中国激光
第13卷 第10期

环形腔内光束的传输特性

吕百达 覃亚丽

(四川大学物理系)

提要：本文以四面镜8字形稳定环形腔为代表，利用传输矩阵法、等效厚透镜法和腰斑处为参考面展开等三种方法，对环形腔内光束的传输特性作了详细的计算和分析，并与驻波腔的结果进行了比较。对象散的影响亦作了讨论。

Beam propagation characteristics in ring resonators

Lü Baida, Qin Yali

(Dept. of Physics, Sichuan University)

Abstract: The beam propagation characteristics in the 8-shaped ring resonator containing four mirrors are calculated and comparied with the standing wave resonator by using three methods: (1) propagation matrix representation; (2) equivalent sequence of thick lenses, and (3) waist position being selected as the reference developing plane. The influence of astigmatism is also discussed.

一、引 言

环形激光器因具有一系列优点而广泛用作激光陀螺和高分辨激光光谱学的研究，近年来新出现的将脉冲宽度压缩到十几毫微秒量级的对碰脉冲锁模技术中也常使用环形腔。迄今为止，对环形腔已进行了很多研究，虽然用激光器的Lamb理论可推导出环形腔的场方程和频率方程，揭示出环形腔内的行波场特征[1]；用量子理论建立运动方程能进一步研究腔内辐射场的统计特性[2]，但是计算都相当繁琐。工作中常常从实用的目的出发，利用高斯光束或几何光学理论来讨论环形腔的稳定性、象散补偿、腔内光束模参数计算和设计等问题[3~5]。

在忽略象散情况下，环形腔可等效为一个多元件直腔，从而可展开为周期性薄透镜序列。薄透镜焦距等于对应腔反射镜曲率半径之半。一般而论，这时腔的几何参数对模参数的影响是复杂的，迄今尚不能写出普遍的设计方程，只能根据所讨论的具体腔形进行简化后再作解析计算。但这种处理方法的可行性本身就表明：环形腔与多元件驻波腔有相似之处。此外，对以环形腔为代表的行

收稿日期：1985年7月5日。

波腔可消除驻波腔中的空间烧孔效应，有利于单频工作这一重要特性，理论上和实践上都已有深入认识。但环形腔和驻波腔内光束传输特性的一些细致差异却往往被忽视。本文以四面镜8字型稳定环形腔为代表，在高斯光束近似下用传输矩阵法、等效厚透镜法和腰斑处展开等三种方法对环形腔内正向和反向传输行波的模参数作了详细的计算，给出了三种方法重要的计算公式。

二、计 算 方 法

研究对象为图 2-1 所示四镜 8 字形环形腔，二、三节的讨论中不计象散。环形腔由曲率半径分别为 ρ_1、ρ_2、ρ_3、$\rho_4(\rho_4\to\infty)$的四镜组成，各分臂长度设为 $M_1M_2=l_1$, $M_2M_3=l_2$, $M_3M_4=l_3$, $M_1M_4=l_4$。

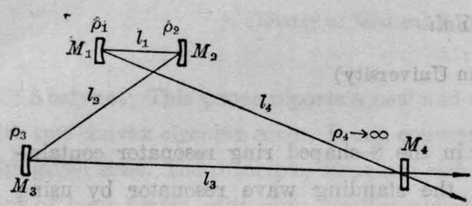

图 2-1

1. 传播矩阵法[3]

分别取 M_1、M_2、M_3、M_4 镜为参考面，将环形腔展开为周期性薄透镜序列，可求出对应环绕矩阵

$M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$，由此易得出

稳定性判据

$$|A+D|<2 \tag{2-1}$$

镜 i 面上基模高斯光束光斑半径

$$W_i^2=\frac{\lambda B/\pi}{\sqrt{1-\left(\frac{A+D}{2}\right)^2}} \tag{2-2}$$

镜 i 面上高斯光束等相面曲率半径

$$\rho_{Gi}=\frac{2B}{D-A} \tag{2-3}$$

分臂上的腰斑半径

$$w_{0ij}^2=-\frac{\lambda}{\pi C}\sqrt{1-\left(\frac{A+D}{2}\right)^2} \tag{2-4}$$

