中国激光
第12卷 第6期

三维漫射体彩虹全息的多次曝光综合狭缝方法

陈桂丛 单启蛰

（山东海洋学院物理系）

提要：本文推广了三维漫射体彩虹全息的综合狭缝方法[1,2]，利用多次曝光获得准单色彩虹全息重现象，讨论了多次曝光综合狭缝理论，并分析了曝光次数和物体位移对综合狭缝的影响。

Use of multiple exposure synthetic slit in rainbow holography of diffuse 3-D objects

Chen Guicong, Shan Qizhe

(Department of Physics, Shandong College of Oceanography)

Abstract: Extending the synthetic slit method in rainbow holography of diffuse 3-D objects [1,2], a quasi-monochromatic reconstructed image is obtained by means of multiple exposure under white light illumination. A theory of multiple exposure synthetic slit is described and the effects of exposure times and object displacement for synthetic slit are discussed. Experimental results are also included.

一、引 言

C. P. Grover 和 H. M. van Driel 提出了使物体在曝光时间内作匀速运动来代替真实狭缝拍摄彩虹全息的方法[3]，该方法的实质是在拍摄全息的曝光时间内，物作匀速运动的效果相当于在透镜后焦面上的场分布是静止的物产生的场分布和一个 sinc 函数场分布的乘积，sinc 函数的中央最大起着彩虹全息中的狭缝作用，可以称为综合狭缝(Synthetic slit)。但 C. P. Grover 等人还没有了解漫射体的运动方向和综合狭缝的位置之间的关系，因此他们提出的方法实质上只能适用于两维透明体，而不能用来拍摄三维漫射体。另一方面，他们没有采用合理的彩虹全息记录光路[4,5]，使综合狭缝重现象处在物重现象和观察者之间，因而在实验上没有得到准单色的彩虹全息重现象。

作者等人从理论和实验两方面讨论了漫射体的运动方向和综合狭缝的位置之间的关系[1,2]，得到了匀速运动的三维漫射体的彩虹全息图，本文则推广这种方法。

收稿日期：1984年4月16日。

二、理 论 分 析

设物被空间频率为 f_{yi}、f_{zi} 的斜入射平行光束照明(图 1)，这时在物表面处的光场表达式为

$$U(x_0,\ y_0,\ z_0) = A(x_0,\ y_0,\ z_0)\exp[j2\pi(f_{yi}y_0+f_{zi}z_0)] \tag{1}$$

式中 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 为物表面的空间坐标(z_0 坐标的原点在透镜上)，$A(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 是与物表面性质及照明方式有关的函数。如果相邻两次曝光之间的移动量为 d，移动方向在 yz 平面内和 z 轴夹角为 θ，则第 n 次曝光时在物表面处的光场为

$$\begin{aligned}U_n(x_0,\ y_0,\ z_0) &= A[x_0,\ y_0 - (n-1)d\sin\theta,\ z_0-(n-1)d\cos\theta] \\ &\quad\times\exp[j2\pi(f_{yi}y_0+f_{zi}z_0)]。\end{aligned} \tag{2}$$

(1)式和(2)式可改写成

$$\begin{aligned}U_0(x_0,\ y_0,\ z_0) &= U[x_0,\ y_0 - (n-1)d\sin\theta,\ z_0-(n-1)d\cos\theta] \\ &\quad\times\exp\{j2\pi[f_{yi}(n-1)d\sin\theta + f_{zi}(n-1)d\cos\theta]\}。\end{aligned} \tag{3}$$

于是第 n 次曝光时对 $z=z_0$ 的物元在透镜后焦面上的场为

$$\begin{aligned}U_{fn}(x_f,\ y_f;\ z_0) &= \frac{1}{j\lambda f} \\ &\times\exp\left\{j2\pi\left[\left(f_{yi}-\frac{y_f}{\lambda f}\right)(n-1)d\sin\theta + f_{zi}(n-1)d\cos\theta\right]\right\}\exp\frac{j2\pi z_0}{\lambda} \\ &\times\exp\left[\frac{j\pi}{\lambda f}\left(1-\frac{z_0}{f}\right)(x_f^2+y_f^2)\right] \\ &\times\mathscr{F}\{U[x_0,\ y_0,\ z_0 - (n-1)d\cos\theta]\}_{f_x=\frac{x_f}{\lambda f},\ f_y=\frac{y_f}{\lambda f}}。\end{aligned} \tag{4}$$

