

## 面沟道辐射特征的量子力学描述

罗诗裕

余超凡

(重庆交通学院)

(中国科学院近代物理研究所)

**提要:** 本文从量子力学出发,讨论了面沟道辐射的一般论证。在非简谐近似下,描写了正电子面沟道辐射的频谱辐射。同实验比较表明,二者基本符合。

## Quantum mechanism description of plane channeling radiation characteristics

Luo Shiyu

Yu Chaofan

(Institute of Chongqing Communication)

(Institute of Modern Physics, Academia Sinica)

**Abstract:** The radiation characteristics of plane channeling particles are described in terms of quantum mechanics. In the anharmonic approximation the spectrum distribution of the channeling radiation is calculated, comparison with the experiment shows a good agreement.

几年前<sup>[1]</sup>,库马霍夫发现了带电粒子的沟道辐射,接着人们对此进行了一系列理论研究和实验观察<sup>[2~5]</sup>,并指出了它的若干可能应用,特别是有可能将这种辐射改造为新的 $\gamma$ -激光,引起了人们极大兴趣。

研究表明,沟道辐射是由于带电粒子在晶体沟道中的横向运动引起的,在不考虑纵向能量损失和电子的多重散射(对于薄单晶,这一近似是很好的)情况下,带电粒子的横向运动可用经典方法或量子力学方法处理。[6]从正弦平方势出发,在经典力学范围内对辐射特征进行过分析。本文试图从Lindhard势的非简谐近似出发,用量子力学方法对正电子的面沟道辐射特征进行讨论。

## 一、辐射角分布和辐射强度

不考虑纵向能量损失,粒子的纵向运动由平面波描写,即 $e^{iP_x z/\hbar}$ ;而横向运动则由薛定格方程

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_x(x) + [\varepsilon - V(x)] \psi_x(x) = 0 \quad (1)$$

确定(坐标选取文献[6]中的图1)。其中 $x$ 是粒子偏离沟道中心平面的距离, $\varepsilon$ 是横向能量, $V(x)$ 是粒子-晶体相互作用势,而

$$m = m_0 \gamma \quad (2)$$

$m_0$ 是粒子静止质量, $\gamma$ 是相对论因子,

收稿日期:1984年3月8日。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v_z}{c} \quad (3)$$

$c$  是光速,  $v_z$  是粒子的纵向速度。描写面沟道粒子的波函数  $\psi(x, z)$  可表示为横向波函数和纵向波函数的乘积, 即

$$\psi(x, z) = \psi_x(x) e^{iP_z z/\hbar} \quad (4)$$

其中  $P_z$  是粒子的纵向动量, 且总动量

$$\mathbf{p} = p_x \mathbf{i} + p_z \mathbf{k}. \quad (5)$$

图 1 给出了实验室坐标中粒子运动和沟道辐射的几何关系。图中  $x$  表示粒子横向振动方向,  $z$  表示纵向运动方向,  $\mathbf{K}$  表示波矢为  $K$  的光子发射方向,  $\mathbf{e}_{k\lambda}$  表示波矢为  $K$ 、偏振为  $\lambda$  的偏振矢量。 $\theta$  是  $\mathbf{K}$  与  $z$  轴之间的夹角,  $\varphi$  是  $\mathbf{K}$  在  $(x, y)$  平面内的投影与  $x$  轴之间的夹角。

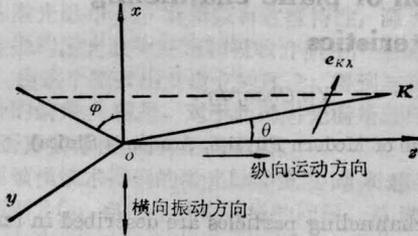


图 1 实验室坐标系中, 粒子运动和沟道辐射方向的几何关系

当粒子由  $n$  态跃迁到  $m$  态时, 跃迁几率  $W_{mn}(t)$  可表示为<sup>[7]</sup>:

$$W_{mn}(t) = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_m | H_{int} | \psi_n \rangle| \times \delta(\varepsilon_n - \varepsilon_m - \hbar\omega_k) \quad (6a)$$

