

变参数摆动器的自由电子激光器—— 对具有轴向磁场的情形的讨论

王元殿

(中国科学院空间物理研究所)

提要: 对于具有轴向磁场的自由电子激光器, 同样可以采用波长逐渐减小的摆动器以提高其转换效率。文中并给出了具体的计算公式, 讨论了同无轴向磁场情形的区别。

Free-electron lasers with tapered wigglers: a discussion on the case with axial magnetic field

Wang Yuandian

(Institute of Space Physics, Academia Sinica)

Abstract: It is pointed out in this paper that in order to increase efficiency of free-electron lasers with axial magnetic field, tapered wigglers can be applied. At the same time, general formulae for calculation of the parameters of the tapered wigglers have been derived, too. A comparison has been made between the two cases with and without axial magnetic field.

一、引言

为了提高自由电子激光器中电子能量对辐射场能量的转换效率, 可采用变参数的摆动器, 以保持电子和辐射场的“同步”。对于无轴向磁场的情形, 许多作者已进行过讨论, 如[1]。在采用强流电子束的自由电子激光器中, 为了抑制电子束的横向扩展, 常常加上一个轴向磁场。这时电子的运动轨道较无轴向磁场的情形要复杂得多^[2]。对于这种情形

下变参数摆动器的自由电子激光器的分析目前还很少。本文对这种情形进行某种简化讨论, 结果表明, 为了提高效率同样可采用波长逐渐减小的摆动器, 但具体结果和无磁场的情形略有不同。

二、单粒子轨道分析

暂且忽略集体效应, 用单粒子轨道的理论进行分析。

收稿日期: 1985年1月28日。

轴向磁场和摆动磁场可写成

$$\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{e}_z - B_w \left[\hat{e}_x \cos \int k_w(z) dz + \hat{e}_y \sin \int k_w(z) dz \right], \quad (1)$$

而辐射场可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s &= E_s(z) [\hat{e}_x \cos(\omega_s t - k_s z) + \hat{e}_y \sin(\omega_s t - k_s z)], \\ \mathbf{B}_s &= B_s(z) [-\hat{e}_x \sin(\omega_s t - k_s z) + \hat{e}_y \cos(\omega_s t - k_s z)]. \end{aligned} \quad (2)$$

在这里已假定辐射场的波矢 k_s 是不变的, 这是因为辐射场的频率 ω_s 是固定的, 可认为 $\omega_s/k_s = C$ 。Kroll 等人进行了更严格的分析^[1], 引入了 k_s 的变化 δk_s , 结果表明 $\delta k_s \ll k_w$ 。由于 $k_s \gg k_w$, 因此同 k_w 和 k_s 相比 δk_s 是可以忽略不计的。由电子的运动方程

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{C} \right) \quad (3)$$

可得到

$$\begin{aligned} \frac{dp_\perp}{dt} &= \omega_w p_z \sin \left(\phi - \int k_w dz \right) + \omega_r (p_z - mrc) \cos \psi, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \omega_0 - \omega_s + k_s v_z + \omega_w \frac{p_z}{p_\perp} \cos \left(\phi - \int k_w dz \right) + \frac{\omega_r (mrc - p_z)}{p_\perp} \sin \psi, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_z}{dt} &= -\omega_w p_z \sin \left(\phi - \int k_w dz \right) - \omega_r p_\perp \cos \psi, \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\omega_0 = eB_0/mrc$ 为对应轴向磁场 B_0 电子的回旋频率, r 为相对论因子, $\omega_w = eB_w/mrc$, $\omega_r = eB_s/mrc$, 二者分别为对应摆动器磁场 B_w 和辐射场磁场分量 B_s 所导入的电子回旋频率。前面已经提到, ω_s 和 k_s 分别为辐射场的频率和波矢。 ϕ 为电子的横向速度 \mathbf{v}_\perp 同 \hat{e}_w 的夹角, ψ 为 \mathbf{v}_\perp 同 \mathbf{E}_s 的夹角, $\psi = \phi - \omega_s t + k_s z$ 。在上面的推导中已用到 $\omega_s/k_s = C$ 。通常 $B_s \ll B_w$, B_s 比 B_w 至少小一到两个量级, 并且 $v_z \approx C$, 因此(5)式右边第三项较第二项可以忽略, 该式可近似为

