中国激光
第12卷 第6期

自由电子激光器二极管的设计

褚成 胡煜

（中国科学院上海光机所）

提要：本文给出了喇曼散射自由电子激光器的关键部件——低发射度二极管的设计方法。浸没在强引导磁场中的二极管在空间电荷限制条件下工作。由给定的电子束流及阳极尺寸可数值求解获得所需的阴极型线。

Design of a diode of FEL

Chu Cheng, Hu Yu

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: The design method of a low emittance diode, the key component of a Raman-scattering FEL, is presented. The space-charge-limited diode is immersed in a strong guiding magnetic field; the profile of its cathode can be evaluated numerically from the required e-beam parameters and anode profile.

一、引言

对于喇曼散射型自由电子激光器来说，必须考虑电子束的集体效应，即电子与电子的相互作用。一般来说，如果受激电磁辐射波长大于束的德拜长度，束是以集体效应为主的。实验室坐标中德拜长度可表示为[5]：

$$\lambda_D=\frac{2\pi c}{\gamma\omega_p}\frac{\Delta\gamma}{\gamma} \tag{1}$$

式中 c 为光速；$\gamma=1/\sqrt{1-\beta^2}$，$\beta=v/c$，$v$ 为电子速度；$\omega_p=\sqrt{\frac{4\pi ne^2}{\gamma m}}$，为电子束的电子等离子体频率，$n$ 为电子密度，e 为电子电荷，m 为电子质量；$\Delta\gamma$ 为电子束 γ 的起伏值。

由(1)式易见电子束应有小的能量起伏 $\Delta\gamma$，即应是冷流。

为了获得上述冷强电子束所使用的无膜磁约束二极管可分为二类：一类提供空心筒状电子束[1~4]；另一类提供实心柱状电子束[6,7]。它们有着相似的运转机理[8]。最终的发射电子束流仅由空间电荷所限制。合理设计的二极管型线所决定的空间电荷限制束流具有设计者所需的束流密度分布；在一定强度的轴向磁场引导下向前传播进入漂移管。

二、设计方法

由于实验工作的需要，我们设计的是实

收稿日期：1984年5月31日。

心柱状电子束二极管。由于在真空中传输的强流电子束自身强大的静电场的外向推斥作用，如果没有一定强度的引导磁场加以约束，稳定的柱状电子束是不能存在的。对于一定能量、一定密度的电子束，存在着一个最小临界引导磁场值B_c（见图1）：

$$B_c=\left(\frac{8\pi j\ mc}{e\beta_z\gamma}\right)^{1/2} \tag{2}$$

式中 B_c 单位为 Gs，j 为电子束流密度（静电制电荷/cm²·s），β_z为 z 向（即轴向）速度/光速。

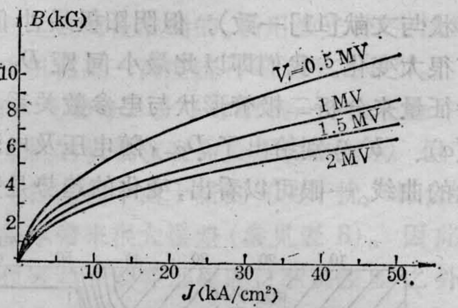


图1　临界引导磁场值 B_c 与电子束流密度 J 的关系（V 为电子能量）

由图1可见，对于 $V=0.5\,\mathrm{MV}$，$j=3.5\,\mathrm{kA/cm^2}$ 的典型条件，$B_c=2.9\,\mathrm{kGs}$。

另一方面，引导磁场的大小又决定了电子束的运动姿态。实验和理论都已证明[8]，束中电子的横向运动可看作两种旋转运动之和，一种是较慢的 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 旋转，其幅度较大；另一种是较快的（回旋频率 $\omega_+\approx eB/mc\gamma$）旋转，其幅度较小。后一种回旋运动的半径 r_L 与前一种旋转运动的半径 r_b（即电子束半径）之比可表示为（在较大 B 条件下）