其中

$$H_{int} = \sum_{k,\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3\omega_k}} \mathbf{e}_{k\lambda} \times \mathbf{P}(b_{k\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + b_{k\lambda}^+ e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \quad (6b)$$

$b_{k\lambda}^+$  和  $b_{k\lambda}$  分别是光子的产生算符和消灭算符。将式(6b)代入式(6a), 可求得跃迁几率

$$W_{mn}(t) = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{k,\lambda} \frac{2\pi\hbar e^3 (n_\lambda + 1)}{L^3\omega_k m^2} \times \phi\delta(\varepsilon_n - \varepsilon_m - \hbar\omega_k) \quad (6c)$$

其中  $\sum_{k,\lambda}$  表示对波矢  $K$  和所有可能的偏振  $\lambda$  求和。  $n_\lambda = 0$  表示自发辐射,  $n_\lambda \neq 0$  表示感应

辐射,  $\omega_k$  是辐射频率,  $L^3$  是  $K$  空间体积, 而

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad (7)$$

其中

$$\phi_1 = |\mathbf{e}_{k1} \cdot \mathbf{a}_{mn}|^2 \quad (8)$$

和

$$\phi_2 = |\mathbf{e}_{k2} \cdot \mathbf{a}_{mn}|^2 \quad (9)$$

分别表示  $(y, z)$  平面和  $(x, z)$  平面内的光振动振幅, 且

$$\mathbf{a}_{mn} = (\alpha_{mn})_x \mathbf{i} + (\alpha_{mn})_z \mathbf{k} \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} (\alpha_{mn})_x &= \int \psi_n^*(x, z) P_x e^{-ik_z x} \psi_m(x, z) dx \\ &= -i m \Omega_{mn} x_{mn} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (\alpha_{mn})_z &= \int \psi_n^*(x, z) P_z e^{-ik_z x} \psi_m(x, z) dx \\ &\approx P_z \int \psi_{xn}^*(x) (1 - ik_x x) \psi_{xm}(x) dx \\ &= -ik_x P_z x_{mn} \end{aligned} \quad (12)$$

$x_{mn} = |\langle m | x | n \rangle|$  是粒子由  $n$  态跃迁到  $m$  态的跃迁矩阵元, 而

$$k_x = k \sin \theta \cos \varphi \quad (13)$$

$$\omega_{mn} = \frac{\Omega_{mn}}{1 - \beta \cos \theta} \approx 2\gamma^2 \Omega_{mn} \quad (14)$$

$\Omega_{mn}$  是惯性系中的跃迁频率,  $\omega_{mn}$  是实验室中的跃迁频率。偏振矢量  $\mathbf{e}_{k\lambda}$  由  $\mathbf{e}_{k1}$  和  $\mathbf{e}_{k2}$  组成, 其中

$$\mathbf{e}_{k1} = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k} \quad (15)$$

$$\mathbf{e}_{k2} = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} \quad (16)$$

将式(11)、(12)和(16)代入式(8)和(9), 可得

$$\begin{aligned} \phi_1 &= |(\alpha_{mn})_x \cos \theta \cos \varphi - (\alpha_{mn})_z \sin \theta|^2 \\ &= \frac{m^2 \Omega_{mn}^2 x_{mn}^2 \cos^2 \varphi (\cos \theta - \beta)^2}{(1 - \beta \cos \theta)^2} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\phi_2 = |-(\alpha_{mn})_z \sin \varphi|^2 = m^2 \Omega_{mn}^2 x_{mn}^2 \sin^2 \varphi \quad (18)$$

