中国激光
第13卷 第4期

同步泵浦染料激光器系统所产生的微微秒脉冲的特性
——三阶增益展开的锁模方程及其解

鲍晓毅　关信安
（南开大学物理系）

提要：本文提出了三阶增益展开锁模方程，并用Lagrange乘子法求解该方程，得到了同步泵浦染料激光脉冲的宽度、强度和延时（它是泵浦脉冲相对染料脉冲的提前量）的简单解析表达式，能够圆满解释目前已发表的某些实验事实[4]。

Characteristics of picosecond pulses generated from synchronously pumped dye laser system——The third order expansion of gain of mode-locked equation and its solution

Bao Xiaoyi, Guan Xinan
(Department of Physics, Nankai University)

Abstract: In this paper, we present the third order expansion of gain of mode-locked equation, and solved the equation with Lagrange multiplier method. The results provide simple analytic expressions for the pulsewidth, pulse intensity and delay (which is the advance of the pump pulse relative to the dye pulse) in synchronously pumped dye laser. They can explain satisfactorily some experimental results[4].

同步泵浦锁模有一些引人注目的特性，其中最主要的两点是：染料脉宽比泵浦脉宽窄两个数量级；超短脉冲的能量和宽度与失配量 δT 的关系是非对称的（这里失配量 $\delta T=T_{pump}-T_{dye}$，$T_{pump}$ 和 T_{dye} 分别为泵浦和染料光脉冲的重复周期）。一些作者，例如：N. J. Frigo[1] 和 C. P. Ausschnitt[2] 用自再现轮廓 (self-reproducing profile)[3] 的方法得到了稳态脉冲解。[2]的分析方法存在下面问题：(1) 锁模方程中的增益展开只到二阶，舍去了三阶以上的展开项；(2) 为了数学上处理简便，对泵浦氩离子激光器的输出脉冲形状采用不太符合实际的双曲正弦平方形。大量的实验表明，氩离子输出脉冲形状更接近于高斯型的输出；(3) 没有给出同步

收稿日期：1985年1月15日。

泵浦输出参数的解。所以，难于进行实验测量值与理论计算值的比较。

我们对锁模方程中的增益展开到三阶后，用 Lagrange 乘子法求解，并注意到氩离子输出形状为高斯脉冲这一点，得到同步泵浦输出参数关系的方程。然后，运用一定的数学简化和前述的同步泵浦主要特性，求解出对应于实验测量值的解析表达式。它能很好地解释诸如同步泵浦脉冲脉宽、功率及二次谐波功率、泵浦脉冲染料脉冲之间的相对延迟与失配因子 δT 的关系等等。

对于染料脉冲包络 $V(t)$，基本锁模方程为[2]

$$\left[G(t)-L+\delta T\,\frac{d}{dt}+\frac{1}{\omega_c^2}\,\frac{d^2}{dt^2}\right]V(t)=0 \tag{1}$$

式中 $G(t)$ 为往返增益，L 为常数的腔损耗，ω_c 为光学滤波器所确定的内腔带宽。

由(1)可看出，要求解 $V(t)$ 必须给出 $G(t)$，即要知道在染料脉冲 $V(t)$ 附近增益的精确模型。我们采用如图1所示的模型[2]。

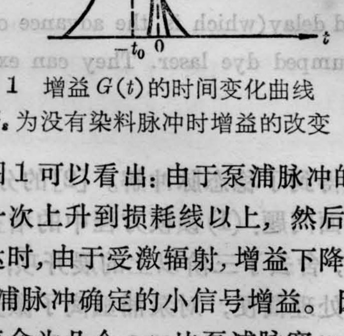

图1　增益 $G(t)$ 的时间变化曲线

G_s 为没有染料脉冲时增益的改变

从图1可以看出：由于泵浦脉冲的激发，增益第一次上升到损耗线以上，然后在染料脉冲到达时，由于受激辐射，增益下降。图中 G_s 为泵浦脉冲确定的小信号增益。因染料的荧光寿命为几个 ns，比泵浦脉宽 τ_p(100～200 ps)长得多，所以在泵浦脉冲时间内的自发辐射可以忽略。

