

# 用波导模求解具有侧反射面的 光学谐振腔\*

方洪烈 江晨\*\*

(中国科学院上海光机所)

**提要:** 使用侧面抛光的激光棒的激光器能减小热光路畸变的影响, 这是因为它构成一类特殊的谐振腔——带有侧反射面的腔。本文用波导模式的迭加求得了这种腔模式的解析表达式。

## Solving resonators with side reflectors by means of waveguide modes

Fang Honglie, Jiang Chen

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

**Abstract:** Lasers with side-polished laser rods can reduce thermal-optical distortions because they have a special kind of resonators—the ones with side reflectors. In this paper the analytic solutions to the eigenmodes of the resonators are obtained by means of series of a waveguide modes.

### 一、引言

文献[1]讨论了具有侧反射面谐振腔的模式问题。文中对侧面反射场的贡献是按几何光路考虑的, 无疑很粗糙。事实上侧反射面形成了一个开式波导, 用波导理论与衍射理论联合处理会更精确。

### 二、侧面影响

首先做如下几点假设:

1. 为了简明, 我们只讨论平面腔的二维

问题(见图1);

2. 谐振腔结构是对称的, 因此它具有准位相共轭性质<sup>[1]</sup>;

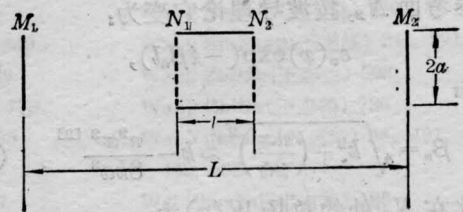


图1 具有侧反射面的谐振腔

收稿日期: 1985年9月13日。

\* 本工作由国家科委和杭州大学资助。

\*\* 南京工学院实习生。

3. 设两侧反射面相距为  $2a$ , 长  $l$ , 且  $a \ll l$ ; 两反射镜宽度亦为  $2a$ , 腔长为  $L \gg l$ 。此外腔的费涅耳数足够大。

令反射镜面上的场为  $\nu(x)$ , 两侧反射面端面处即波导开口处横截面  $N_1$  和  $N_2$  上的场为  $V(x)$  和  $W(x)$ 。

由反射镜  $M_1$  上的场  $\nu(x)$  传播到参考面  $N_1$  上的场  $V(x)$ , 由衍射积分可知:

$$V(x) = \int_{-a}^a K(x, x') \nu(x') dx', \quad (1)$$

式中积分核为:

$$K(x, x') = \sqrt{\frac{2i}{\lambda(L-l)}} \times \exp\left\{-ik\left[\frac{L-l}{2} - \frac{(x-x')^2}{L-l}\right]\right\}. \quad (2)$$

参考面  $N_1$  上的场  $V(x)$  在波导内传播到参考面  $N_2$  上形成场  $W(x)$ 。为求得场  $W(x)$  与场  $V(x)$  的关系, 将场  $V(x)$  展开为各波导模  $\varepsilon_n(x)$  的迭加, 即

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varepsilon_n(x), \quad (3)$$

式中

$$C_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a V(x) \varepsilon_n(x) dx, \quad (4)$$

以及

$$\varepsilon_n(x) = \begin{cases} \cos \frac{n\pi x}{2a}, & n=1, 3, 5, \dots^{[2]}, \\ \sin \frac{n\pi x}{2a}, & n=2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (5)$$

各波导模  $\varepsilon_n(x)$  在波导内由参考面  $N_1$  传播到参考面  $N_2$ , 按波导理论它变为:

$$\varepsilon_n(x) \exp(-i\beta_n l),$$

式中

$$\beta_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2} \approx k - \frac{n^2 \pi^2}{8ka^2} \quad (6)$$

因此在  $N_2$  处的总场  $W(x)$  为:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varepsilon_n(x) \exp(-i\beta_n l). \quad (7)$$