在准连续近似下, 我们将式(6c)中对波矢  $k$  的求和换为积分, 即  $\sum_k \rightarrow \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3k$ , 并将式(17)、(18)代入式(6c), 用推迟时间

$$dt' = dt(1 - \beta \cos \theta)$$

表示, 可得自发辐射的角分布

$$\frac{dW_{mn}(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 \Omega_{mn}^3 \alpha_{mn}^2}{2\pi \hbar c^3} \times \left[ \frac{(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{(1 - \beta \cos \theta)^4} \right] \quad (19a)$$

如果对  $\varphi$  积分, 上式则可化为

$$\frac{dW_{mn}(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 \Omega_{mn}^3 \alpha_{mn}^2}{\hbar c^3} \times \left[ \frac{(1 - \beta \cos \theta)^2 - \frac{1}{2}(1 - \beta^2) \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^4} \right] \quad (19b)$$

考虑到所有可能的跃迁及能级占据几率, 式(19a)化为

$$\frac{dW(t')}{d\Omega} = \frac{\alpha}{2\pi c^2} \sum_{m,n} \Omega_{mn}^3 P_n \alpha_{mn}^2 \times \left[ \frac{(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{(1 - \beta \cos \theta)^4} \right] \quad (20)$$

其中  $P_n$  是能级占据几率, 求和遍及所有可能的跃迁,  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$  是精细结构常数。

将式(20)乘以  $\hbar \omega_{mn}$  即可得到沟道辐射的强度分布

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\hbar \alpha}{2\pi c^2} \sum_{m,n} \Omega_{mn}^4 \alpha_{mn}^2 P_n \times \left[ \frac{(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{(1 - \beta \cos \theta)^4} \right] \quad (21)$$

从式(20)和(21)可以看出, 只要在给定情况下分别求出跃迁频率  $\Omega_{mn}$ , 占据几率  $P_n$  和跃迁矩阵元  $\alpha_{mn}$ , 即可求出沟道辐射的谱分布。

由式(17)和(18)可以看出, 在  $(x, y)$  平面内观察到的辐射是线偏振的, 在  $(y, z)$  平面内观察到的辐射是在与该平面垂直的平面内线偏振的。当  $\theta = \arccos \beta$  时,  $(x, z)$  平面内的辐射不存在, 沟道辐射是全偏振的, 偏振面就是  $(y, z)$  平面。为了描写沟道辐射的偏振状态, 由式(17)和(18)定义偏振度  $P$

$$P = \frac{\phi_1 - \phi_2}{\phi_1 + \phi_2} = \frac{\cos^2 \varphi (\cos \theta - \beta)^2 - \sin^2 \varphi (1 - \beta \cos \theta)^2}{\cos^2 \varphi (\cos \theta - \beta)^2 + \sin^2 \varphi (1 - \beta \cos \theta)^2} \quad (22)$$

事实上, 从式(20)和(21)可以看出, 对于相对论粒子, 辐射大都集中在朝前方向, 角宽  $\Delta\theta \sim \gamma^{-1}$ , 且是全偏振的。

## 二、系统的本征值、本征函数和非谐效应

粒子的横向运动由方程(1)描写。常用的粒子-晶体相互作用势有 Lindhard 势和 Moliere 势。无量纲的 Lindhard 势为

$$V(X) = K W_L(X) \quad (23)$$

其中

$$W_L(X) = [(1+X)^2 + b^2]^{1/2} + [(1-X)^2 + b^2]^{1/2} - 2(1+b^2)^{1/2} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} X &= 2a/d_p, \quad b^2 = \frac{12}{D^2}, \\ D &= d_p/a_T, \quad K = \pi Z_1 Z_2 e^2 N d_p^2 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$x$  是粒子偏离沟道中心平面的距离;  $d_p$  是晶面间距;  $a_T$  是托马斯-费米屏蔽距离;  $Z_1$ 、 $Z_2$  分别是入射粒子和晶体原子的原子序数;  $e$  是电子电荷;  $N$  是晶体的原子密度。