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \omega_0 - \omega_s + k_s v_z + \omega_w \frac{p_z}{p_\perp} \cos \left(\phi - \int k_w dz \right). \end{aligned} \quad (7)$$

此外还可以导出

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{eE_s}{mc^2} v_\perp \cos \psi. \quad (8)$$

(8)式描述电子的能量随时间的变化。要使在相互作用区电子的能量逐渐减小, 从而辐射场的能量逐渐增加, 需使 ψ 近似保持为常数。 ψ 保持为常数就是所谓的电子与波“同步”, 或者说电子处于“捕获”状态。

前面已经提到, 通常 B_s 比 B_w 至少小一到两个量级, 即 $\omega_r \ll \omega_w$, 引入 $\vartheta = \phi - \int k_w dz + \pi$ 代表 \mathbf{v}_\perp 同 \mathbf{B}_w 间的夹角, 方程(4)、(6)、(7)可以简化为

$$\frac{dp_\perp}{dt} = -\omega_w p_z \sin \vartheta, \quad (9)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_0 - k_w v_z - \omega_w \frac{p_z}{p_\perp} \cos \vartheta, \quad (10)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = \omega_w p_z \sin \vartheta. \quad (11)$$

这个方程组的一般解仍较复杂, 但存在一个特解:

$$\vartheta = 0, \quad p_z = \text{const}, \quad p_\perp = p_z \omega_w / (\omega_0 - k_w v_z),$$

这里已假定 $\omega_w \ll |\omega_0 - k_w v_z|$, 即电子束不满足回旋共振条件 $\omega_0 = k_w v_z$ 。下面我们只就这个特解所代表的简单情形进行讨论。将这里所得到的近似解代入方程(7), 结果得

$$\frac{d\psi}{dt} = (k_s + k_w) v_z - \omega_s. \quad (12)$$

利用 $dz = v_z dt$, 方程(12)可以改写为

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dz} &= k_s + k_w - \frac{\omega_s}{v_z} \\ &\approx k_w - \frac{k_s}{2\gamma^2} \left[1 + \frac{p_z^2 \omega_w^2}{m^2 c^2 (\omega_0 - k_w v_z)^2} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

这里用到了关系式 $\omega_s = k_s c$, $1 - \beta_z^2 = \gamma^{-2} + \beta_\perp^2$, 以及 $1 - \beta_z^2 = (1 + \beta_z)(1 - \beta_z) \approx 2(1 - \beta_z)$, 其中 $\beta_{z,\perp} = v_{z,\perp}/c$ 。(13)式可进一步简化为

$$\frac{d\psi}{dz} = k_w - \frac{k_s}{2r^2} (1 + a_w^2 \lambda^2), \quad (14)$$

式中 $a_w = eB_w/mc^2 k_w$ 为归一化摆动场强度, $\lambda^2 = (\omega_c/k_w v_z - 1)^{-2}$ 。顾及到前面求得的解 p_{\perp} , 方程(8)可以改写为

$$\frac{dr}{dz} = -\lambda a_s a_w k_s r^{-1} \cos \psi, \quad (15)$$

式中 $a_s = eE_s/mc^2 k_s$ 为归一化辐射场强度, λ 为 λ^2 的正根。推导(15)式时采用了近似关系 $dz = v_z dt \cong c dt$ 。

当不存在轴向磁场, 即 $\omega_c = 0$ 时, $\lambda = 1$, 方程(14)和(15)化为

$$\frac{d\psi}{dz} = k_w - \frac{k_s}{1+r^2} (1 + a_w^2), \quad (16)$$

$$\frac{dr}{dz} = -a_s a_w k_s r^{-1} \cos \psi. \quad (17)$$

这个结果与 Mani 所得到的公式完全相同^[3], 本质上与 Kroll 等人的结果也一样^[1]。

至此我们得到了一个结果, 当存在轴向磁场时, ψ 和 r 的变化尚与因子 λ 有关, 而 λ 取决于基本工作参数的选择, 它表征着自由电子激光器的工作条件远离回旋共振的程度。