$$r_L/r_b=\frac{2\pi\ mc\,j}{eB^2\ \beta z\ \gamma} \tag{3}$$

式中各参量定义同前。

图2给出了若干典型电流密度条件下 r_L/r_b 随引导磁场 B 增加而迅速减小的曲线。在 $V=0.5\,\mathrm{MV}$，$j=3.5\,\mathrm{kA/cm^2}$ 的典型条件下，当 $B=10\,\mathrm{kGs}$时，该比值$\leqslant0.02$。很显然，此时回旋运动幅度远小于电子束整体 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 运动幅度，可以在工程设计中忽略不计。在我们以下的设计程序中即设引导磁场约为 10 kGs，忽略电子轨道的精细结构。这自然会带来若干误差，但在上述运转条件下显然是合理的（比如当电子束半径 r_b 取典型值 3 mm 时，r_L 仅为 0.06 mm，远小于数值计算中所取网格间距值）。

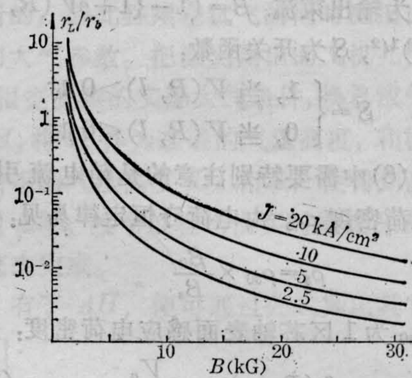


图2　电压 $V=0.5\,\mathrm{MV}$ 时电子回旋幅度与束旋转运动幅度之比随引导磁场的变化曲线

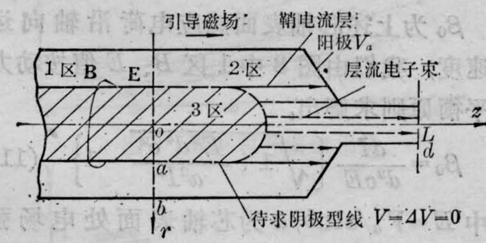


图3　求解空间电荷限制二极管示意图

列方程求解空间电荷限制二极管的过程可参照图3。图中阳极电位 V_a、出口孔径 d、阴极杆半径 a、二极管筒内径 b 可由所用加速器的性能事先决定。区1是馈入同轴线的结尾部分，面 $a-b$ 上的电位分布 $V(R)$ 为：

$$V(R,\,0)=\begin{cases}V_a\dfrac{\ln R/a}{\ln b/a} & R\geqslant a\\ 0 & R<a\end{cases} \tag{4}$$

出口面$(L-d)$上满足

$$\frac{\partial}{\partial z}V(R,\,L)=0 \tag{5}$$

为了能由一次大迭代过程即获得所需解，我们在设定阳极型线后并不设定阴极（图1中阴极型线由虚线表示即由此而来），在整个2区和3区范围内求解泊松方程：

$$\nabla^2 V(R,l)=-4\pi[\rho(R,l)S[V(R,l)]+\rho_s] \tag{6}$$

式中电荷密度 $\rho(R,l)$ 为

$$\rho(R,l)=\begin{cases}\dfrac{-I/(\pi d^2)}{c\cdot\beta} & \text{当 } R\leqslant a \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } R>a \text{ 时}\end{cases} \tag{7}$$

其中 I 为输出束流；$\beta=(1-\{1+eV(R,l)/mc^2\}^{-2})^{1/2}$，$S$ 为开关函数：

$$S=\begin{cases}1, & \text{当 } V(R,l)>0 \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } V(R,l)\leqslant 0 \text{ 时}\end{cases} \tag{8}$$

式(6)中需要特别注意的是鞘电流引起鞘层电荷密度 ρ_s。由电荷守恒定律易见：

$$\rho_s=\rho_{s0}\times\frac{\beta_0}{\beta_s} \tag{9}$$

式中 ρ_{s0} 为1区芯轴表面感应电荷密度：

$$\rho_{s0}=\delta(R-a)\frac{V_a}{4\pi a\ln b/a} \tag{10}$$

其中 $\delta(R-a)$ 为 δ 函数。

β_0 为上述芯轴表面感应电荷沿轴向运动速度，我们由图3中1区 B、E 值按动力学平衡原则求解出：

$$\beta_0=\frac{aI}{d^2cE}\left\{\sqrt{1+\frac{E^2d^4c^2}{a^2I^2}}-1\right\} \tag{11}$$