将 Lindhard 势展开, 在非简谐近似下, 将相互作用  $V(x)$  表示为<sup>[8]</sup>

$$V(x) = \frac{1}{2} k_2 x^2 + \frac{1}{4} k_4 x^4 \quad (26)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} k_2 &= \frac{8a_1}{d_p^2} K & k_4 &= \frac{64a_2}{d_p^4} K \\ a_1 &= \frac{b^2}{(1+b^2)^{3/2}} & a_2 &= \frac{b^2(4-b^2)}{4(1+b^2)^{7/2}} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

注意到式(26), 系统的哈密顿量  $H$  可表示为

$$H = H_0 + H'$$

其中

$$H_0 = -\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} k_2 x^2 \quad (28)$$

$$H' = \frac{1}{4} k_4 x^4, \quad (29)$$

$H_0$  是谐振子哈密顿量, 它的本征函数由厄米多项式给出, 即

$$\psi_{\alpha n}(x) = N_n H_n(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \quad (30)$$

其中

$$\xi = \alpha x, \quad \alpha^2 = \frac{m\Omega_0}{\hbar}, \quad \Omega_0 = \left(\frac{k_2}{m}\right)^{1/2} \quad (31)$$

$N_n$  是归一化常数, 且

$$N_n = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi} 2^n n!}\right)^{1/2} \quad (32)$$

$H_n(\xi)$  是厄米多项式

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} [\exp(-\xi^2)]. \quad (33)$$

$H_0$  的本征值

$$e_n^0 = \hbar\Omega_0(n+1/2). \quad (34)$$

其中  $n$  为正整数。

将微扰哈密顿量  $H'$  用算符表示, 即

$$H' = \frac{1}{4} k_4 \left(\frac{\hbar}{m\Omega_0}\right)^2 \hat{x}^4 \quad (35)$$

其中

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{m\Omega_0}{\hbar}} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^+ + a) \quad (36)$$

$a^+$  是粒子产生算符,  $a$  是粒子消灭算符。在  $H_0$  的表象中, 可直接用微扰法求出扰动系统的本征值和本征函数。在一级近似下, 系统的波函数

$$\begin{aligned} |\tilde{n}\rangle = & |n\rangle - \frac{2c}{\hbar\Omega_0} \left(\frac{\hbar}{2m\Omega_0}\right)^2 \\ & \times \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3/2)} |n+2\rangle \\ & + \frac{2c}{\hbar\Omega_0} \left(\frac{\hbar}{2m\Omega_0}\right)^2 \sqrt{n(n-1)} \\ & \times (n-1/2) |n-2\rangle \\ & + \frac{c}{4\hbar\Omega_0} \left(\frac{\hbar}{2m\Omega_0}\right)^2 \\ & \times \sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)} |n-4\rangle \\ & - \frac{c}{4\hbar\Omega_0} \left(\frac{\hbar}{2m\Omega_0}\right)^2 \\ & \times \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\ & \times |n+4\rangle \quad (37) \end{aligned}$$

本征值

$$e_n = \hbar\Omega_0 \left[ n + 1/2 + \frac{\delta}{4} (2n^2 + 2n + 1) \right] \quad (38)$$

其中

$$c = \frac{k_4}{4}, \quad \delta = \frac{3\hbar\Omega_0 k_4}{4k_2^2} \quad (39)$$

### 三、占据几率和跃迁矩阵元

当一束粒子投射在晶体上时, 只有一部分粒子进入沟道。沟道粒子对不同能级有不同占据几率, 其定义为

$$P(e_n) = |\langle \tilde{n} | e^{ik_x x} \rangle|^2 \quad (40)$$

其中  $|\tilde{n}\rangle$  由式(37)给出, 注意到

$$\begin{aligned} \langle n | e^{ik_x x} \rangle = & \frac{1}{\alpha} N_n \sqrt{2\pi} (-i)^n \exp \\ & \times \left(-\frac{k_x^2}{2\alpha^2}\right) H_n\left(\frac{k_x}{\alpha}\right) \quad (41) \end{aligned}$$

