

正电子面沟道辐射的经典描述

邵明珠 罗诗裕

(重庆交通学院)

提要: 本文利用经典方法, 将粒子运动方程化为二阶非线性常微分方程, 并用 Jacobian 椭圆函数和椭圆积分, 解析地得到了方程的解和粒子振动周期; 讨论了沟道辐射的一些主要特征, 计算了正电子的最大辐射能量和谱分布, 并同实验进行了比较, 发现二者基本一致。

Classical description of planar channeling radiation for positrons

Shao Mingzhu, Luo Shiyu

(Chongqing Institute of Communications)

Abstract: The motion equation of the particles is converted into 2nd order ordinary differential equation with a nonlinear term in the frame of classical physics. The solution of equation and the oscillation period of particles are represented analytically by Jacobian elliptic function and the 1st kind of complete elliptic integral. Some important properties of the radiation are discussed, the maximum radiation energy for the positron and the spectral distribution are calculated. The comparison shows essential agreement between the experiment and the theory.

一、引言

当带电粒子的能量小于沟道位垒时, 它将被沟道俘获, 并在沟道内作周期运动。从经典物理来看, 任何一个加速度不为零的带电粒子, 在电磁场中运动时, 都要自发地向外辐射能量, 强大的晶格场可使这种能量达到很高, 而相对论效应起着双重作用。一方面, 由于质量的相对论效应, 使粒子振动频率随 $\gamma^{-1/2}$ 减小; 另一方面, 由于 Doppler 效应又使得辐射能量随 γ^3 增加。正是由于这种相对论效应, 沟道辐射的能量可以达到很高, 且

大都位于 X-射线和 γ -射线能区内。由于这种辐射具有许多固有的特征, 将它改造为 X-激光和 γ -激光是很有希望的; 同自由电子激光相比, 它可能具有更吸引人的特点。

几年前, Kumakhov 首次从理论上预言了这种辐射的存在^[1], 接着人们对此进行了大量的理论研究和实验观察^[2~6]。对沟道辐射的处理大都基于 Kumakhov 理论, 常用的方法有经典方法和量子力学方法, 常用粒子-晶体相互作用势有 Lindhard 势和 Molier 势, 由于势的复杂性, 只能对这类问题进行数值分析。本文将 Lindhard 势展开, 保留四

收稿日期: 1985年6月28日。

次项, 把粒子运动方程化为非线性常微分方程, 并用椭圆函数和椭圆积分解析地给出了方程的解和粒子振动周期, 并从经典电动力学出发, 考虑到相对论效应, 对正电子的面沟道辐射的一般特征作了解析处理, 同实验比较, 发现二者基本一致。

二、沟道辐射的谱分布

当带电粒子在电磁场中作加速运动时, 单位立体角的辐射功率^[7]

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = |\mathbf{A}(t)|^2 \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{A}(t) = \sqrt{\frac{c}{4\pi}} [\mathbf{R}\mathbf{E}]_{\text{ret.}} \quad (2)$$

脚标“ret.”表示推迟。 $\mathbf{A}(t)$ 是电磁场矢势, \mathbf{R} 是带电粒子瞬时位置与观察点之间的距离, \mathbf{E} 是电场强度矢量, 且

$$\mathbf{E} = \frac{e}{c} \left\{ \frac{\Phi \mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R} \right\}_{\text{ret.}} \quad (3)$$

其中 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$, c 是光速, v 是粒子速度, \mathbf{n} 是电磁辐射方向。定义傅里叶变换

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(t) e^{i\omega t} dt \quad (2')$$

则可将单位频率、单位立体角内的辐射强度表示为

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = 2 |\mathbf{A}(\omega)|^2 \quad (4)$$

将式(3)和(2')代入上式, 可得

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c t_0} |\mathbf{F}(\omega)|^2 \quad (5)$$

其中 t_0 是粒子穿越晶体所需要的时间, ω 是辐射频率, 而

$$\mathbf{F}(\omega) = \int \mathbf{a}(t) e^{i\omega(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})t} dt \quad (6)$$

$$\mathbf{a}(t) = [\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}] e^{-i\frac{\omega}{c} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r}(t)} \quad (7)$$