下面我们讨论电子和辐射场保持准确同步 ($d\psi/dz = 0$) 时所应满足的条件, 此时 ψ 和 r 的相应值用 ψ_r 和 r_r 表示。由方程(14)和(15),

$$r_r^2 = \frac{k_s}{2k_w} (1 + a_w^2 \lambda^2), \quad (18)$$

$$\frac{dr_r^2}{dz} = -2\lambda a_s a_w k_s \frac{1}{r_r} \cos \psi_r. \quad (19)$$

由于在自由电子激光的作用区, r_r 是逐渐减小的 ($\cos \psi_r > 0$), 由(18)式可以看出必须使 k_w 逐渐增加(或者说波长 λ_w 逐渐减小), 才能维持这种准确的同步关系。当然, 亦可采用使 a_w 逐渐减小的办法。换句话说, 要保持电子和辐射场的同步以提高转换效率, 可以采用“变尖”的摆动器。这个结论同无轴向磁场的情形相同。公式(18)和(19)提供了参数设计的依据。

需要指出的是, 虽然 $a_w^2 \lambda^2$ 也同 k_w 有关,

但它随 k_w 的变化同 k_w 自身的变化相比为高阶量。换言之, 可以认为 $a_w^2 \lambda^2$ 只随 B_w 的变化而变化。

大部分电子与波不是准确的处于同步状态, 而是围绕同步状态而摆动。如果摆动幅度较小, 引入 $\delta r = r - r_r$, 则可将方程(14)和(15)关于 δr 线性化, 得

$$\frac{d\psi}{dz} = 2k_w \frac{\delta r}{r_r}, \quad (20)$$

$$\frac{d\delta r}{dz} = -\lambda a_s a_w k_s r_r^{-1} (\cos \psi - \cos \psi_r). \quad (21)$$

这个方程组除了一个因子 λ 外同无轴向磁场的情形并没有区别。对它们的一般讨论可参照文献[1]和[3]。

这个方程组所描述的是偏置摆的运动, 很难得到解析解, 但可进行某些相空间中的讨论。方程组(20)和(21)可以看作哈密尔顿量

$$H = \frac{k_w}{r_r} (\delta r)^2 + \lambda a_s a_w k_s r_r^{-1} \times (\sin \psi - \psi \cos \psi_r) \quad (22)$$

的正则方程组。一般说来 H 同 z 有关。但是, 由于 k_w , r_r 和 a_w 都是缓慢变化的, 假定 a_s 的变化也是缓慢的(这对应振荡器和低增益放大器的情形), 则 H 可以看作常数。令

$$U = \lambda a_s a_w k_s r_r^{-1} (\sin \psi - \psi \cos \psi_r), \quad (23)$$

把 U 看作势能, $(k_w/r_r)(\delta r)^2$ 看作动能, 则(22)式表明总能量是守恒的。电子在相空间内的轨道可分为捕获的和非捕获的两种, 非捕获的电子和辐射场之间没有平均的能量交换。图1给出的是势能 U 的曲线。由于 U 是“周期”的, 即当 ψ 变化 2π 时只相当于曲线平移一个距离, 我们可只就图中的 $(\psi_1, \psi_1 + 2\pi)$ 范围进行讨论。

容易看出, ψ_r 对应相空间的中心点, 而 $\psi_1 + 2\pi$ 对应相空间的鞍点。 H 值不同时可能对应不同的运动状态。图示的 H_0 代表临界值, 对应 H_0 的水平线右端和势能曲线 U 相切于 $\psi = \psi_1 + 2\pi$, 左端同 U 曲线相交于