则可将矩阵元  $\langle \tilde{n} | e^{ik_x x} \rangle$  表示为

$$\begin{aligned} \langle \tilde{n} | e^{ik_x x} \rangle = & \frac{1}{\alpha} N_n \sqrt{2\pi} (-i)^n \exp \\ & \times \left(-\frac{k_x^2}{2\alpha^2}\right) H_n\left(\frac{k_x}{\alpha}\right) \\ & - \frac{2c\sqrt{2\pi}}{\alpha\hbar\Omega_0} N_{n+2} (-i)^{n+2} \\ & \times \left(\frac{\hbar}{2m\Omega_0}\right)^2 \sqrt{(n+1)(n+2)} \\ & \times (n+3/2) \exp\left(-\frac{k_x^2}{2\alpha^2}\right) H_{n+2} \\ & \times (k_x/\alpha) + \frac{2c\sqrt{2\pi}}{2\hbar\Omega_0} \\ & \times N_{n-2} (-i)^{n-2} \left(\frac{\hbar}{2m\Omega_0}\right)^2 \\ & \times \sqrt{n(n-1)(n-1/2)} \\ & \times \exp\left(-\frac{K_x^2}{2\alpha^2}\right) H_{n-2}(K_x/\alpha) \\ & - \frac{c\sqrt{2\pi}}{4\alpha\hbar\Omega_0} N_{n+4} (-i)^{n+4} \\ & \times \left(\frac{\hbar}{2m\Omega_0}\right)^2 \\ & \times \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \exp\left(-\frac{k_x^2}{2\alpha^2}\right) H_{n+4}(k_x/\alpha) \\ & + \frac{c\sqrt{2\pi}}{4\hbar\Omega_0} N_{n-4} (-i)^{n-4} \left(\frac{\hbar}{2m\Omega_0}\right)^2 \\ & \times \sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)} \\ & \times \exp\left(-\frac{k_x^2}{2\alpha^2}\right) H_{n-4}(k_x/\alpha) \dots \quad (42) \end{aligned}$$

将式(42)代入式(40), 可得

$$\begin{aligned} P(\varepsilon_n) = & \frac{2\pi\hbar}{m\Omega_0} N_n^2 \exp\left(-\frac{k_x^2}{2\alpha^2}\right) H_n^2(k_x/\alpha) \\ & + \frac{4c}{\hbar\Omega_0} \left(\frac{\hbar}{2m\Omega_0}\right)^2 \frac{2\pi\hbar}{m\Omega_0} \\ & \times N_n N_{n+2} \sqrt{(n+1)(n+2)} \left(n + \frac{3}{2}\right) \\ & \times \exp\left(-\frac{k_x^2}{\alpha^2}\right) H_n\left(\frac{k_x}{\alpha}\right) H_{n+2} \\ & \times \left(\frac{k_x}{\alpha}\right) - \frac{4c}{\hbar\Omega_0} \left(\frac{\hbar}{2m\Omega_0}\right)^2 \frac{2\pi\hbar}{m\Omega_0} \\ & \times N_n N_{n-2} \sqrt{n(n-1)} (n-1/2) \\ & \times \exp\left(-\frac{k_x^2}{\alpha^2}\right) H_n\left(\frac{k_x}{\alpha}\right) H_{n-2} \\ & \times \left(\frac{k_x}{\alpha}\right) - \frac{c}{2\hbar\Omega_0} \left(\frac{\hbar}{2m\Omega_0}\right)^2 \\ & \times \frac{2\pi\hbar}{m\Omega_0} N_n N_{n+4} \\ & \times \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\ & \times \exp\left(-k_x^2/\alpha^2\right) H_n(k_x/\alpha) H_{n+4} \\ & \times (k_x/\alpha) + \frac{c}{2\hbar\Omega_0} \left(\frac{\hbar}{2m\Omega_0}\right)^2 \\ & \times \frac{2\pi\hbar}{m\Omega_0} N_n N_{n-4} \\ & \times \sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)} \\ & \times \exp\left(-k_x^2/\alpha^2\right) H_n(k_x/\alpha) \\ & \times H_{n-4}(k_x/\alpha) + \dots \text{高阶项}. \quad (43) \end{aligned}$$