$\delta \mathbf{r}(t)$ 是粒子轨道的振动部分。图1给出了实验室坐标系中粒子运动和沟道辐射的几何关系。 x 表示粒子振动方向, z 表示粒子纵向运动方向, $\mathbf{e}_{n\lambda}$ 表示光子传播方向为 \mathbf{n} 、偏振为 λ 的偏振矢量, θ 是 \mathbf{n} 与 z 轴方向的夹

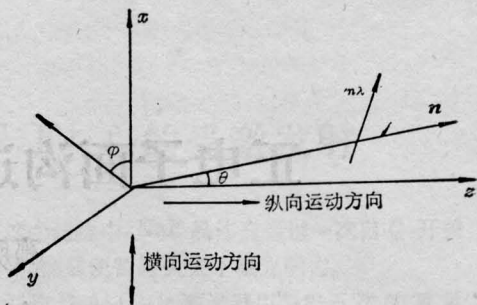


图1 实验室坐标系中, 粒子运动和沟道辐射之间的几何关系

角, φ 是 \mathbf{n} 在 (x, z) 平面内投影与 x 轴方向的夹角。

将 $\mathbf{a}(t)$ 作分立谱傅里叶展开

$$\mathbf{a}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{a}_l e^{-il\Omega t} \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{a}_l = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} \mathbf{a}(t) e^{il\Omega t} dt \quad (9)$$

Ω 是相对论粒子振动频率, l 是谐波数, 原则上可取任一整数, 实际上它的取值要受到沟道位垒高度的限制。

将式(8)代入式(6), 可得

$$\mathbf{F}(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{a}_l \frac{\delta(\omega - \omega_l)}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})} \quad (10)$$

其中

$$\omega_l = \frac{l\Omega}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} \quad (11)$$

是 l 次谐波的辐射频率, 而

$$\Omega = \Omega_0 \gamma^{-1/2}, \quad (12)$$

Ω_0 是惯性系中粒子横向振动频率。将式(10)代入式(5), 可得

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{2\pi c^2} \sum_l \frac{\omega_l \omega^2}{l\Omega} |\mathbf{a}_l|^2 \delta(\omega - \omega_l) \quad (13)$$

其中

$$|\mathbf{a}_l|^2 = \phi_1 + \phi_2 \quad (14)$$

$$\phi_1 = |\mathbf{e}_{n1} \cdot \mathbf{b}_l|^2, \quad \phi_2 = |\mathbf{e}_{n2} \cdot \mathbf{b}_l|^2 \quad (15)$$

ϕ_1 和 ϕ_2 分别是两种偏振状态下光振动振幅, 而

$$\mathbf{e}_{n1} = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k} \quad (16)$$

$$\mathbf{e}_{n2} = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} \quad (17)$$

$$\mathbf{b}_l = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \beta_x(t) e^{i\omega t - i\frac{\omega}{c} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r}(t)} dt \quad (18)$$

其中 $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, \mathbf{b}_l 的两个分量 b_{lx} 和 b_{ly} 分别为

$$b_{lx} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \beta_x(t) e^{i[\omega t - \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r}(t)]} dt \quad (19)$$

$$b_{ly} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \beta_z(t) e^{i[\omega t - \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r}(t)]} dt \quad (20)$$

$\beta_x = v_x/c$ 是无量纲的横向速度, 由运动方程确定; β_z 是粒子的纵向速度, 且

$$\beta_z = \sqrt{\beta^2 - \beta_x^2} = \beta(1 - \beta_x^2/2\beta^2) \quad (21)$$

注意到 $\frac{dz}{dt} = c\beta_z = c\beta(1 - \beta_x^2/2\beta^2)$ 和

$$t = \int \frac{\sqrt{E} dx}{c\sqrt{2(E_x - V(x))}} \quad (22)$$

其中 E 是粒子总能量, E_x 是粒子横向能量, 可将粒子纵向轨迹表示为

$$z(t) = \beta \int \frac{\sqrt{E} dx}{\sqrt{2(E_x - V(x))}} - \frac{1}{2\beta} \int \frac{\sqrt{2(E_x - V(x))}}{\sqrt{E}} dx \quad (23)$$