图1中的增益可由下面的速率方程来确定

$$\frac{dG}{dt}=\frac{dG_s}{dt}-I(t)G(t) \tag{2}$$

在求解(2)的过程中，对 $G(t)$ 展开到第三阶。

$$\begin{aligned}G(t)\approx\, & G_{s0}\left(1-\int_{-\infty}^{0}I(t)dt\right)\\ & +\left(\frac{1}{\tau_r}-I_0G_{s0}\right)t\\ & -\left[\frac{1}{\tau_c^2}+\frac{I_0}{2}\left(\frac{1}{\tau_r}-I_0G_{s0}\right)\right]t^2\\ & +\frac{1}{6}\left\{\frac{3}{\tau_k^3}+I_0\left[\frac{2}{\tau_c^2}\right.\right.\\ & \left.+I_0\left(\frac{1}{\tau_r}-I_0G_{s0}\right)\right]\\ & \left.-G_{s0}\frac{d^2I}{dt^2}\bigg|_0\right\}t^3\end{aligned} \tag{3}$$

式中：

$$\left.\begin{aligned}& G_{s0}\equiv G_s(0) \qquad \frac{1}{\tau_r}\equiv\frac{dG_s}{dt}\bigg|_0\\ & \frac{1}{\tau_c^2}\equiv-\frac{1}{2}\,\frac{d^2G_s}{dt^2}\bigg|_0 \quad \frac{1}{\tau_k^3}\equiv\frac{1}{3}\,\frac{d^3G_s}{dt^3}\bigg|_0\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

为求解方便，令

$$G(t)=A+Bt+Ct^2+Dt^3 \tag{5}$$

对应的 A、B、C、D 分别为：

$$A=G_{s0}\left(1-\int_{-\infty}^{0}I(t)dt\right) \tag{6}$$

$$B=\frac{1}{\tau_r}-I_0G_{s0} \tag{7}$$

$$C=-\left[\frac{1}{\tau_c^2}+\frac{I_0}{2}\left(\frac{1}{\tau_r}-I_0G_{s0}\right)\right] \tag{8}$$

$$\begin{aligned}D=\frac{1}{6}\left\{\frac{3}{\tau_k^3}+I_0\left[\frac{2}{\tau_c^2}\right.\right. & \\ \left.\left.+I_0\left(\frac{1}{\tau_r}-I_0G_{s0}\right)\right]-G_{s0}\frac{d^2I}{dt^2}\bigg|_0\right\} & \end{aligned} \tag{9}$$

将(5)同二阶展开情况比较多了 Dt^3 项，但当我们进行系数比较后发现 Dt^3 项和 Ct^2 项约差两个量级，故可以采用在原来解 Ct^2 项加一个微扰，即

$$Ct^2\to Ct^2+Dt^3=t^2(C+Dt)=t^2C' \tag{10}$$

令 $G(t)$ 展开到二阶求得的解为 $V_2(t)$，展开到三阶的解为 $V_3(t)$，由 Lagrange 乘子公式有：

$$V_3=V_2+\frac{\partial V_2}{\partial C'}\bigg|_{C'=C}(C'-C) \tag{11}$$

$$\therefore\ V_3=e^{-t^2/2\tau^2}\left(1-\frac{Dt^3}{4C\tau^2}\right) \tag{12}$$