最后, 由参考面  $N_2$  上的场  $W(x)$  传播到反射镜  $M_2$  上场  $\nu'(x)$ , 按衍射积分可得:

$$\nu'(x) = \int_{-a}^a K(x, x') W(x') dx'. \quad (8)$$

按自再现条件可知  $\nu'(x)$  应与  $\nu(x)$  只差一个复常数因子  $\gamma$ , 即

$$\gamma \nu(x) = \nu'(x) = \int_{-a}^a K(x, x') W(x') dx'. \quad (9)$$

因为

$$\exp(-i\beta_n l) = g \exp\left[i\frac{(n^2-1)\pi^2}{8C'}\right] \quad (10)$$

式中

$$g = \exp\left[-i\left(k - \frac{\pi^2}{8ka^2}\right)l\right]. \quad (11)$$

为一常数, 及

$$C' = ka^2/l. \quad (12)$$

将(10)式代入(7)式然后代入(9)式得:

$$\begin{aligned} (\gamma/g)\nu(x) &= \int_{-a}^a dx' K(x, x') \\ &\times \int_{-a}^a dx'' K(x', x'') \nu(x'') \\ &+ \int_{-a}^a dx' K(x, x') \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varepsilon_n(x') \\ &\times \left\{ \exp\left[i\frac{(n^2-1)\pi^2}{8C'}\right] - 1 \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $C_n$  由(4)式给出。(13)式就是我们需要的确定本征模的积分方程。

### 三、微扰解

在方程(13)中右端第一项是普通共振腔; 第二项是由于波导模的色散出现的扰动。考虑到

$$\frac{(n^2-1)\pi^2}{8C'} \ll 1;$$

$$\exp\left[i\frac{(n^2-1)\pi^2}{8C'}\right] - 1 \ll 1.$$

因此方程(13)的右端第二项可视为微扰。

零级微扰方程为:

$$\begin{aligned} \gamma^0 \nu^0(x) &= \int_{-a}^a K(x, x') \\ &\times \int_{-a}^a K(x', x'') \nu^0(x'') dx'' dx', \end{aligned} \quad (14)$$

式中  $\gamma^0 = \gamma/g$ ,  $\nu^0(x)$  分别为方程(13)的零级微扰本征值和本征函数。如果  $u_m(x)$  是方程

$$b_m u_m(x) = \int_{-a}^a K(x, x') u_m(x') dx' \quad (15)$$

的本征解, 它也是方程(14)的解, 且:

$$\gamma_m^0 = b_m^2,$$

$$\nu_m^0(x) = u_m(x).$$

对于积分核(2)来说有<sup>[3]</sup>

$$b_m = \exp\left[ik\frac{(L-l)}{2}\right] \exp\left(i\frac{\alpha_m}{2C}\right) \quad (16)$$

$$u_m(x) =$$

$$\begin{cases} \cos \alpha_m x, & m=1, 3, 5, \dots, \\ \sin \alpha_m x, & m=2, 4, 6, \dots, \end{cases} \quad (17)$$

式中

$$\alpha_m = \frac{m^2}{a} \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \quad (18)$$

$$\varepsilon = i\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2i}{\pi C}}, \quad (19)$$

$$C = \frac{2ka^2}{L-l}. \quad (20)$$

下面来讨论一下主模( $m=1$ )的微扰解。精确至一级微扰的本征值为:

$$\gamma_1/g = \gamma_1^0 + F_{11} \quad (21)$$

式中

$$\begin{aligned} F_{11} &= \frac{1}{a} \int_{-a}^a dx u_1(x) \int_{-a}^a dx' K(x, x') \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varepsilon_n(x') \\ &\times \left[ \exp\left(i\frac{(n^2-1)\pi^2}{8C'}\right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (22)$$

交换上式的积分次序得:

$$F_{11} = b_1^2 (f_1 + if_2) \quad (23)$$

式中  $f_1, f_2$  均为实量, 并满足

$$f_1 + if_2 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \left[ \exp\left(i\frac{(n^2-1)\pi^2}{8C'}\right) - 1 \right]. \quad (24)$$

由(4)式可求得

$$C_n = \begin{cases} \frac{b_1}{1 + \varepsilon/\pi}, & n=1, \\ \frac{4b_1 n \varepsilon (-1)^{\frac{n+1}{2}}}{\pi(n^2-1)}, & n=3, 5, 7, \dots \\ 0, & n=2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (25)$$

将(25)式代入(24)式得:

$$\begin{aligned} f_1 + if_2 &= \frac{16\varepsilon^2}{\pi^2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2-1)^2} \\ &\times \left[ \exp\left(i\frac{(n^2-1)\pi^2}{8C'}\right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