式中 λ 为物波的波长，f 为透镜的焦距，$\mathscr{F}\{U[x_0, y_0, z_0-(n-1)d\cos\theta]\}$ 表示 $U[x_0,\ y_0,\ z_0-(n-1)d\cos\theta]$ 的傅里叶变换。

第 n 次曝光时物的全体在透镜后焦面上的场可由(4)式对 z_0 求积分得到：

$$\begin{aligned}U_{fn}(x_f,\ y_f) &= U_{f1}(x_f,\ y_f) \\ &\times\exp\left\{j2\pi\left[\left(f_{yi}-\frac{y_f}{\lambda f}\right)(n-1)d\sin\theta + \left(f_{zi}+\frac{1}{\lambda}-\frac{x_f^2+y_f^2}{2\lambda f^2}\right)(n-1)d\cos\theta\right]\right\},\end{aligned} \tag{5}$$

式中

$$\begin{aligned}U_{f1}(x_f,\ y_f) &= \frac{1}{j\lambda f}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\frac{j2\pi z_0}{\lambda} \\ &\times\exp\left[\frac{j\pi}{\lambda f}\left(1-\frac{z_0}{f}\right)(x_f^2+y_f^2)\right] \\ &\times\mathscr{F}\{U(x_0,\ y_0,\ z_0)\}_{f_x=\frac{x_f}{\lambda f},\ f_y=\frac{y_f}{\lambda f}}dz\end{aligned} \tag{6}$$

为第一次曝光时，即位移前物在透镜后焦面上的场。(5)式建立了第一次曝光和第 n 次曝光时在透镜后焦面上场之间的关系。

利用牛顿公式，我们有

$$(f-z_0)(z_f-z_i) = -f^2,$$

于是(6)式可以化为

$$U_{f1}(x_f,\ y_f) = \frac{1}{j\lambda f}\int_{-\infty}^{+\infty} \times\exp\left(\frac{j2\pi z_0}{\lambda}\right)\exp\left(\frac{j\pi}{\lambda}\ \frac{x_f^2+y_f^2}{z_i-z_f}\right)$$

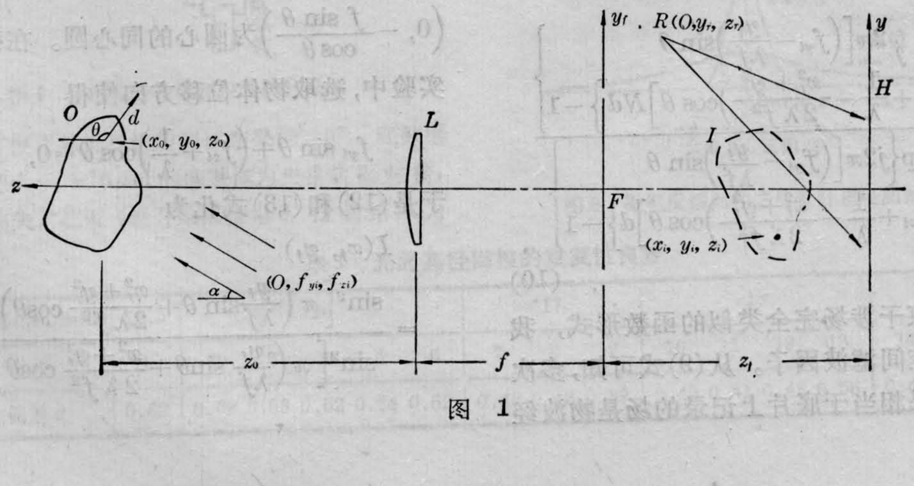

图 1

$$\times\mathscr{F}\{U(x_0,\ y_0,\ z_0)\}_{f_x=\frac{x_f}{\lambda f},f_y=\frac{y_f}{\lambda f}}\,dz_0,\tag{6'}$$

式中 z_i 为物经透镜成象的坐标，z_f 为透镜后焦面的坐标，它们的原点在全息底片上。

第 n 次曝光时投射到全息底片上的物波为

$$U_{hn}(x,\ y)=\iint_{-\infty}^{+\infty}U_{fn}(x_f,\ y_f)$$

$$\times\exp\left\{\frac{j\pi}{\lambda z_f}\left[(x-x_f)^2+(y-y_f)^2\right]\right\}dx_f dy_f。\tag{7}$$

为书写简便起见，从此式以下略去所有式中表示场的振幅和常位相的复常数相乘因子。设球面参考波的中心坐标为 $(O,\ y_r,\ z_r)$，则可写为

$$U_r(x,\ y)=\exp\left\{\frac{j\pi}{\lambda z_r}\left[x^2+(y-y_r)^2\right]\right\}。\tag{8}$$