式(12)的详细求解见附录1。

由于染料脉冲光强正比于包络的平方，所以

$$I(t)\sim I|V(t)|^2$$

即

$$I(t)=I_0\left(1-\frac{Dt^3}{4C\tau^2}\right)^2 e^{-t^2/\tau^2} \tag{13}$$

由(13)得到(9)中的

$$\frac{d^2I}{dt^2}\bigg|_0=-2I_0/\tau^2$$

为了求出同步泵浦输出参数，还必须知道对应(6)、(7)、(8)、(9)各式中A、B、C、D四个参数与输出参数的关系。因此把式(12)代入(1)中，求出对应系数为：

$$G_{s0}\left(1-\int_{-\infty}^{0}I(t)dt\right)=L+\frac{1}{\omega_c^2\tau^2} \tag{14}$$

$$\frac{1}{\tau_r}-I_0G_{s0}=\frac{\delta T}{\tau^2}-\frac{1}{\omega_c^4\tau^4\delta T} \tag{15}$$

$$\frac{1}{\tau_c^2}+\frac{I_0}{2}\left(\frac{1}{\tau_r}-I_0G_{s0}\right)=\frac{3}{2\omega_c^2\tau^4} \tag{16}$$

$$\frac{1}{6}\left\{\frac{3}{\tau_k^3}+I_0\left[\frac{2}{\tau_c^2}+I_0\left(\frac{1}{\tau_r}-I_0G_{s0}\right)\right]+G_{s0}\frac{2I_0}{\tau^2}\right\}=\frac{1}{\omega_c^4\tau^6\delta T} \tag{17}$$

在(14)～(17)中，有G_{s0}、τ_r、τ_c和τ_k四个和小信号增益$G_s(t)$有关的参数，由[2]我们知道：

$$G_s(t)\approx G_m\int_{-\infty}^{t}I_p(t')dt' \tag{18}$$

G_m是最大可获得的增益，I_p为泵浦光强。

当泵浦源采用锁模氩离子激光器时，因这种激光器输出脉冲形状为高斯形，故取

$$I_p(t)=\frac{E_{p0}}{\sqrt{\pi}\,\tau_p}e^{-\left(\frac{t+t_0}{\tau_p}\right)^2} \tag{19}$$

E_{p0}为对染料吸收的饱和能量归一化后的脉冲总能量，t_0为泵浦脉冲相对染料脉冲的提前量，τ_p为泵浦脉冲的脉冲宽度。

$$\begin{aligned}\therefore\ G_s(t)&\simeq G_m\int_{-\infty}^{t}I_p(t')dt'\\&=\frac{G_mE_{p0}}{2}\left[1+\mathrm{erfc}\left(\frac{t+t_0}{\tau_p}\right)\right]\end{aligned} \tag{20}$$

误差函数

$$\mathrm{erfc}\left(\frac{t+t_0}{\tau_p}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{t+t_0}{\tau_p}}e^{-t'^2}dt'$$

于是，我们得到在(4)中所定义的与小信号增益$G_s(t)$有关的各系数：

$$G_{s0}\equiv G_s(0)=\frac{G_mE_{p0}}{2}\left[1+\mathrm{erfc}\left(\frac{t_0}{\tau_p}\right)\right] \tag{21}$$

$$\frac{1}{\tau_r}\equiv\frac{dG_s}{dt}\bigg|_0=\frac{G_mE_{p0}}{\sqrt{\pi}\,\tau_p}e^{-t_0^2/\tau} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau_c^2}&\equiv-\frac{1}{2}\frac{d^2G_s}{dt^2}\bigg|_0\\&=\frac{G_mE_{p0}}{\sqrt{\pi}\,\tau_p}\frac{t_0}{\tau_p^2}e^{-t_0^2/\tau_p^2}\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau_k^3}&\equiv\frac{1}{3}\frac{d^3G_s}{dt^3}\bigg|_0\\&=\frac{1}{3}\frac{G_mE_{p0}}{\sqrt{\pi}\,\tau_p^3}\left(\frac{4t_0^2}{\tau_p^2}-2\right)e^{-t_0^2/\tau_p^2}\end{aligned} \tag{24}$$