式中 $E=V_a/a\ln b/a$ 为芯轴表面处电场强度。

由能量守恒定律，我们求出(9)式中真空中鞘电流速度 β_s 为

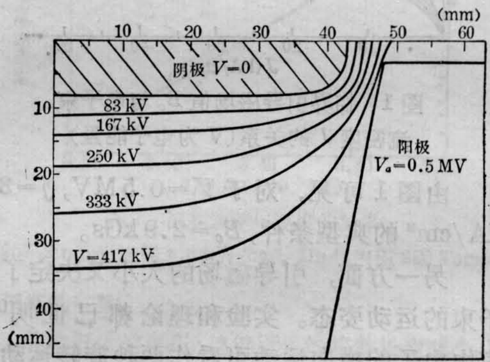
$$\beta_s=\left\{1-\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}}+\frac{eV(a,l)}{mc^2}\right)^{-2}\right\}^{1/2} \tag{12}$$

方程(6)～(12)加上边界条件(4)、(5)即构成求解2区+3区中电位分布的充要条件，数值求解后即自动给出待定的阴极表面型线。在该型线内 $V\equiv 0$ 并在越过该表面时解析，因此表面处 ∇V 亦为零，这就满足了Child-Langmuir空间电荷限制流条件。

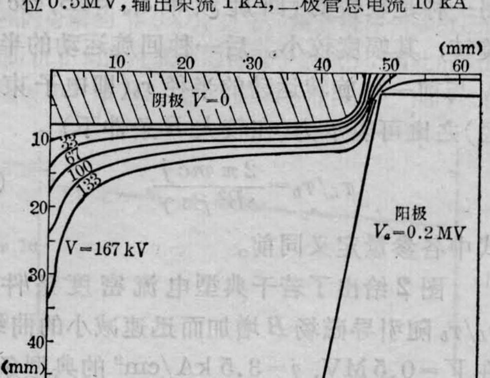
三、计算结果及讨论

我们对直线锥型阴极及曲线锥状阴极二类情况作了数值计算。计算采用了变参数松弛法求解椭圆差分方程的典型格式[9,10]。但在鞘电流层($R=a$)，由于出现了 δ 函数(见(9)-(10式)，通常的差分格式不能直接使用。我们从麦克斯韦尔方程出发推导了鞘电荷引起鞘内外二相邻格点处电位的变化解决了这个问题。

我们对一系列直线锥形二极管作了计算，其中二组典型结果示于图4。由图4易见，在二极管电参数变化时，阴极杆形状变化不大(均呈中心大曲率半径，边缘小曲率半径形状与文献[11]一致)，但阴阳极最小间距有很大变化。我们即以此最小间距 D_{C-A} 为特征量来分析二极管形状与电参数关系。图5(*a*)、(*b*)分别给出了 D_{C-A} 随电压及电流变化的曲线。一眼可以看出，变化的趋势是完全



(*a*) 锥型阳极二极管，圆锥角度10°；阴极杆半径8 mm，出口半径3 mm，筒壁半径47 mm；阳极电位0.5MV，输出束流1 kA，二极管总电流10 kA



(*b*) 锥型阳极二极管，阳极电压0.2MV，输出束流1 kA，二极管总电流8.3 kA，其余同(*a*)。

图 4

符合熟知的 Child-Langmuir 定律的。事实上，由图 5 可求出 $D\propto V^{0.723}$，这与非相对论情况下(图 6 电压范围与此相近[8]) $D\propto V^{0.75}$ 一致。