代入(21)式得:

$$\gamma_1 = g\gamma_1^0 (1 + f_1 + if_2) \quad (27)$$

和

$$|\gamma_1|^2 = |\gamma_1^0|^2 (1 + 2f_1 + f_2^2). \quad (28)$$

衍射损耗  $L_1$  为

$$L_1 = 1 - |\gamma_1|^2 \approx L_1^0 - 2f_1 |\gamma_1^0|^2. \quad (29)$$

上式中  $L_1^0 = 1 - |\gamma_1^0|^2$  为无侧反射面腔的损耗。由(26)式可知

$$\begin{aligned} 2f_1 &= 2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{16\varepsilon^2 n^2}{(n^2-1)^2 \pi^2} \sin\left(\frac{(n^2-1)\pi^2}{8C'}\right) \\ &\approx \frac{3.37}{\sqrt{C^3}} \sqrt{\frac{2l}{L-l}}. \end{aligned} \quad (30)$$

(30)式表明, 有侧反射面的腔与无侧反射面的腔相比损失变小了, 且随  $l/L$  的增大损耗减小。

侧反射面的存在不仅会使衍射损失变小, 也会影响到谐振腔的共振频谱。此时附加相位移动为

$$\Delta_m = \arg\{\gamma_m\}.$$

对于  $m=1$  的模式说

$$\Delta_1 = \arg\{\gamma_1^0\} + \arctan \frac{f_2}{1+f_1} + \frac{\pi^2 l}{8ka^2}.$$

共振频谱可由下式给出

$$kL + \Delta_1 = \pi q. \quad (29)'$$

因为  $\arg\{\gamma_1^0\}$ <sup>[3]</sup> 是负的, 而  $f_2/(1+f_1)$  当  $l$  小时为正。(29)' 式表明其共振频率更接近于闭式腔的共振频率。这是自然的。

由于侧反射面的存在, 原先某些逸出腔



外的能量被反射回腔内, 因此衍射损失变小是合理的。又因为具有侧反射面的腔与一般开放式腔相比更接近于闭式腔, 因此它的共振频率也应更接近于闭式腔的共振频率才合理。

对主模精确至一级的微扰本征函数来说, 只有  $m=3$  的模的扰动是主要的。此时

$$\nu_1(x) = u_1(x) + a_3 u_3(x) \quad (31)$$

式中

$$a_3 = F_{31} / (\gamma_1^0 - \gamma_3^0) \quad (32)$$

由(13)式可看出:

$$\begin{aligned} F_{31} &= \int_{-a}^a dx u_3(x) \int_{-a}^a dx' K(x, x') \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[ \exp\left(i \frac{(n^2-1)\pi^2}{8C'}\right) - 1 \right] \\ &= b_3 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[ \exp\left(i \frac{(n^2-1)\pi^2}{8C'}\right) - 1 \right] \\ &\times \int_{-a}^a \cos \frac{n\pi x'}{2a} \cos \alpha_3 x' dx' \quad (33) \end{aligned}$$

令

$$R_1 + iR_2 = F_{31} / b_1 b_3 \quad (34)$$

$R_1, R_2$  为实数, 则

$$a_3 = \frac{F_{31}}{\gamma_1^0 - \gamma_3^0} \approx \frac{R_1 + iR_2}{2(1 - b_3/b_1)} \quad (35)$$

由(18)、(19)、(20)式可知

$$b_3/b_1 = 1 + i \frac{\pi^2}{C} \quad (36)$$

故有 
$$a_3 = \frac{C}{2\pi^2} (-R_2 + iR_1) \quad (37)$$

其实部为:

$$\begin{aligned} &\frac{3}{8\sqrt{\pi C}} \frac{C}{C'} + \sum_{n=5,7,\dots}^{\infty} \\ &n^2 \left[ 1 - \cos \frac{(n^2-1)\pi^2}{8C'} \right] \\ &\times \frac{1}{(n^2-1)(n^2-9)} \quad (38) \end{aligned}$$

显然大于零。

$$\nu_3(x) = \cos \alpha_1 x + a_3 \cos \alpha_3 x \quad (39)$$

表明扰动后的模分布中心区更高, 相对来说边缘区场强变弱, 这意味着衍射损耗变小。这与前面的结果是一致的。

#### 四、结 语

本文的讨论是一个理想情况, 对于实际情况将复杂得多, 例如:

本文讨论的二维情况是合适的, 但对矩形截面的三维情况, 严格说来波导中将出现纵向电场强度, 电场不能再用量表示。当然对光频段来说标量场仍然是一个好的近似。

此外, 真实的激光器中的“波导”是介质波导, 用金属波导来处理也是一个近似。

#### 参 考 文 献

- [1] 方洪烈; 《光学学报》, 1985, 5, 870.
- [2] J. A. Kong; “电磁波理论”, 人民教育出版社, 北京, 1983.
- [3] 方洪烈; “光学谐振腔理论”, 科学出版社, 北京, 1981, pp.97, 104.