说明一下，方程(14)中$\int_{-\infty}^{0}I(t)dt$

$$\begin{aligned}&=\int_{-\infty}^{0}I_0\left(1+\frac{t^3}{6\omega_c^2\tau^4\delta T}\right)^2e^{-t^2/\tau^2}dt\\&=I_0\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\tau-\frac{1}{6\omega_c^2\delta T}+\frac{5}{192\omega_c^4\tau\delta T^2}\right)\end{aligned} \tag{25}$$

当我们把方程(21)～(24)代入到(14)～(17)中，根据同步泵浦锁模的实验事实进行数学简化后，得到了同步泵浦染料激光脉冲的脉宽、光强、延迟的解析表达式为：

$$\tau=\sqrt{\frac{\tau_p\delta T}{G_mE_{p0}}\sqrt{\pi}+\frac{\tau_p}{5\omega_c^2\delta T}\left(1+\frac{t_0}{\tau_p}\right)} \tag{26}$$

$$I_0=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{G_mE_{p0}/\tau_p}{\omega_c^2\delta T^2+G_mE_{p0}\left(1+\frac{t_0}{\tau_p}\right)} \tag{27}$$

$$t_0/\tau_p=\frac{\sqrt{\pi}}{2\omega_c^2\tau_p\delta T}+\left(\frac{2L}{G_mE_{p0}}-1\right)$$

$$\pm\frac{\sqrt[4]{\pi}}{\omega_c\sqrt{\tau_p\delta T}}$$

$$\times\sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{4\omega_c^2\tau_p\delta T}+\frac{2L}{G_mE_{p0}}} \quad (28)$$

关于(26)、(27)、(28)的求解过程见附录2

在式(28)中，第三项取负号的一组延迟，当选取一定的泵浦能量和腔损耗时 $t_0<0$，它说明染料脉冲提前于泵浦脉冲。将这组数值代入 τ 和 I_0 的表达式后，发现与实验结果不符，故 t_0/τ_p 取负号的一组数值得不到稳定的同步泵浦锁模脉冲。因此我们舍去为负的一组数值，只保留取正号的一组，即

$$t_0/\tau_p=\frac{\sqrt{\pi}}{2\omega_c^2\tau_p\delta T}+\left(\frac{2L}{G_mE_{p0}}-1\right)$$

$$+\frac{\sqrt[4]{\pi}}{\omega_c\sqrt{\tau_p\delta T}}$$

$$\times\sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{4\omega_c^2\tau_p\delta T}+\frac{2L}{G_mE_{p0}}} \quad (29)$$

至此，我们得到了同步泵浦染料激光脉冲的脉宽、光强、延迟的简单解析表达式，有关它们的一些讨论和实验上的解释将在本文的第二部分[4]给出。

附 录 1

由[2]中的二阶解结果：

$$V_2\sim e^{-t^2/2\tau^2} \quad (1\text{-}1)$$

并把[2]中的二阶解方程：

$$G_{s0}\left(1-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\tau I_0\right)-L=\frac{1}{\omega_c^2\tau^2} \quad (1\text{-}2)$$

$$\tau/\tau_r-I_0G_{s0}\tau=\frac{\delta T}{\tau} \quad (1\text{-}3)$$

$$2\tau^2/\tau_c^2+I_0\delta T=\frac{2}{\omega_c^2\tau^2} \quad (1\text{-}4)$$

代到(8)中，有 $C=-1/\omega_c^2\tau^4$

$$\therefore\ V_2\sim e^{-t^2/2\tau^2}=e^{-\frac{t^2}{2}\sqrt{-\omega_c^2(C+Dt)}}=e^{-\frac{t^2}{2}\sqrt{\omega_c^2-C'}} \quad (1\text{-}5)$$

将(1-5)代入(1)中：

$$V_3=V_2(C)+\left.\frac{\partial V_2}{\partial C'}\right|_{c=c'}(C'-C)$$

$$\therefore\ V_3=e^{-t^2/2\tau^2}\left(1-\frac{Dt^3}{4C\tau^2}\right) \quad (1\text{-}6)$$