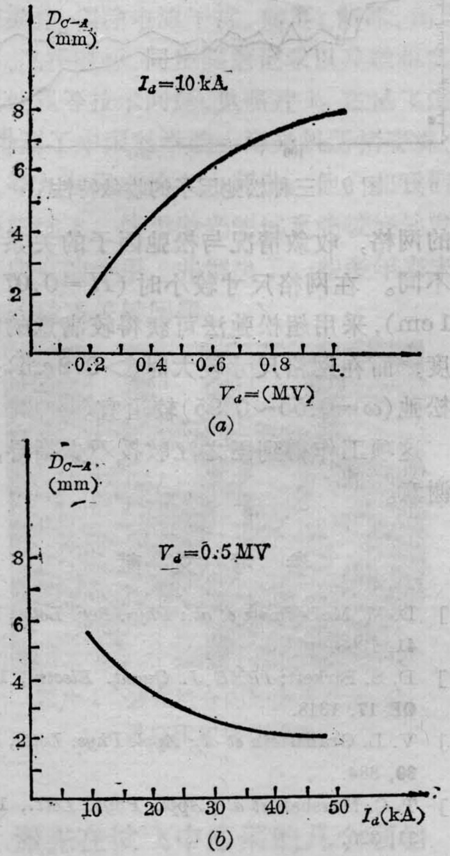


图 5　阴-阳极最小间距 D_{C-A} 与电参量的关系曲线

选定工作点时除了考虑到加速器性能及自由电子激光器工作参数以外，应考虑到等离子体发射面向阳极高速移动的事实。作为一个判断准则，我们认为阴-阳极最小间距应保证上述移动造成的二极管闭合时间为自由电子激光器所需运转时间的五倍。由于闭合速度一般为 $2\sim3\times10^6$ cm/s[12]，如果要求电子束运转时间为 60 ns，则间距应为 6 mm。由图5(b)可见，对于 0.5 MV 的加速器，要求二极管总电流不小于 10 kA；在图 4 所示几何尺寸条件下，就是要求输出束流不小于1kA。需要指出的是，正如图 4 所示，输出电子束截面积仅为阴极发射束流截面的 1/7，这是

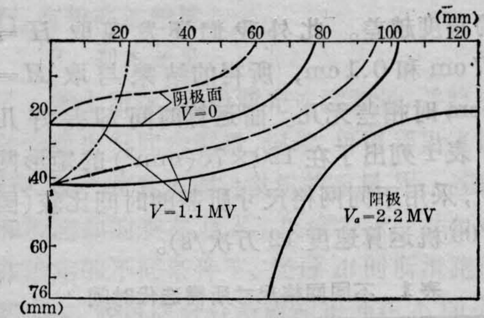


图 6　曲线锥状阳极二极管，阳极电压 2.2 MV，输出束流 18 kA

———— 泊松方程解(考虑了鞘电流)
— — — 泊松方程解(未考虑鞘电流)
—·—·— 拉普拉斯方程解

为了阻住边缘的“热”电子，仅取出中心“冷”电子所必需的[6,7]。

为了考察鞘电流的影响及迭代过程收敛特性，我们还对一曲线锥状阳极二极管作了“分层次”计算，即首先计算无空间电荷场(拉普拉斯方程)，然后计算仅考虑束电流不考虑鞘电流时场，最后计算鞘电流亦加以考虑时场。计算结果示于图 7。在计算鞘电流时，二极管阴极前端比不计及时伸出 17 mm 之多；根部则由原来的缓变变成陡峭上升。二极管空间中的等位线分布也呈现类似的变化；但越靠近阳极变化越小(图中未画出)。拉普拉斯方程的解则呈完全不同形状。

我们也对采用不同网格尺寸时上述曲线锥形二极管(图 6)的收敛性进行了比较。图 7 分别列出了在网格尺寸 H 取 0.2、0.4、0.6 cm 时，所获得的沿轴电位曲线(误差 $\sim10^{-3}$)，图中明显可见，网格尺寸越大，所获

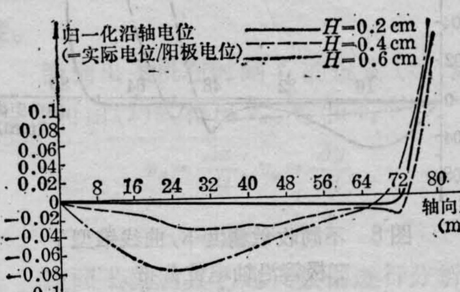


图 7　不同网格尺寸时曲线锥形阳极二极管沿轴电位分布情况

得的精度越差。此外我们还发现取 $H=0.07\,\text{cm}$ 和 $0.1\,\text{cm}$，所得的结果与取 $H=0.2\,\text{cm}$ 时相差无几。而运算时间却差好几倍。表 1 列出了在 $120\times76(\text{mm}^2)$ 的矩形网格下，采用不同网格尺寸所需的时间比较（国产 709 机运算速度 12 万次/s）。