其中 $V(x)$ 是粒子-晶体相互作用势。式(23)表明, 只要 $V(x)$ 给定, 粒子的纵向运动就是完全确定的。注意到

$$\beta_z = \frac{1}{c} \frac{dz}{dt},$$

则纵向速度 β_z 即可求出。事实上, 只要求出了粒子的横向和纵向运动轨迹, 式(19, 20)中的 β_x 和 β_z 就唯一确定, 而 b_{lx} 、 b_{ly} , 因而辐射强度也就随即给出。

在偶极近似下, 考虑到相对论效应, 可求得 b_{lx} 和 b_{ly} 分别为

$$b_{lx} = \frac{i}{l\Omega} \dot{\beta}_{lx} \quad (24)$$

$$b_{ly} = \frac{i}{l\Omega} \frac{\beta \sin \theta \cos \varphi}{1 - \beta \cos \theta} \dot{\beta}_{lx} \quad (25)$$

其中 β_{lx} 是粒子横向加速度 $\dot{\beta}_x$ 的傅里叶分

量, 即

$$\dot{\beta}_{lx} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{\beta}_x(t) e^{i\omega t} dt. \quad (26)$$

由式(16~18)及式(24~26), 可将光振动振幅 ϕ_1 和 ϕ_2 具体表示为

$$\phi_1 = \frac{\dot{\beta}_{lx}^2}{l^2 \Omega^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \cos^2 \varphi (\cos \theta - \beta)^2 \quad (27)$$

$$\phi_2 = \frac{\dot{\beta}_{lx}^2}{l^2 \Omega^2} \sin^2 \varphi \quad (28)$$

将式(27)、(28)和(14)代入式(13), 可得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} &= \frac{e^2}{2\pi c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{|\dot{\beta}_{lx}|^2}{(1 - \beta \cos \theta)^4} \\ &\times [(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2)] \\ &\times \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \\ &\times \delta[l\Omega - \omega(1 - \beta \cos \theta)] \quad (29) \end{aligned}$$

其中 $\dot{\beta}_{lx}$ 由式(26)给出。对立体角积分, 并注意到 δ 函数的性质, 可将辐射谱密度表示为

$$\frac{dI}{d\omega} = \alpha h \sum_{l=1}^{\infty} \frac{|\dot{\beta}_{lx}|^2 \omega}{l^2 \Omega^2} [1 - 2\xi + 2\xi^2] \theta(\omega_l - \omega) \quad (30)$$

其中 $\theta(\omega_l - \omega)$ 是单位阶跃函数, $\omega_l = 2l\Omega\gamma^2$ 是 l 次谐波的最大辐射能量, $\alpha = \frac{\theta^2}{2\pi ch}$ 是精细结构常数, 而

$$\xi = \frac{\omega}{\omega_l} \quad (31)$$

三、运动方程的解及其振动周期

根据[8], 粒子运动方程可表示为

$$\ddot{X} + aX + bX^3 = 0 \quad (32)$$

其中 $\dot{X} = dX/dS$, 而

$$X = \frac{2}{d_p} x, \quad s = \frac{vt}{d_p},$$

$$a = \frac{D}{(1+D)^{3/2}} \epsilon^2, \quad b = \frac{D(4-D)}{2(1+D)^{7/2}} \epsilon^2$$

$$D = 4c^2 \alpha_T^2 / d_p^2, \quad E^3 = \frac{K}{E},$$

$$K = \pi z_1 z_2 e^2 N d_p^2 \quad E = m_0 c^2 \gamma \quad (33)$$

x 是粒子偏离沟道中心平面的距离, γ 是相对论因子, z_1 、 z_2 是入射粒子和晶体原子的原子序数, N 是晶体原子的密度, d_p 是晶面间距,

$c = \sqrt{3}$, a_T 是托马斯-费米屏蔽距离。

在沟道问题中, 方程(32)中的 $a > 0$, $b > 0$, 可见我们考虑的系统类似于具有硬特性的质量弹簧系统。当初始条件选择为

$$X(0) = X_0, \quad \dot{X}(0) = 0 \quad (34)$$

时, 方程(32)的解可直接表示为^[8]