在零角度入射下 (即上式中的  $k_x=0$ ), 只有  $n$  为偶数的  $H_n(0) \neq 0$ 。可见, 只有偶宇称态才被占据。注意到

$$H_{2n}(0) = (-1)^n (2n)! / n!,$$

可将偶宇称态的占据几率表示为

$$\begin{aligned} P(\varepsilon_{2n}) = & \frac{2\pi\hbar}{m\Omega_0} N_{2n}^2 \frac{(2n)!^2}{n!^2} \\ & + \frac{4c}{\hbar\Omega_0} \left(\frac{\hbar}{2m\Omega_0}\right)^2 \frac{2\pi\hbar}{m\Omega_0} N_{2n} N_{2n+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sqrt{(2n+1)(2n+2)} \\ & \times \left(2n + \frac{3}{2}\right) \frac{(2n)!}{n!} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} \\ & - \frac{4c}{\hbar\Omega_0} \left(\frac{\hbar}{2m\Omega_0}\right)^2 \frac{2\pi\hbar}{m\Omega_0} N_{2n} N_{2n-2} \\ & \times \sqrt{2n(2n-1)(2n-1/2)} \\ & \times \frac{(2n)!}{n!} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \\ & - \frac{c}{2\hbar\Omega_0} \left(\frac{\hbar}{2m\Omega_0}\right)^2 \frac{2\pi\hbar}{m\Omega_0} N_{2n} N_{2n+4} \\ & \times \sqrt{(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)} \\ & \times \frac{(2n)!}{n!} \frac{(2n+4)!}{(n+2)!} \\ & + \frac{c}{2\hbar\Omega_0} \left(\frac{\hbar}{2m\Omega_0}\right)^2 \frac{2\pi\hbar}{m\Omega_0} N_{2n} N_{2n-4} \\ & \times \sqrt{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)} \\ & \times \frac{(2n)!}{n!} \frac{(2n-4)!}{(n-2)!} + \dots \text{高阶项}. \quad (44) \end{aligned}$$

在偶极近似下, 非零跃迁矩阵元和跃迁能量分别为

$$\begin{aligned} x_{n,n+1} = & \sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega_0}} \sqrt{n+1} \left[1 - \frac{\delta}{2}(n+1)\right] \\ & + \frac{c^2}{16\hbar^2\Omega_0^2} \left(\frac{\hbar}{2m\Omega_0}\right)^4 \sqrt{n+1} \\ & \times [(n+2)(n+3) \\ & \times (73n^2 + 317n + 340) + n(n-1) \\ & \times (73n^2 - 25n - 2)] \quad (45) \end{aligned}$$

$$\hbar\omega_{n,n+1} = \hbar\Omega_0 [1 + \delta(n+1)] \quad (46)$$

$$\begin{aligned} x_{n-2,n+1} = & \frac{\delta}{12} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega_0}} \sqrt{(n+1)n(n-1)} \\ & - \frac{3c^2}{2\hbar^2\Omega_0^2} \left(\frac{\hbar}{2m\Omega_0}\right)^4 \\ & \times n(2n^2 - 13) \sqrt{(n-1)n(n+1)} \quad (47) \end{aligned}$$

$$\hbar\omega_{n-2,n+1} = 3\hbar\Omega_0 (1 + \delta_n) \quad (48)$$

$$\begin{aligned} x_{n-4,n+1} = & -\frac{c^2}{2\hbar^2\Omega_0^2} \left(\frac{\hbar}{2m\Omega_0}\right)^4 \\ & \times (6n^2 - 20n - 5) \\ & \times \sqrt{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)} \quad (49) \end{aligned}$$