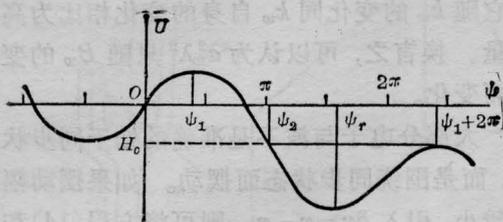


图1 势能 U 的曲线

ψ_2 。 $H = H_0$ 对应相空间的界面曲线。当 $H < H_0$ 时, 相应的轨道是捕获轨道, 对应 $H > H_0$ 的轨道是非捕获轨道。注意 ψ_r 的定义域为 $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, 则容易求出 $\psi_1 = 2\pi - \psi_r$, 而 H_0 为

$$H_0 = U|_{\psi=\psi_1+2\pi} = -\lambda a_s a_w k_s r_r^{-1} [\sin \psi_r + (4\pi - \psi_r) \cos \psi_r]。 \quad (24)$$

而 ψ_2 由超越方程

$$\lambda a_s a_w k_s r_r^{-1} (\sin \psi - \psi \cos \psi_r) = H_0 \quad (25)$$

所决定, 注意 ψ_2 的范围为 $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ 。假定电子的初始相位是均匀的, 并且电子束的能量分散度很小, 则捕获电子的数量的相对比例为

$$\Delta = \frac{\psi_1 + 2\pi - \psi_2}{2\pi} = 2 - \frac{\psi_r + \psi_2}{2\pi}。 \quad (26)$$

当 $\psi = \psi_r$ 时可能被捕获的电子所容许的最大能量分散度 δr_m 由下式给出

$$(\delta r_m)^2 = -2\lambda a_s a_w \frac{k_s}{k_w} [\sin \psi_r + (2\pi - \psi_r) \cos \psi_r]。 \quad (27)$$

应该注意, 所有上面的讨论都是对 $\cos \psi_r > 0$ 的情况进行的, 这正是自由电子激光器工作所要求的。对于 $\cos \psi_r < 0$ 的情形可类似地进行分析, 这时电子获得能量而被辐射场加速。

三、结 论

通过前面的讨论可以得到下面几点结论。

1. 对于具有轴向磁场的自由电子激光器, 同样可以采用波长逐渐减小或强度逐渐

减弱的摆动器以提高转换效率, 但具体公式和无轴向磁场的情形不同, 尚与因子 $\lambda^2 = (\omega_c/k_w v_z - 1)^{-2}$ 有关。

2. 对于强轴向磁场的情形, 即当 $\lambda^2 \ll 1$ 时, 由(14)式可以看出, 变更 B_w 影响不大, 此时应采取逐渐减小 λ_w 的办法以提高转换效率。

3. 由公式(18)和(19)可以看出, 对于确定的工作参数, 辐射场的强度存在一个阈值 a_{st} ,

$$a_{st} = \frac{1}{2\lambda a_w k_s} \left(-\frac{dr_r^2}{dz} \right), \quad (28)$$

低于这个阈值时转换效率降低, 不能正常工作。对于放大器可以调整入射波的强度以满足阈值条件。对于振荡器由于小信号时转换效率低, 有可能难以起振。这个问题对于无轴向磁场的情形也存在, 有人建议采用多段摆动器或注入附加辐射场帮助振荡器起振。

附录: 对集体效应的简单注释

在上面的分析中忽略了电子的集体效应。但采用轴向磁场的情形一般都涉及到强流电子束, 集体效应对增益及其它一些性能都有明显的影响。涉及集体效应的自洽求解必须采用动力论的方法, 对于我们所要解决的问题还必须考虑过程演化的非线性阶段, 数学上很繁杂。过多的数值求解还会掩盖结果的物理意义。仔细想起来, 这种复杂的处理方法对于我们的问题似乎也不必要。因为决定摆动器波长变化的是这样一个事实: 电子在作用过程中逐渐损失能量, 因此平行速度逐渐减小, 要保持和波场同步, 慢波的相速度 $v_{ph} = \omega_s / (k_s + k_w)$ 就要逐渐减小。这意味着 λ_w 就要逐步减小, 其变化规律由电子的能量损失规律所决定, 而同相互作用的许多细节并无多大联系。下面我们对集体效应的影

