 由于空间频率 ν_x 随条纹位置 x_i 的变化规律为:

$$\frac{d\nu_x}{dx_i} = \frac{n-1}{D(n-1) - R} \quad (19)$$

因此, 当距离 D 、柱面镜曲面的曲率半径 R 和柱面镜折射率 n 之间满足:

$$(n-1)D \approx R$$

时, 干涉图样的空间频率 ν_x 将随着 x_i 的增加而迅速增大。

从方程(14)式可以求得全息记录平面上干涉图样的光强分布的极大值和极小值分别为:

$$I_{\max} = I_0 \{Q(w) + 1\}^2$$

$$I_{\min} = I_0 \{Q(w) - 1\}^2 \quad (20)$$

而干涉条纹的能见度为:

$$\Gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2Q(w)}{Q^2(w) + 1} \quad (21)$$

由此可知, 干涉图样中的光强分布和对比度将随着条纹所在位置的不同而发生变化。造

成这一现象的主要因素是柱面镜边缘的衍射, 以及柱面镜引起入射波前畸变而造成的衰减作用。为了消除衍射效应, 可以适当地增大柱面镜曲面的曲率半径 R 。这可以通过调节距离 D 或者适当地选择全息干涉仪中两光束间的夹角来实现。

以上讨论是在全息干涉仪的一个臂中插入一柱透镜获得的结果, 若用一抛物面代替柱面镜, 则抛物面的厚度函数为:

$$\Delta(x) = \Delta_0 - \frac{x^2}{2p} \quad (22)$$

以同样的方式进行运算, 可以求得干涉图形的空间频率为:

$$\nu = \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{n-1}{(n-1) - 2p} \cdot \frac{x_i}{D} + \sin \alpha \right\} \quad (23)$$

可见全息干涉仪中插入抛物面, 所获得的干涉条纹的空间频率仍按线性规律变化, 两者所不同的只是变化斜率不一样。

三、实验结果

实验装置如图2所示, 柱面镜的曲率半径 $R=15$ cm, 柱面镜距记录平面的距离 $D=69$ cm, 未插入柱面镜时, 两光束之间的夹角 $\alpha=17.3^\circ$ 。光源是 He-Ne 激光器, 摄得的可变间距干涉条纹照片经放大后如图3所示, 干涉条纹的空间频率随 x_i 的变化如图4所示。显然, 实验结果与公式(18)一致。

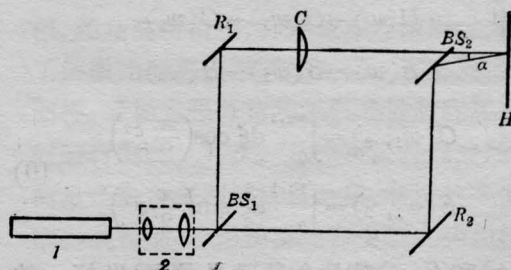


图2 制作原理图

1—He-Ne 激光器; 2—扩束望远镜; C—柱面镜;
BS—分束器; R—全反射镜

(下转第 309 页)

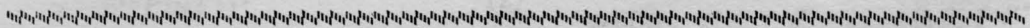
和普通干涉条纹图样不同的是,由式(6)所描述的是频率变化型的条纹图样。相对于 A_1^2 、 A_2^2 和 $\cos \frac{\Delta\phi}{2}$ 来说 $\cos\left(\phi + \frac{\Delta\phi}{2}\right)$ 是快变的,故这种条纹图样经高通滤波后(图3)便可见到。

无论是根据 Y. Y. Hung 曾推导出的小的错位相对位移导数与位相变化的关系,或者根据文献[4]中对 Y. Y. Hung 描述的修改都附合本实验的实时散斑错位干涉照相的结果。显而易见,散斑错位干涉法,当使用 Fe:LiNbO₃ 晶体作其记录介质时,便能实时地记录散斑错位条纹图样,并可以全场实时

地观察。另一方面,由于错位镜的使用,物体上 $P(x, y)$ 点与 $P(x+\delta x, y)$ 点的光到达 Fe:LiNbO₃ 晶片上时互为参考光和物光而构成了象平面全息图。这样,在观察时就会更为方便。在自然光下便能观察到条纹图样,以便判断出被检测物缺陷的位置。

参 考 文 献

- [1] H. M. Smith; "Holographic Recording Materials", Springer-Ver lag, 1977.
- [2] 何雪梅等;《应用激光联刊》1982, 2, No. 4, 9.
- [3] Y. Y. Hung; *Opt. Engineering*, 1982, 21, No. 3 391.
- [4] 何毓宁;《光学学报》,1985, 5, No. 3, 241.



(上接第 294 页)

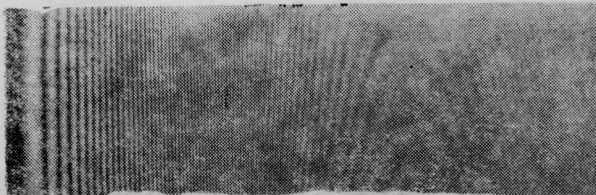


图3 具有可变间距的干涉图形照片

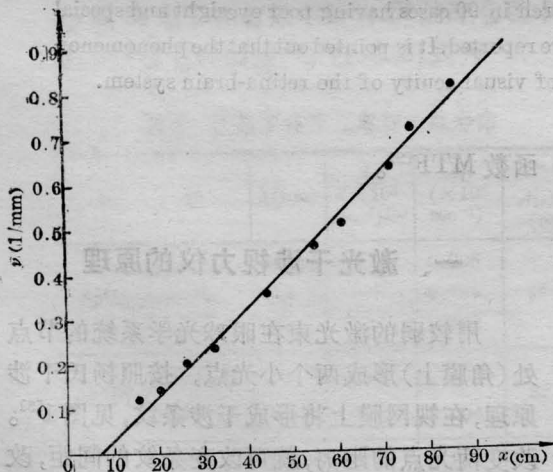


图4 $\nu \sim x_i$ 曲线

四、讨 论

我们在导出柱面镜的厚度函数 $\Delta(x)$,

时,考虑到 $x \ll R$, 只取了 $(x/R)^2$ 的一次项而忽略了其余的高次项(见方程(4))。如果将 $(x/R)^2$ 的二次项也计算在内,则有:

$$\Delta(x) = \Delta_0 - \frac{x^2}{2R} + \frac{x^4}{8R^3} \quad (24)$$

进一步的计算表明,此时的光栅空间频率为:

$$\nu = \frac{1}{\lambda} \sin \alpha + \frac{(n-1)x_i}{\lambda[D(n-1) - R]} + \frac{(n-1)^2 x_i^2}{\lambda[(n-1)D - R]^2} \quad (25)$$

如果我们取 $n=1.51$, $\lambda=632.8 \text{ nm}$, $D=69 \text{ cm}$, $R=15 \text{ cm}$, $\alpha=17.3^\circ$, 得到:

$$\nu = 4.70 \times 10^2 + 4.00x_i + 5.04 \times 10^{-3}x_i^2$$

在 $x_i=25 \text{ mm}$ 处,由方程(18)计算得到 $\nu=570 \text{ 1/mm}$, 而由于非线性项引起的修正为 3 1/mm , 相对误差为 0.5% , 因此,我们认为忽略 $(x/R)^2$ 的高次项是完全合理的。

参 考 文 献

- [1] M. V. R. K. Murty; *J. Opt. Soc. Am.*, 1960, No. 1, 7.
- [2] M. V. R. K. Murty et al.; *Optical Engineering*, 1979, 18, No. 5, 523.