

显含谐振腔几何参数的四能级速率方程

顾 樵

(西北大学物理系)

提要: 利用辐射与物质相互作用方程组建立了显含谐振腔几何参数的四能级速率方程, 导出了功率稳定激光器谐振腔几何参数所满足的关系式。

Rate equation of four-level systems depending evidently on geometric parameters of the cavity

Gu Qiao

(Department of Physics, Northwest University)

Abstract: The rate equation of four-level systems which depends on the geometric parameters of the cavity evidently has been obtained by means of the equations for radiation-matter interaction. A relation satisfied by the geometric parameters of the laser cavity with stabilized power has been derived from the rate equation.

通常的激光速率方程^[1], 没有计及谐振腔几何参数的作用, 结果是输出功率与谐振腔结构无关。这与实验事实是不符合的。我们利用辐射与物质相互作用方程组, 建立了显含谐振腔几何参数的四能级速率方程, 由此推出显含腔参数的输出功率表达式。

在 TEM₀₀ 模, 则它可以写成

$$U_q(r, z) = \frac{C_0}{w} e^{-\frac{r^2}{w^2}} \sin K_q z, \quad (1.2)$$

其中常数 C_0 具有长度的量纲, w 是任意 z 处的光斑半径。

(1.1) 中第 q 个模对激光物质的作用可以用下面的方程组^[2]描述:

一、四能级速率方程

驻波谐振腔内的一般光场分布可表示为

$$E(\mathbf{r}, z, t) = \sum_q U_q(\mathbf{r}, z) E_q(t) \cos(\Omega_q t + \phi_q), \quad (1.1)$$

式中 \mathbf{r} 是横向位置矢径, $U_q(\mathbf{r}, z)$ 是第 q 个模的空间分布函数(无量纲)。如果腔内只存

$$\dot{R}_1 = -(\omega - \Omega_q - \dot{\phi}_q) R_2 - \frac{R_1}{T_2}, \quad (1.3a)$$

$$\dot{R}_2 = (\omega - \Omega_q - \dot{\phi}_q) R_1 + \frac{\mu}{\hbar} U_q E_q R_3 - \frac{R_2}{T_2}, \quad (1.3b)$$

$$\dot{R}_3 = -\frac{R_3 - n}{T_1} - \frac{\mu}{\hbar} U_q E_q R_2. \quad (1.3c)$$

收稿日期: 1984年10月23日。

式中 ω 是激光上、下能级的频率差, T_1 、 T_2 分别是纵、横弛豫时间, μ 是偶极矩阵元。

$$n = T_1(\lambda_2 - \lambda_1), \quad (1.4)$$

式中 λ_2 (λ_1) 是单位时间单位体积内激发到上 (下) 能级的粒子数; R_3 是单位体积内的反转粒子数; R_1 、 R_2 与宏观极化强度 P 有下面的关系^[2]:

$$P = \mu [R_1 \cos(\Omega_q t + \phi_q) - R_2 \sin(\Omega_q t + \phi_q)]. \quad (1.5)$$

极化介质对辐射场的作用由下面的光波波动方程描述:

$$\nabla^2 E - \frac{\sigma_s}{\varepsilon C^2} \dot{E} - \frac{1}{C^2} \ddot{E} = \frac{1}{\varepsilon C^2} \ddot{P}, \quad (1.6)$$

式中 C 、 ε 分别是介质中的光速和介电常数; σ_s 是各种损耗所等效的虚构电导率。

将(1.1)及(1.5)代入(1.6), 并利用缓变包络近似:

$$|\dot{E}_q| \ll \Omega_q E_q, \quad |\dot{\phi}| \ll \Omega_q,$$

可以得到

$$\dot{E}_q + \frac{1}{2\tau_p} E_q = \frac{\Omega_q \mu}{2\varepsilon V_0} \int_V R_2 U_q dV, \quad (1.7a)$$

$$\begin{aligned} & [\dot{\phi}_q + (\Omega_q - \omega)] E_q \\ &= -\frac{\Omega_q \mu}{2\varepsilon V_0} \int_V R_1 U_q dV, \end{aligned} \quad (1.7b)$$