以镜 i 为参考腰斑位置

$$z_{0ij}=\frac{A-D}{2C} \tag{2-5}$$

例如，以镜 M_1 为参考面，正向行波(图 2-1 中 $M_4M_1M_2M_3M_4$ 方向)等效周期性薄透镜序列如图 2-2。

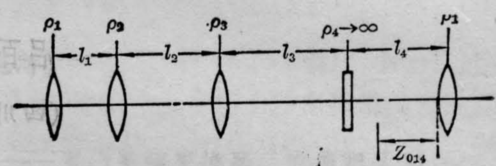

图 2-2

环绕矩阵

$$M=\begin{bmatrix} 1 & l_3+l_4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{\rho_3} & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{\rho_2} & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{\rho_1} & 1 \end{bmatrix} \tag{2-6}$$

$$A=\left(1-\frac{2l_1}{\rho_1}\right)\left(1-\frac{2t_2}{\rho_2}\right)\left[1-\frac{2(l_3+l_4)}{\rho_3}\right]-\frac{2(l_3+l_4)}{\rho_1}\left(1-\frac{2l_1}{\rho_2}-\frac{2l_2}{\rho_3}\right)-\frac{2l_2}{\rho_1}-\frac{2(l_3+l_4)}{\rho_2} \tag{2-7}$$

$$B=l_1\left(1-\frac{2l_2}{\rho_2}\right)\left[1-\frac{2(l_3+l_4)}{\rho_3}\right]+(l_3+l_4)\left(1-\frac{2l_1}{\rho_2}-\frac{2l_2}{\rho_3}\right)+l_2 \tag{2-8}$$

$$C=-\frac{2}{\rho_3}\left(1-\frac{2l_1}{\rho_1}\right)\left(1-\frac{2l_2}{\rho_2}\right)-\frac{2}{\rho_1}\left(1-\frac{2l_1}{\rho_2}-\frac{2l_2}{\rho_3}\right)\frac{2}{\rho_2} \tag{2-9}$$

$$D=-\frac{2l_1}{\rho_3}\left(1-\frac{2l_2}{\rho_2}\right)+\left(1-\frac{2l_1}{\rho_1}-\frac{2l_2}{\rho_3}\right) \tag{2-10}$$

将(2-7)～(2-10)式代入(2-1)～(2-5)式便可判断腔的稳定性，求出 W_1、W_{014}、z_{014}、

ρ_{G1}。

再分别以 M_2、M_3、M_4 镜为参考面，仿上面的计算可求得其它分臂上光束模参数。反向行波亦类此。若注意到利用高斯光束的基本公式[6]，常可减少计算矩阵次数。

2. 等效厚透镜法[7]

这一计算方法的实质在于首先将环形腔等效周期性薄透镜序列中的两个透镜按几何光学公式先合成一个厚透镜，然后再与第三个薄透镜合成一个厚透镜，仿此下去最后用一个具有等效焦距 f_{eq}，主面距离 h_1、h_2 的厚透镜和等效腔长 L_{eq} 来代替原来的薄透镜序列。由 f_{eq}、h_1、h_2 和 L_{eq} 便可求出以 M_i 镜为参考面的光束模参数。

仍以 M_1 镜为参考(图 2-3)，对正向行波可求得稳定性判据

$$0<\frac{L_{eq}}{f_{eq}}<4 \tag{2-11}$$

$$W_{014}^2=\frac{\lambda L_{eq}}{2\pi}\left(\frac{4f_{eq}}{L_{eq}}-1\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2-12}$$

$$z_{041}=\frac{1}{2}(h_1-h_2+l_4) \quad (\text{以 } M_4 \text{ 镜为参考}) \tag{2-13}$$

$$W_1^2=W_0^2\left[1+\left(\frac{l_4-z_{041}}{z_0}\right)^2\right] \tag{2-14}$$

$$\rho_{G1}=z_0\left(\frac{l_4-z_{041}}{z_0}+\frac{z_0}{l_4-z_{041}}\right) \tag{2-15}$$