响只做些定性的估计。

集体效应可由标量势 $\phi(z, t)$ 来描述, 这个势是由于有质动力对电子束的密度调制所引起的。 ϕ 可写成^[4]

$$\phi(z, t) = \phi_1(z) \cos\left(\int_0^z (k_s + k_w) dz - \omega_s t\right) + \phi_2(z) \sin\left(\int_0^z (k_s + k_w) dz - \omega_s t\right),$$

或写成

$$\phi(z, t) = \phi(z) \times \cos\left(\int_0^z (k_s + k_w) dz - \omega_s t + \alpha_0\right). \quad (29)$$

与 ϕ 相对应的纵向空间电荷场用 E_{cz} 表示, 则有^[5]

$$\frac{\partial}{\partial z} E_{cz} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 4\pi e [N(z, t) - N_0], \quad (30)$$

其中 N_0 为平均电子密度, $N(z, t)$ 为受到调制的电子密度。由于 $\phi(z)$ 随 z 的变化很慢, 利用公式(29)和(30)可求得

$$E_{cz} = 4\pi e \frac{\Delta N(z)}{(k_s + k_w)} \times \sin\left(\int_0^z (k_s + k_w) dz - \omega_s t + \alpha_0\right), \quad (31)$$

其中已把 $\Delta N(z, t) = N(z, t) - N_0$ 表示成

$$\Delta N(z, t) = \Delta N(z) \times \cos\left(\int_0^z (k_s + k_w) dz - \omega_s t + \alpha_0\right),$$

$\Delta N(z)$ 是缓变的。

由于这个空间电荷场的存在, 方程(6)需代以方程

$$\frac{dp_z}{dt} = -\omega_w p_z \sin\left(\phi - \int k_w dz\right)$$

$$- \omega_w p_z \cos \psi - 4\pi e^2 \frac{\Delta N(z)}{(k_s + k_w)} \times \sin\left(\int_0^z (k_s + k_w) dz - \omega_s t + \alpha_0\right). \quad (32)$$

方程(4)和(5)保持不变。如果有 $4\pi e^2 \Delta N / (k_s + k_w) \ll \omega_w p_z$, 则(32)式右边第三项可以忽略, 即集体效应对我们的结果没有多大影响。我们进行一些简单的数值估计。设电子束的能量为 1 MeV, 激光器工作于远红外波段, $\lambda_s = 400 \mu\text{m}$, $B_w = 3000 \text{G}$, 则可求得, 要使集体效应可忽略, ΔN 应满足 $\Delta N \ll 7.8 \times 10^{13} / \text{cm}^3$, 如果取电子密度的相对调制 $\Delta N / N_0 = 10\%$, 则需 $N_0 \ll 7.8 \times 10^{14} / \text{cm}^3$ 。在目前的强流电子束实验中, 一般 N_0 不超过 $10^{11} \sim 10^{12} / \text{cm}^3$, 因此, 上面的条件是得到满足的。

可能有必要再重复一遍, 这里集体效应可不考虑只是对这里所讨论的问题而言的。电子密度 $N_0 \sim 10^{11} \sim 10^{12} / \text{cm}^3$ 的强流电子束的集体效应对激光器其它一些性能可能会有明显影响。

参 考 文 献

- [1] Kroll N. M., et al.; *IEEE J. Quant. Electr.*, 1981, **QE-17**, 1436.
- [2] Freund H. P., A. T. Drobot; *Phys. Fluids*, 1982, **25**, 736.
- [3] Mani S. A.; Bendor Free Electron Laser Conference, *Journal De Physique, Colloque C1, Supplement au N 2*, 1983, Tome 44, C1-239.
- [4] Tang C. M., P. Sprangle; *J. Appl. Phys.*, 1982, **53**, 831.
- [5] Shih C.-C., Yariv A., *IEEE J. Quant. Electr.* 1981, **QE-17**, 1387.