$$X = X_0 cn(\sqrt{a+bX_0^2}S) \quad (35)$$

其中 cn 是 Jacobian 椭圆函数, 而粒子的振动周期为

$$T_s = \frac{4F(k)}{\sqrt{a+bX_0^2}} \quad (36)$$

其中

$$k^2 = \frac{bX_0^2}{2(a+bX_0^2)} \quad (37)$$

而 $F(k)$ 是第一类全椭圆积分。

由式(35)和(33), 可求得粒子横向速度

$$\beta_x = \frac{1}{c} \frac{dx}{dt} = a_1 sn p_1 t dn p_1 t \quad (38)$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= -\beta X_0 \sqrt{a+bX_0^2}, \\ p_1 &= \frac{\sqrt{a+bX_0^2}}{d_p} v \end{aligned} \quad (39)$$

将式(38)代入式(26), 利用分部积分可得

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_{ix} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} d\beta_x(t) e^{i\Omega t} \\ &= i \frac{\alpha_1 q_1}{p_1^2} \int_{-p_1 T/2}^{p_1 T/2} cn u e^{i a_1 u} du \end{aligned} \quad (40)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{i a_1 q_1}{T}, \quad q_1 = l\Omega, \\ q_2 &= \frac{l\Omega}{p_1}, \quad T = \frac{4d_p}{v} \frac{F(k)}{\sqrt{a+bX_0^2}} \end{aligned} \quad (41)$$

利用 $cn u$ 的傅里叶展开^[9]

$$\begin{aligned} cn u &= \frac{2\pi}{kF(k)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m+\frac{1}{2}}}{1+q^{2m+1}} \\ &\quad \times \cos \left[(2m+1) \frac{\pi u}{2F(k)} \right] \end{aligned} \quad (42)$$

注意到

$$\frac{\sin(2m+1)\pi}{(2m-l+1)\pi} = (-1)^l \delta_{l, 2m+1} \quad (43)$$

可将式(40)化为

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_{ix} &= -i \frac{8\pi\alpha_1 q_1}{k p_1^2} \\ &\quad \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m+\frac{1}{2}} (2m+1)}{(1+q^{2m+1})(2m+l+1)} \delta_{l, 2m+1} \end{aligned} \quad (44)$$

其中谐波数 l 的取值受位垒高度的限制, 即必须满足条件 $\sum_l l\Omega \leq V_m/\hbar$, V_m 是沟道位垒高度, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h 是普朗克常数, m 的取值由 δ 函数决定。一般情况下, l 只取少数几个整数。事实上, 由式(30)可以看出, $\frac{dI}{d\omega}$ 与 l^2 成反比, 随着 l 的增加, $\frac{dI}{d\omega}$ 迅速减少, 起重要作用的只有少数几个低次谐波。

四、结果和讨论

我们以正电子为例, 具体计算它在 Si(110) 面沟道中运动时的沟道辐射。选择与晶体有关的参数

$$\begin{aligned} z_2 &= 14, \quad N = 4.97 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}, \\ d_p &= 0.192 \text{ nm}; \end{aligned}$$

与入射粒子有关的参数 $z_1 = 1$, $k = 0.83$, 正电子能量范围 $5.6 \times 10^7 \sim 10^{10}$ eV; 与粒子-晶体相互作用势有关的参数

$$a = 0.019 \text{ nm}, \quad D = 11.3, \quad K = 115.$$

1. 最大辐射能量

简谐近似下

$$\Omega_0 = \frac{2v}{d_p} \sqrt{a} \quad (45)$$

非简谐近似下,

$$\Omega_0 = \frac{\pi \sqrt{a+bX_0^2}}{2d_p F(k)} v. \quad (46)$$

当 $\theta = 0$ 时, l 次谐波的辐射频率最大, 由式(11)可得

$$\omega_l = 2l\Omega\gamma^2 = 2l\Omega_0\gamma^{3/2} \quad (47)$$

上式表明, 最大沟道辐射能量与相对论因子 $\gamma^{3/2}$ 成正比。由式(12)和(47)可以看出, 在沟道辐射中, 相对论因子起着双重作用。

表 1 给出了不同正电子能量情况下的最

表1 最大辐射能量

E 电子能量 (MeV)	最大辐射能量 (MeV)		
	实验	本文	文献[10]
56	0.36	0.36	
4×10^3	23	21	31
6×10^3	42	40	51
10^4	90	86	92