式中

$$z_0=\frac{\pi W_{014}^2}{\lambda}\text{——瑞利尺寸} \tag{2-16}$$

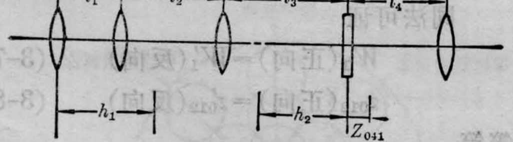

图 2-3

3. 腰斑处展开法

这是传播矩阵法中一个重要特例，即参考面选在分臂腰斑处。利用高斯光束在腰斑处等相面曲率半径 $\to\infty$ 及有关对称性质常可简化运算并直接得出模参数计算公式。

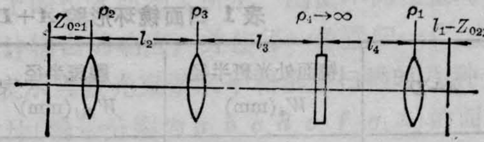

图 2-4

以 M_1-M_2 分臂上腰斑 W_{012} 为参考面，正向行波的环绕矩阵为(图 2-4)

$$\begin{aligned}M=&\begin{bmatrix}1 & l_1-z_{021}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{\rho_1} & 1\end{bmatrix}\\ &\times\begin{bmatrix}1 & l_3+l_4\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{\rho_3} & 1\end{bmatrix}\\ &\times\begin{bmatrix}1 & l_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{\rho_2} & 1\end{bmatrix}\begin{vmatrix}1 & z_{021}\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ =&\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2-17}$$

由条件 $\rho_{G0}=\dfrac{2B}{D-A}\to\infty$ (2-18) 可求出 z_{021} (以 M_2 镜为参考，M_1M_2 臂上腰斑位置) 并解出 A、B、C、D。

于是有：稳定性判据

$$|A+D|<2 \tag{2-19}$$

$$W_{012}^2=\frac{\lambda B/\pi}{\sqrt{1-\left(\dfrac{A+D}{2}\right)^2}} \tag{2-20}$$

$$W_2^2=W_{012}^2\left[1+\left(\frac{z_{021}}{z_0}\right)^2\right] \tag{2-21}$$

$$\rho_{G2}=z_0\left(\frac{z_0}{z_{021}}+\frac{z_{021}}{z_0}\right) \tag{2-22}$$

我们对一台实验用环形激光腔正、反向传播行波作了具体计算，腔的几何参数取值 $\rho_1=\rho_2=60\,\text{mm}$，$\rho_3=212\,\text{mm}$，$\rho_4\to\infty$，$l_1=71.5\,\text{mm}$，$l_2=227\,\text{mm}$，$l_3=660\,\text{mm}$，$l_4=508\,\text{mm}$，波长 $\lambda=595\,\text{nm}$。用上述三种方法作数值计算都得到了同一结果，见表 1。正向行波的模参数表示示意于图 2-5。

我们也对腔内光束有关参数进行了实验测量。所得数据为 $W_1=0.44\,\text{mm}$，$W_2=0.56\,\text{mm}$，$W_3=0.58\,\text{mm}$，$W_4=0.37\,\text{mm}$，$z_{012}=30\,\text{mm}$，$z_{032}=118\,\text{mm}$。

表1 四面镜环形腔 $A+D$ 值和正、反向光束模参数(不计象散)

$A+D$	镜面处光斑半径 W_i(mm)	腰斑半径 W_{0ij}(mm)	腰斑位置 z_{0ij}(mm)	镜面处光束等相面曲率半径 ρ_{Gi}(mm)	
				正　向	反　向
0.628	$W_1=0.403$	$W_{014}=0.342$	$z_{014}=384.7$	$\rho_{G1}=1378.5$	$\rho'_{G1}=30.7$
	$W_2=0.538$	$W_{012}=0.014$	$z_{012}=30.6$	$\rho_{G2}=40.9$	$\rho'_{G2}=112.6$
	$W_3=0.552$	$W_{023}=0.040$	$z_{023}=112.0$	$\rho_{G3}=115.6$	$\rho'_{G3}=1271.4$
	$W_4=0.349$	—	—	$\rho_{G4}=3219$	$\rho'_{G4}=3219$