式中

$$\tau_p = \frac{\varepsilon}{\sigma_s}, \quad (1.8)$$

$$V_0 = \frac{\pi}{4} L C_0^2, \quad (1.9)$$

L 是腔长。积分范围 V 是轴向为腔长 L , 横向为无限大。

利用速率方程近似:

$$|\dot{R}_1| \ll \left| \frac{R_1}{T_2} \right|,$$

$$|\dot{R}_2| \ll \left| \frac{R_2}{T_2} \right|,$$

$$|\dot{\phi}_q| \ll |\omega - \Omega_q|,$$

(1.3)及(1.7)可以简化为

$$\frac{R_1}{T_2} = -(\omega - \Omega_q) R_2, \quad (1.10a)$$

$$\frac{R_2}{T_2} = (\omega - \Omega_q) R_1 + \frac{\mu}{\hbar} G_q E_q R_3, \quad (1.10b)$$

$$\dot{R}_3 = -\frac{R_3 - n}{T_1} - \frac{\mu}{\hbar} G_q E_q R_2, \quad (1.10c)$$

$$\dot{E}_q + \frac{1}{2\tau_p} E_q = \frac{\Omega_q \mu}{2\varepsilon V_0} \int_V R_2 G_q dV, \quad (1.10d)$$

$$(\Omega_q - \omega) E_q = -\frac{\Omega_q \mu}{2\varepsilon V_0} \int_V R_1 G_q dV. \quad (1.10e)$$

为下面计算简单这里已用

$$G_q = e^{-\frac{r^2}{\omega}} \sin K_q z \quad (1.11)$$

近似地代替了(1.2)的 U_q 。由(1.10a)和(1.10b)可得到

$$R_2 = \frac{\mu}{\hbar} T_2 G_q E_q \mathcal{L}(\omega - \Omega_q) R_3, \quad (1.12)$$

式中

$$\mathcal{L}(\omega - \Omega_q) = \frac{1/T_2^2}{1/T_2^2 + (\omega - \Omega_q)^2}. \quad (1.13)$$

将(1.12)代入(1.10c), 两边在 V 内求积分, 并利用积分等式

$$\int_V n G_q^{2m} dV = \int_V n G_q^{2(m+1)} dV \quad (\text{整数 } m \rightarrow \infty) \quad (1.14)$$

的零级近似($m=0$)表达式, 最后得到

$$\begin{aligned} \dot{\Delta} &= \Delta_2 - \Delta_1 \\ &- \left(\frac{\mu E_q}{\hbar} \right)^2 T_2 \mathcal{L}(\omega - \Omega_q) \Delta - \frac{\Delta}{T_1}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

式中

$$\Delta_2 - \Delta_1 = \int_V (\lambda_2 - \lambda_1) dV \quad (1.16)$$

是对激光上、下能级的泵浦率之差;

$$\Delta = \int_V R_3 dV \quad (1.17)$$

是任意时刻的反转总粒子数, 而任意时刻腔内的总光子数为

$$\Phi = \frac{\varepsilon E_q^2}{\hbar \Omega_q} V_m, \quad (1.18)$$

式中

$$V_m = \int_V G_q^2 dV. \quad (1.19)$$

(1.18)对时间微商, 然后代入(1.10d), 注意到(1.12), 再利用(1.14)的零级近似表达式, 最后得到

$$\dot{\Phi} = \frac{\Omega_q \mu^2 T_2^2}{\varepsilon \hbar V_m} \mathcal{L}(\omega - \Omega_q) \Delta \Phi - \frac{1}{\tau_p} \Phi. \quad (1.20)$$

在(1.16)中 Δ_1 和 Δ_2 相比是很小的, 可以略去, 而 Δ_2 可以写成

$$\Delta_2 = W N_0 = W(N - \Delta), \quad (1.21)$$

式中 N_0 是基态粒子数, N 是工作物质总粒子数, W 是泵浦几率。(1.21)后一个等号之所以成立是因为四能级情况下, 激光下能级的粒子数和上能级相比是很少的。