表 1 不同网格尺寸所需迭代时间

网格尺寸(cm)	0.07	0.1	0.2	0.4
网格点数	18748	9120	2280	570
每十次迭代所需时间	3′50″	2′	27″	8″

因此，在兼顾运算时间和保证足够精度的前提下，我们认为取 $H=0.2\,\text{cm}$ 即可获得满意的设计要求。图 8 是在 $H=0.2\,\text{cm}$ 下对应于不同精度所获得的沿轴电位曲线。由图可看出，在相对误差 $\sim10^{-4}$ 量级时所得结果已很好地满足要求。

我们还对收敛因子 ω 的选取对收敛性的影响进行了比较。图 9 给出了 ω 因子的三种不同取法[10]对收敛性的影响。其中 $\omega^*=2-2H\left[\dfrac{\pi^2}{2P^2}+\dfrac{x_1^2}{2Q^2}\right]^{1/2}$，式中 P 为圆柱坐标中 z 向尺寸；Q 为 R 向；x_1 为贝塞尔函数的第一个零点 $(J_0=2.4048)$；H 为网格尺寸。

由图可看出，只有用变参数松弛因子才能获得满意的收敛速度。我们还发现，对于不

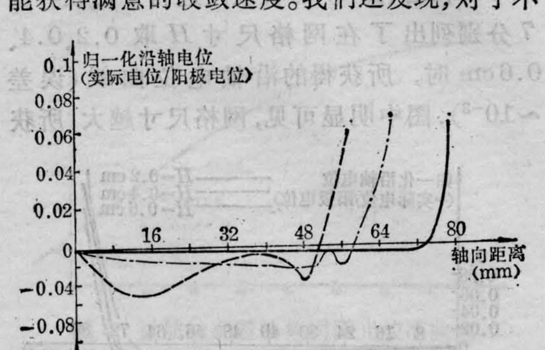


图 8 不同收敛精度下，曲线锥型二极管沿轴电位分布

相对误差: ———— 10^{-4}
—·—·— 10^{-2}
– – – – 5×10^{-2}

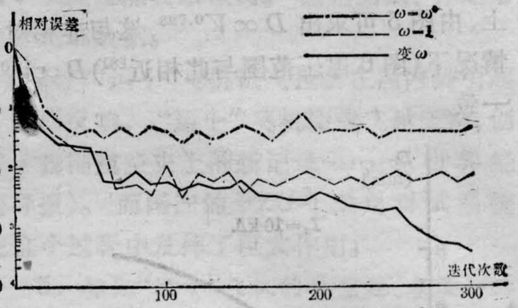


图 9 三种松弛因子的收敛特性

同的网格，收敛情况与松弛因子的关系也有所不同。在网格尺寸较小时（$H=0.07\,\text{cm}$、$0.1\,\text{cm}$），采用超松弛法可获得较满意的收敛速度，而在网格尺寸较大时（$>0.2\,\text{cm}$）采用欠松弛（$\omega=0.55\sim0.95$）较适宜。

这项工作得到王之江教授不少指导，谨致谢意。

参 考 文 献

[1] D. M. McDermott *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1978, **41**, 1368.

[2] D. S. Birkett; *IEEE J. Quant. Electr.*, 1981, **QE-17**, 1348.

[3] V. L. Granastein *et al.*; *Appl. Phys. Lett.*, 1977, **30**, 384.

[4] T. C. Marshall *et al.*; *Appl. Phys. Lett.*, 1977, **31**, 320.

[5] T. C. Marshall *et al.*; "Advances in Electronics and Electron Physics", L. Marton, C. Marton, ed., 1980, **53**.

[6] R. H. Jackson *et al.*; *IEEE J. Quant. Electr.*, 1983, **QE-19**, No. 3, 346.

[7] M. L. Sloan; *Phys. Fluids*, 1982, **25**, No. 12, 2337.

[8] R. B. Miller; "An Introduction to the Physics of Intense Charged Particle Beams", Plenum Press, N. Y., 1982, p. 26.

[9] 冯康等编；"数值计算方法"，国防工业出版社，1978 年版。

[10] 郁长庆；"强流离子光学原理"，原子能出版社，1982 年版。

[11] S. H. Gold *et al.*; *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1981, **26**, 847.

[12] G. 贝克菲著，庄国良，褚成译；"激光等离子体原理"，上海科技出版社，1981 年版。