附 录 2

将(21)～(24)代入(14)～(17)后有：

$$L+\frac{1}{\omega_c^2\tau^2}=\frac{G_mE_{p0}}{2}\left[1+\mathrm{erfc}\left(\frac{t_0}{\tau_p}\right)\right]$$

$$\times\left[1-I_0\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\tau-\frac{1}{6\omega_c^2\delta T}+\frac{5}{192\omega_c^4\tau\delta T^2}\right)\right] \quad (2\text{-}1)$$

$$\frac{\delta T}{\tau^2}-\frac{1}{\omega_c^4\tau^4\delta T}=\frac{G_mE_{p0}}{\sqrt{\pi}\,\tau_p}e^{-t_0^2/\tau_p^2}$$

$$-I_0\frac{G_mE_{p0}}{2}\left[1+\mathrm{erfc}\left(\frac{t_0}{\tau_p}\right)\right] \quad (2\text{-}2)$$

$$3/2\omega_c^2\tau^4=\frac{G_mE_{p0}t_0}{\sqrt{\pi}\,\tau_p^3}e^{-t_0^2/\tau_p^2}$$

$$+\frac{I_0}{2}\left(\frac{\delta T}{\tau^2}-\frac{1}{\omega_c^4\tau^4\delta T}\right) \quad (2\text{-}3)$$

$$\frac{1}{\omega_c^4\tau^6\delta T}=\frac{1}{3}\frac{G_mE_{p0}}{\sqrt{\pi}\,\tau_p^3}\left(2\frac{t_0^2}{\tau_p^2}-1\right)e^{-t_0^2/\tau_p^2}$$

$$+\frac{I_0}{2\omega_c^2\tau^4} \quad (2\text{-}4)$$

注意到上面的误差函数展开成级数后有：

$$\mathrm{erfc}\,(t_0/\tau_p)\simeq\frac{t_0}{\tau_p}-\frac{1}{3}\frac{t_0^3}{\tau_p^3} \quad (2\text{-}5)$$

幂指数展开有：

$$e^{-t_0^2/\tau_p^2}\simeq1-\frac{2t_0^2}{\tau_p^2} \quad (2\text{-}6)$$

根据同步泵浦脉冲的实验事实，泵浦脉冲宽度 $\tau_p\gg$ 染料脉宽 τ，并代入(2-5)、(2-6)于(2-1)、(2-2)、(2-3)、(2-4)，并进行数学运算后，可得：

$$\frac{t_0}{\tau_p}=\frac{\sqrt{\pi}}{\omega_c^2\tau_p\delta T}+\frac{2L}{G_mE_{p0}}-1$$

$$\pm\frac{\sqrt[4]{\pi}}{\omega_c\sqrt{\tau_p\delta T}}\sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{4\omega_c^2\tau_p\delta T}+\frac{2L}{G_mE_{p0}}} \quad (2\text{-}7)$$

$$\tau=\sqrt{\frac{\tau_p\delta T}{G_mE_{p0}}\sqrt{\pi}+\frac{\tau_p}{5\omega_c^2\delta T}\left(1+\frac{t_0}{\tau_p}\right)} \quad (2\text{-}8)$$

$$I_0=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{G_mE_{p0}/\tau_p}{\omega_c^2\delta T^2+G_mE_{p0}\left(1+\frac{t_0}{\tau_p}\right)} \quad (2\text{-}9)$$

参 考 文 献

[1] N. J. Frigo *et al.*; *IEEE J. Quant. Electr.*, 1977, **QE-13**, 101.

[2] C. P. Ausschnitt *et al.*; *IEEE J. Quant. Electr.*, 1979, **QE-15**, 912.

[3] G. H. C. New; *Rep. Prog. Phys.*, 1983, **46**, 877.

[4] 鲍晓毅，关信安；《中国激光》，待发表