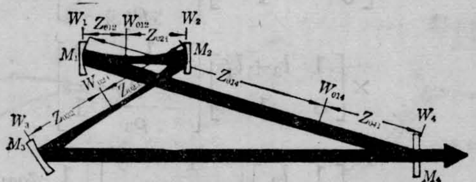

图 2-5

三、结果的分析和讨论

1．实验结果和计算表明,高斯光束可以作为稳定环形腔中的本征模式存在，这一结论与稳定驻波腔相同，此外二者还有一些相同或相似之处,如:

(1) 环绕矩阵元 $A+D$ 为一常数，仅由腔参数决定而与计算参考面和环绕方向选择无关。

容易证明，对图 2-1 所示四镜 8 字形环形腔

$$A+D=\left(1-\frac{2l_1}{\rho_1}\right)\left(1-\frac{2l_2}{\rho_2}\right)\left[1-\frac{2(l_3+l_4)}{\rho_3}\right]$$
$$-\frac{2l_1}{\rho_2}\left[1-\frac{2l_2}{\rho_3}-\frac{2(l_3+l_4)}{\rho_1}\right]$$
$$+\left(1-\frac{2l_2}{\rho_3}\right)\left[1-\frac{2(l_3+l_4)}{\rho_1}\right]$$
$$-\frac{2(l_3+l_4)}{\rho_2}-\frac{2l_1}{\rho_3}-\frac{2l_2}{\rho_1}=\mathrm{const} \tag{3-1}$$

当使用等效厚透镜法时，用类似方法可证，$\frac{L_{eq}}{f_{eq}}$ 为一常数，且

$$\frac{L_{eq}}{f_{eq}}=2-(A+D) \tag{3-2}$$

(2) 正向行波和反向行波在各分臂中腰斑大小和位置重合，在各镜面处的光斑半径也相等。从高斯光束理论可以证明，这是稳定环形腔的一般结果。只需注意在计算正反向行波同一模参数时，应当选取不同参考面，利用节二中有关公式便可证明。以 W_{012}(正向)、W'_{012}(反向)为例

$$W^2_{012}=-\frac{\lambda}{\pi C}\sqrt{1-\left(\frac{A+D}{2}\right)^2} \tag{3-3}$$

$$W'^2_{012}=-\frac{\lambda}{\pi C'}\sqrt{1-\left(\frac{A'+D'}{2}\right)^2} \tag{3-4}$$

式中 $ABCD$ 为以 M_2 镜为参考面正向行波环绕矩阵诸元，而 $A'B'C'D'$ 为以 M_1 镜为参考反向行波环绕矩阵诸元，用传播矩阵法求得

$$C=C'=-\frac{2}{\rho_1}\left(1-\frac{2l_2}{\rho_2}\right)$$
$$-\left[1-\frac{2(l_3+l_4)}{\rho_1}\right]$$
$$\times\left[\frac{2}{\rho_2}+\frac{2}{\rho_3}\left(1-\frac{2l_2}{\rho_2}\right)\right] \tag{3-5}$$

又因 $A+D=A'+D'$, 故

$$W_{012}=W'_{012} \tag{3-6}$$

同法可证

$$W_1(\text{正向})=W'_1(\text{反向}) \tag{3-7}$$

$$z_{012}(\text{正向})=z'_{012}(\text{反向}) \tag{3-8}$$

等等。

2．对环形腔而言,计算出发点是环绕矩阵,而驻波腔则是往返矩阵,这一数学处理上的不同在物理上的反映表现在二种类型腔内光束传输特性的差异上。如:(1)环形腔中可以存在两个沿相反方向传播独立的行波(例如作为激光陀螺使用情况)，或者一个行波