$$\hbar\omega_{n-4,n+1} = 5\hbar\Omega_0 [1 + \delta(n-1)] \quad (50)$$

$$x_{n-6, n+1} = -\frac{c^2}{16\hbar^2\Omega_0^2} \left(\frac{\hbar}{2m_0\Omega_0}\right)^4 (n+62) \times \sqrt{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} \quad (51)$$

$$\hbar\omega_{n-6, n+1} = 7\hbar\Omega_0 [1 + \delta(n-2)] \quad (52)$$

#### 四、结果和讨论

选择与晶体有关的参数  $Z_2=14$ ,  $N=4.97 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ ,  $\alpha_p=1.92 \text{ \AA}$ , 与入射粒子有关的参数  $Z_1=1$ 。注意到  $a_T=0.17 \text{ \AA}$ , 由式(25)可得  $K=1.5 \text{ eV}$ ,  $D=11.3$ ,  $b^2=0.094$ 。

在简谐近似下, 正电子的面沟道辐射只有一条谱线, 其能量为

$$\begin{aligned} \hbar\omega_{mn}^0 &= 2\gamma\Omega_{mn} = 2\gamma^{3/2} \left(\frac{k_2}{m_0}\right)^{1/2} \\ &= 2\hbar\gamma^{3/2}, \end{aligned} \quad (53)$$

其中  $K_2=20.46 \text{ eV/\AA}^2$ , 与作用势相关的谱线展宽为零; 偶极跃迁矩阵元由

$$x_{n, n+1}^0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_0\Omega_0}} \sqrt{n+1} \quad (54)$$

给出。当  $\gamma=100$  时, 式(53)给出的沟道辐射最大能量为  $25 \text{ keV}$ 。实验表明, 能量为  $56 \text{ MeV}$  ( $\gamma \approx 112$ ) 的正电子沟道辐射只有一条谱线, 峰位  $37 \text{ keV}$ , 线宽  $20\%$  左右<sup>[9]</sup>。简谐近似再现了正电子面沟道辐射只有一条谱线这一特征, 但它给出的峰位偏低, 这是与实验不符合的。

考虑到非谱效应, 峰位向高能方向移动, 最大辐射能量由公式

$$\hbar\omega_{mn} = 25(1+7\delta)\gamma^{3/2} \quad (55)$$

给出。对于  $\gamma=100$ ,  $\hbar\omega_{mn}=37.5 \text{ keV}$  (其中  $\delta=0.081$ ) 与实验基本一致<sup>[9]</sup>。根据式(20)和(45)~(52), 图2给出了非简谐近似下, 正电子在 Si 单晶(110)面沟道中的辐射谱分布。谱线展宽与很多因素有关, 比如晶体缺陷、束流能散、非谱效应和电子多重散射等。从图2可近似估计出, 仅非谱效应这一项的贡献就有  $18\%$  左右, 加上其它效应, 谱线展

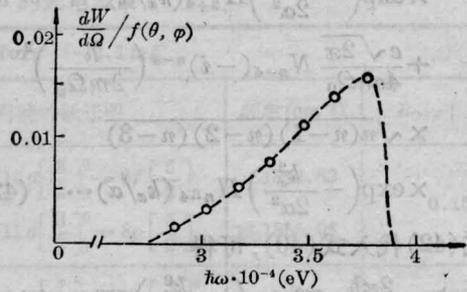


图2 在硅单晶(110)面沟道中, 沟道辐射的频谱分布

$$\text{图中 } f(\theta, \varphi) = \frac{(1-\beta \cos \theta)^2 - (1-\beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{(1-\beta \cos \theta)^4}$$