引入单个粒子的吸收截面

$$\sigma = \frac{\mu^2 \Omega_q T_2}{c \varepsilon \hbar} \mathcal{L}(\omega - \Omega_q) \quad (1.22)$$

和一个光子引起的受激辐射率

$$B = \frac{c \sigma}{V_m}. \quad (1.23)$$

于是(1.15)及(1.20)可写为

$$\dot{\Delta} = W(N - \Delta) - B \Phi \Delta - \frac{\Delta}{\tau_a}, \quad (1.24a)$$

$$\dot{\Phi} = B \Phi \Delta - \frac{\Phi}{\tau_p}. \quad (1.24b)$$

$\tau_a = T_1$ 表示粒子在激光上能级的寿命。由(1.24b)可以看出 τ_p 表示无增益时的光子寿命, 它可以与谐振腔的损耗联系起来, 即

$$\tau_p = \frac{L/C}{\alpha + \frac{T}{2}}, \quad (1.25)$$

式中 α 是单程无用损耗, T 是有用的透过率。(1.24)就是我们所得到的四能级速率方程。将(1.11)代入(1.19)积分后得到

$$V_m = \frac{\pi}{4} L w_0^2 + \frac{\lambda^2 L^3}{12 \pi w_0^2} + \frac{\lambda^2}{4 \pi w_0^2} L_1 L_2 L. \quad (1.26)$$

如图所示, 腰斑位于坐标原点, 腔轴为 z 轴,

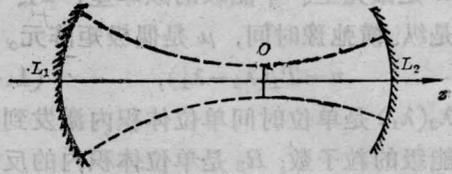


图 一般谐振腔

L_1 和 L_2 是两个反射镜的位置坐标。 w_0 是腰斑半径, 它与腔的所有几何参数都有关。例如, 对于平凹腔,

$$w_0 = \left[\left(\frac{\lambda L}{\pi} \right)^2 (\beta - 1) \right]^{1/4}, \quad (1.26)$$

式中 β 是凹面镜曲率半径与腔长的比值。

现在可以看出, (1.24)的速率方程通过 $B \rightarrow V_m \rightarrow w_0$ 显含着谐振腔的所有几何参数。

二、输出功率与功率稳定性

在(1.24b)中取 $\dot{\Phi} = 0$ 得到阈值反转总粒子数

$$\Delta_t = \frac{1}{B \tau_p}. \quad (2.1)$$

在(1.24a)中取 $\dot{\Delta} = 0$, $\Delta = \Delta_t$, $\Phi = 0$, 得到阈值泵浦几率

$$W_t = \frac{\Delta_t}{\tau_a (N - \Delta_t)} = \frac{\Delta_t}{\tau_a N}. \quad (2.2)$$

(2.2)后一个等号是因为对于四能级系统 $N \gg \Delta_t$ 。在(1.24a)中取 $\dot{\Delta} = 0$, $\Delta = \Delta_t$, 并利用(2.2)得到连续波腔内总光子数

$$\Phi_0 = \frac{1}{\tau_a B} \left(\frac{W}{W_t} - 1 \right). \quad (2.3)$$

从而输出功率为

$$\mathcal{P} = \hbar \Omega_q \Phi_0 \frac{T/2}{L/C} = \frac{V_m \hbar \Omega_q T}{2 L \tau_a \sigma} \left(\frac{W \tau_a N \sigma L / V_m \alpha}{1 + T/2\alpha} - 1 \right). \quad (2.4)$$