(腔内加入单向器以抑制一个行波，用于高分辨激光光谱学研究的环形染料激光器为其典型例)，因此消除了一般驻波腔中的空间烧孔效应，有利于实现单频工作。

(2) 两镜无源稳定腔中，高斯光束在镜面处等相面的曲率半径 ρ_{Gi} 一般等于镜面曲率半径ρ_i，

$$\rho_{Gi}=\rho_i \tag{3-9}$$

但在环形腔中这一结论一般并不成立。在镜 i 处入射高斯光束等相面曲率半径与从镜 i 处出射高斯光束等相面曲率半径间满足薄透镜对高斯光束的变换关系。

(3) 对驻波腔，当参考面选定(例如 M_1 镜)后，是以距离矩阵或透镜矩阵为起点对计算结果并无本质影响。而环形腔则不同，我们认为，最好以透镜矩阵作为计算起点。如果以距离矩阵为起点，虽然也可以得出一些结果，但稍不注意则易出错。例如，仍以 M_1 镜为计算正向行波的参考面，若取

$$M=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{\rho_1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & l_3+l_4\\ 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{\rho_3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & l_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{\rho_2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & l_1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{3-10}$$

代入节二给出数据后，求得的 W_{0ij}、z_{0ij} 实际是 M_1-M_2 臂上的 W_{012}、z_{012}；ρ_{Gi} 是反向行波在 M_1 镜处的等相面曲率半径 ρ'_{G1}，而不是 W_{01}、z_{014} 和 ρ_{G1}。

3. 利用高斯光束的复参数表示，自再现条件和 $ABCD$ 定律，经较冗长运算可证明，传输矩阵法和等效厚透镜法是等价的。显然，腰斑处展开法只是传播矩阵法的特殊情况，因此三种方法是等价的。然而应用中各有利弊。一般而言，对 n 镜环形腔用传输矩阵法每选定一次参考面，需计算 $2n$个 2×2 矩阵之积，用腰斑处展开法，则需算 $2n+1$ 个矩阵乘积，但常可使用一些技巧来简化计算。在实际设计中，应当根据具体问题选用方法，并注意参考面的选择，光束行进方向和所得值正、负号的物理意义等，才能简捷正确地得出要求结果来。三种计算方法的物理实质都是试图用一个空腔代替原来的多镜环形腔，但应注意选取某一面为参考展开，只能直接算出与原环形腔对应分臂上的模参数。遗憾的是，迄今尚未找到与原环形腔完全等价的空腔。

4. 环形腔内光束模参数的实验测量结果在数量级上与计算值相符合。由于我们使用游标卡尺简单测量光束直径，方法上带来较大误差，也无法对光束强度 $1/e^2$ 值处作精确测量，故结果略为偏大。

四、象散的影响[5]

以正向行波为例，取 M_2 镜为参考面，计算了在子午面和弧矢面上光束的参数，所得结果列于表 2。其中设 $\angle M_1=8^\circ$，$\angle M_2=20^\circ$，$\angle M_3=19.5^\circ$，$\angle M_4=8.5^\circ$。

表 2　考虑象散后在子午面和弧矢面上的 $A+D$ 值和光束的模参数

$A+D$		镜 M_2 处光斑半径 W_2(mm)		腰斑半径 W_{012}(mm)	
子午面	弧矢面	子午面	弧矢面	子午面	弧矢面
0.426	1.606	0.540	0.666	0.014	0.012

$A+D$		腰斑位置 z_{012}(mm)		镜 M_2 处光束等相面曲率半径 ρ_{G2}(mm)	
子午面	弧矢面	子午面	弧矢面	子午面	弧矢面
0.426	1.606	31.1	30.1	40.4	41.4

计算表明：(1) 考虑象散后，腔内为一椭圆高斯光束

$$W_{0ij\,子午}\neq W_{0ij\,弧矢}$$

$$W_{i\,子午}\neq W_{i\,弧矢}$$

$$\rho_{Gi\,子午}\neq\rho_{Gi\,弧矢} \tag{4-1}$$

(下转第 630 页)