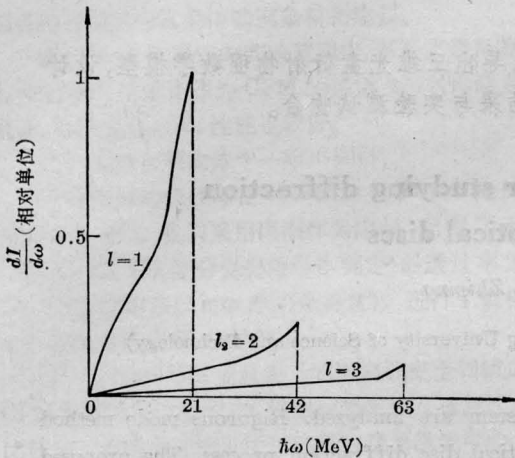


图2 能量为 4×10^3 MeV 的正电子在 Si(110)面沟道中的辐射谱分布

大辐射能量, 并将理论值同实验值进行了比较, 结果基本符合。

2. 谱分布

在偶极近似下, 能量为 4×10^3 MeV 的正电子在 Si(110)面沟道中的辐射谱分布如图 2 所示。取谐波数 $l=1, 2, 3$ 。实验上可观察的只有 $l=1$, 这是因为辐射强度随 l 迅速减少, 再加上本底辐射, 高次谐波分量实际上是不可观察的。同文献[10]比较, 二者也相当符合, 同量子描述的结果^[6]也基本符合。

本文从经典电动力学出发, 考虑到相对论效应, 解析地处理了正电子的面沟道辐射。

参 考 文 献

- [1] Kumakhov M. A.; *Phys. Lett.*, 1976, **57A**, 17.
- [2] Miroshnichenko I. I. et al.; *Pis'ma Zh. Eks. Teor. Fiz.*, 1979, **29**, 786.
- [3] Khokonov M. KH. et al.; *Radiation Effects*, 1984, **81**, 179.
- [4] 罗诗裕;《物理》, 1983, No. 1, 6.
- [5] 罗诗裕, 邵明珠;《中国激光》, 1984, **11**, No. 2, 73.
- [6] 罗诗裕, 余超凡;《中国激光》, 1985, **12**, No. 8, 512.
- [7] Jackson J. D.; *Classical Electrodynamics*, Second edition, John Wiley and Sons, Inc., 1975.
- [8] 罗诗裕, 邵明珠;《核技术》, 1983, No. 3, 38.
- [9] Gradshteyn I. S. et al.; *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York, 1980.
- [10] Bazylar V. A. et al.; *Radiation Effects*, 1981, **56**, No. 1~2, 87.

简 讯

激光光纤光缆综合医疗系统通过验收

一种利用光纤传输激光进行手术, 利用光缆传送音像, 对手术作监护、会诊、示教和录像的综合医疗系统在上海市黄浦区中心医院正式投入使用, 日前上海市卫生局组织有关专家进行了评议、验收。

采用这种激光光纤光缆综合医疗系统, 不仅能够对外科、内科各病种进行医疗, 便于各科使用公用激光医疗设备, 而且, 激光器可以不再放在手术室, 避免了激光器工作时与之相连的水、高压电以

及机械噪声的干扰, 保证手术室工作环境清静、整洁, 也提高了手术室的工作安全程度。现在, 用该医疗系统对属于外科、眼科、耳鼻咽喉科、肿瘤科、妇科、骨科等 31 个病例作的临床使用结果表明, 该系统性能优良, 使用效果良好。有关专家认为, 该医疗系统的成功, 标志着我国激光医疗技术达到了新的高度, 对加快发展我国激光医疗技术有着积极的意义。

(群 蕊)