(2.4)后一个等号用到了(2.3), (1.23), (1.25)。在(2.4)中求

$$\frac{d\mathcal{P}}{dT} = 0$$

得最佳透过率

$$T_M = 2\alpha [(W\tau_a N\sigma L / V_m \alpha)^{1/2} - 1]. \quad (2.5)$$

用(2.5)的 T_M 取代(2.4)的 T 得最佳输出功率为

$$\mathcal{P}_M = \frac{V_m \hbar \Omega_q \alpha}{L \tau_a \sigma} \times [(W\tau_a N\sigma L / V_m \alpha)^{1/2} - 1]^2. \quad (2.6)$$

用(2.2)的 W 取代(2.6)中的 W 得到阈值泵浦下的最佳输出功率

$$\mathcal{P}_{Mt} = \frac{V_m \hbar \Omega_q \alpha}{L \tau_a \sigma} \left[\left(1 + \frac{T}{2\alpha} \right)^{1/2} - 1 \right]^2. \quad (2.7)$$

为使功率稳定, w_0 值应满足:

$$\frac{dV_m}{dw_0} = 0. \quad (2.8)$$

将(1.26)代入(2.8)即得

$$w_0 = \left[\frac{\lambda^2}{\pi^2} \left(\frac{L^2}{3} + L_1 L_2 \right) \right]^{1/4}. \quad (2.9)$$

(2.9)就是功率稳定激光器腔几何参数所满足的关系式,不管对于什么结构的谐振腔(更

不论什么样的工作物质)都是普遍适用的。例如,对于平凹腔,将(1.26)代入(2.9),并注意到 $L_1 = 0$, $L_2 = L$, 立即得到

$$\beta = \frac{4}{3}. \quad (2.10)$$

(2.10)就是稳功率平凹腔激光器腔几何参数所满足的条件。顺便指出,这种腔的光束方向也是稳定的^[3]。

最后用(2.7)计算稳功率 He-Ne ($\lambda = 1.15 \mu\text{m}$)激光器的输出功率。取 $L = 15 \text{ cm}$, 设

$$T = 0.02, \alpha = 0.003, \beta = \frac{4}{3},$$

已知 $\tau_a = 10^{-7} \text{ s}$, $\sigma = 5.5 \times 10^{-13} \text{ cm}^2$, 可算得

$$\mathcal{P}_{Mt} = 0.5 \text{ mW}.$$

它与由通常公式算得的结果有相同的量级。

参 考 文 献

- [1] 周炳琨等;《激光原理》,国防出版社,1980, p. 48.
- [2] 顾樵等;《中国光学学会第二届全国基础光学学术报告会论文集》(黑龙江·镜泊湖),1984, p. 45.
- [3] 陆治国等,《光学学报》,1984, 4, No. 8, 726.

激光扫描输液微粒测定仪研制成功

由吉林市科学技术研究所、中国人民解放军空军军医学校共同研制的“JSW-85型激光扫描输液微粒测定仪”最近在吉林市由空军卫生部主持通过了技术鉴定。

输液是医疗工作中的一项重要手段,随其应用的日益广泛和医疗水平的不断提高,对输液中微粒可能导致的病理现象如:毛细血管栓塞,造成局部水肿或坏死,血球吸附在微粒上形成血栓,引起血管栓塞和血栓性静脉炎等,引起了人们愈来愈多的关注。但是,目前国内外常见的输液微粒的检测方法均不能有效地控制和普及应用。因此,如何准确、迅速、有效地控制药液中微粒的大小与数量是亟待解决的问题。

参加鉴定会的代表一致认为:“JSW-85型激光扫描输液微粒测定仪”根据米氏原理,采用激光扫描新技术,使激光照射输液微粒,然后将散射光转换成电信号进行微粒的检测,其原理是可行的。该机具有不开封逐瓶进行大面积扫描、剔除、报警和自动计数等功能,仪器性能达到了设计指标。

与会同志认为:该方法国内外均未见报道,为输液微粒检测开创了一条新道路,使输液质量控制合乎国家药典标准要求,有较高的实用价值。同时建议有关领导部门组织安排实用样机的批量生产,进行试用、定型、推广。

(吉林市科学技术研究所 于杰)