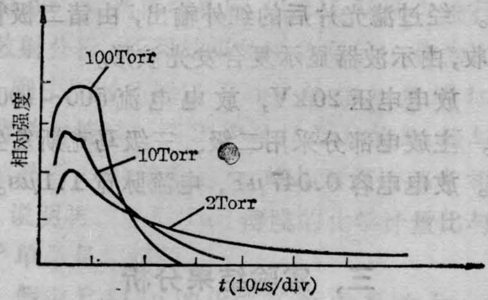

图 4 缓冲气体气压对复合发光的影响

1000 A 时，所拍摄的示踪波形，如图 4。

从图 4 中可以看出，从光强的峰值来看，气压越高，峰值越大。但光强并不随气压的增加而无限地增加，到 50 Torr 时出现饱和，100 Torr 与 50 Torr 时的峰值几乎相等。从发光的时间特性来看，当气压为 100 Torr 时，光强延迟时间约 28 μs，以后随着气压的降低，延迟时间依次拉长。在气压为 2 Torr。延迟时间拉长至 140 μs 时，光强才下降为零，

四、讨　　论

本文仅对镉蒸气等离子体的复合发光特性进行一些研究，但在此器件上尚未获得激光输出。我们认为有二个主要原因。其一是目前我们还没有得到对 1.43 μm 高反射率的腔体，其二是电源问题。

由本文所给出的实验条件，由福克斯-李曲线求得器件的单程衍射损耗 $\alpha=0.2\%$。由Silfvast[5]的实验条件可以计算出增益 $g=0.0025\,cm^{-1}$。根据激光器的临界振荡条件求得，达到振荡条件时，腔镜反射率应满足 $R_1R_2=0.95$。而目前我们实验用的腔片，R_1 是镀金全反镜，反射率为 97%；R_2 是开 ϕ1 mm 小孔的镀金全反镜，反射率相当于 94%。由此看来 R_1R_2 之积还满足不了临界振荡条件的要求。

进一步改进的办法是采用对 1.43 μm 高反射的介质膜腔片，或者是增加腔长。但由于腔长的增加，除了要求电源能提供高能量外，还要求放电脉冲的后延越陡越好。因为等离子体复合激光器，是在电子密度达到高峰，在电子复合时，伴随着产生各种跃迁，因此要求电源所提供的能量，在电子密度达到高峰时马上截止，以有利于电子的复合。而目前我们的电源还有待于改进。

参 考 文 献

[1] W. T. Silfvast, O. R. Wood II; *Opt. Lett*. 1982, **7**, No. 1, 34.
[2] W. T. Silfvast; *Opt. Lett.*, 1979, **4**, No. 9, 271.
[3] W. T. Silfvast; *Appl. Phys. Lett.*, 1977, **31**, 334.
[4] J. M. Green; *Japan. Appl. Phys.*, 1977, **48**, No. 7, 2752.
[5] W. T. Silfvast; *Appl. Phys. Lett.*, 1980, **36**, No. 8, 615.

(上接第 627 页)

(2) 子午面内腰斑和弧矢面内腰斑不重合

$$z_{0ij\,子午} \neq z_{0ij\,弧矢} \qquad (4\text{-}2)$$

(3) 因为此时在子午面和弧矢面内稳定区的交叉部分才是系统的稳定区，即两个不等式联立的解，故象散使稳定区缩小，且

$$A+D_{子午} \neq A+D_{弧矢} \qquad (4\text{-}3)$$

附带说明的是，实际测量 $\angle M_i$ 的值比以上计算取值要小($\angle M_1 \cong \angle M_4 \cong 3°$，$\angle M_2 \cong \angle M_3 \cong 7°$)，故象散影响比计算结果要小，并且在设计中利用染料喷流和腔内插入光学元件对象散已作了补偿，从而使象散影响已大为减小。

作者曾就文中某些问题与西德 W. Demtröder 教授进行过十分有益的讨论，谨此致谢。

参 考 文 献

[1] M. Sargent III *et al.*; "Laser Physics", Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1974.
[2] S. Singh; *Physical Review A*, 1981 **23**, No. 2, 837.
[3] 廖复中;《激光》, 1982, **9**, No. 2, 112.
[4] 方洪烈;《光学学报》, 1984, **4**, No. 5, 385.
[5] K. Kenneth; *Appl. Opt.*, 1981, **20**, No 3, 407.
[6] H. Weber; "Optische Resonatoren" ("激光谐振腔"), 华中工学院出版社, 1983.
[7] H. Kogelnik; *BSTJ*, 1965, **44**, 455.