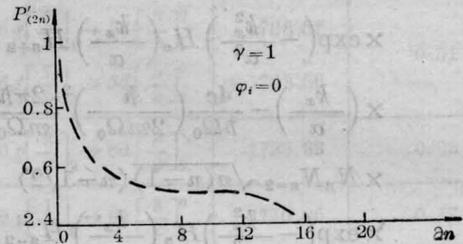


图3 占据几率  $P'$  与粒子“横向能量”  $2n$  之间的关系

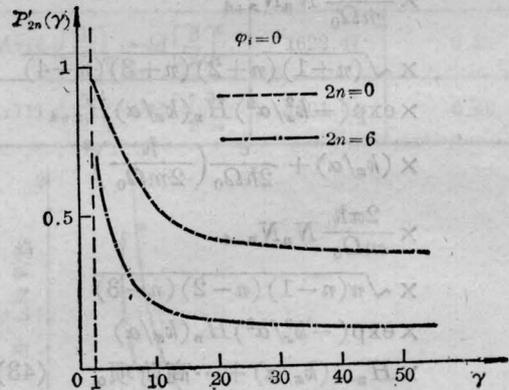


图4 占据几率  $P'$  和粒子“纵向能量”  $\gamma$  之间的关系

宽偏大, 这与 Lindhard 势的非简谐近似不是太理想有关。

图3~5分别给出了占据几率与横向能量、纵向能量及入射角度之间的关系。从图3可以看出, 在零角度入射情况下, 占据几率随

(下转第464页)

(由于没有摸索切割工艺,因此上述对比不是在最佳条件下进行的)。在保证吹氧量、切割速度和材料及其厚度相同的条件下,采用单模非稳腔和多模稳定腔切割不锈钢照片如图12所示。

从图12切割试件照片可以看出,在切割速度、吹氧量、试件材料和厚度相同的情况下,所需非稳腔单模激光切割功率大约只有稳定腔多模激光切割功率的2/3。同时,采用非稳腔的切缝宽度也比稳定腔多模光束切缝

宽度小得多,而且单模非稳腔切缝的正、反两面都比较光滑,热影响区也较多模稳定腔小。

### 参 考 文 献

- [1] 永井治彦等;《レーザー研究》,1982,10, No. 2, 43~53.
- [2] V. P. Garashchuk et al.; *Sov. J. Quant. Electr.*, 1982, 10, No. 12, 1316~1320.
- [3] A. I. Mahan et al.; *JOSA*, 1964, 54, No. 6, 721~732.

(上接第454页)

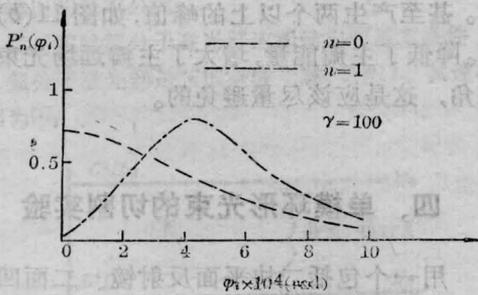


图5 占据几率  $P'$  与粒子入射角  $\varphi_i$  之间的关系

横向能量的增加而减少;图4给出了在同一情况下,占据几率随粒子能量增加而减少的规律;图5给出了  $n=1$  和  $n=2$  这两个态,在不同入射角下的占据几率,曲线的特征

与厄米多项式有关 [纵坐标均选择为  $P' = P(\frac{1}{4}\alpha)$  ]。

### 参 考 文 献

- [1] Kumakhov M. A.; *Phys. Lett.*, 1976, 57A, 17.
- [2] Kalinin B. N. et al.; *Phys. Lett.*, 1979, 70A, 447.
- [3] Tulupov A. V.; *Radiation Effects*, 1981, 56, No. 1~2, 77.
- [4] Beloshitsky et al.; *Phys. Reports*, 1982, 93, No. 3.
- [5] 罗诗裕;《物理》, 1983, No. 6.
- [6] 罗诗裕;《中国激光》, 1984, 11, No. 2, 73.
- [7] Heitler W.; "The Quantum Theory of Radiation", Third edition, Oxford (1954).
- [8] 罗诗裕, 祁明珠;《核技术》, 1983, No. 3, 38.
- [9] Algaard M. J. et al.; *Phys. Rev. Lett.*, 1979, 42, 1148.