如果显影后底片的振幅透射率正比于曝光量，那么 N 次曝光后透射率中我们关心的项是

$$t(x,\ y)=\sum_{n-1}^{N}U_r^*U_{hn},$$

式中比例常数被省略。由(5)、(7)及上式，交换积分及求和的次序，经整理后得

$$t(x,\ y)=U_r^*\iint_{-\infty}^{+\infty}U_{f1}(x_f,\ y_f)L(x_f,\ y_f)$$

$$\times\exp\left\{\frac{j\pi}{\lambda z_f}\left[(x-x_f)^2+(y-y_f)^2\right]\right\}dx_f dy_f,\tag{9}$$

式中

$$L(x_f,\ y_f)=\frac{\exp\left\{j2\pi\left[\left(f_{yi}-\frac{y_f}{\lambda f}\right)\sin\theta+\left(f_{zi}+\frac{1}{\lambda}-\frac{x_f^2+y_f^2}{2\lambda f^2}\right)\cos\theta\right]Nd\right\}-1}{\exp\left\{j2\pi\left[\left(f_{yi}-\frac{y_f}{\lambda f}\right)\sin\theta+\left(f_{zi}+\frac{1}{\lambda}-\frac{x_f^2+y_f^2}{2\lambda f^2}\right)\cos\theta\right]d\right\}-1}\tag{10}$$

有和多光束干涉场完全类似的函数形式，我们称它为空间滤波因子。从(9)式可知，多次曝光的效果相当于底片上记录的场是物波经位于透镜后焦面上的空间滤波因子滤波的结果。于是可以认为透镜后焦面上的场分布为物场和空间滤波因子的积：

$$U_f(x_f,\ y_f)=U_{f1}(x_f,\ y_f)L(x_f,\ y_f)。\tag{11}$$

这个空间滤波因子在一定条件下起着彩虹全息中狭缝的作用，相当于在拍摄彩虹全息时狭缝置于透镜后焦面处的情况。

三、空间滤波因子

由(10)式，空间滤波因子对应的强度分布为

$$I(x_f,\ y_f)=\frac{\sin^2\left\{\pi\left[\left(f_{yi}-\frac{y_f}{\lambda f}\right)\sin\theta+\left(f_{zi}+\frac{1}{\lambda}-\frac{x_f^2+y_f^2}{2\lambda f^2}\right)\cos\theta\right]Nd\right\}}{\sin^2\left\{\pi\left[\left(f_{yi}-\frac{y_f}{\lambda f}\right)\sin\theta+\left(f_{zi}+\frac{1}{\lambda}-\frac{x_f^2+y_f^2}{2\lambda f^2}\right)\cos\theta\right]d\right\}}。\tag{12}$$

当

$$x_f^2+\left(y_f+\frac{f\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2=\frac{2\lambda f^2}{\cos\theta}\left[f_{yi}\sin\theta+\left(f_{zi}+\frac{1}{\lambda}\right)\cos\theta-\frac{K}{d}\right]+\frac{f^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta},$$

K 为整数且 $K\leqslant\left[f_{yi}\sin\theta+\left(f_{zi}+\frac{1}{\lambda}\right)\cos\theta+\frac{\sin^2\theta}{2\lambda\cos\theta}\right]d$ (13)

时，我们得到第 K 级干涉主最大，它们是以 $\left(0,-\frac{f\sin\theta}{\cos\theta}\right)$ 为圆心的同心圆。在我们的实验中，选取物体位移方向使得

$$f_{yi}\sin\theta+\left(f_{zi}+\frac{1}{\lambda}\right)\cos\theta=0,\tag{14}$$

于是(12)和(13)式化为

$$I(x_f,\ y_f)=\frac{\sin^2\left[\pi\left(\frac{y_f}{\lambda f}\sin\theta+\frac{x_f^2+y_f^2}{2\lambda f^2}\cos\theta\right)Nd\right]}{\sin^2\left[\pi\left(\frac{y_f}{\lambda f}\sin\theta+\frac{x_f^2+y_f^2}{2\lambda f^2}\cos\theta\right)d\right]},\tag{12'}$$

和

$$x_f^2+\left(y_f+\frac{f\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2=\frac{2\lambda f^2}{\cos\theta}\left(\frac{\sin^2\theta}{2\lambda\cos\theta}-\frac{K}{d}\right),$$

K 为整数且 $\quad K\leqslant\dfrac{d\sin^2\theta}{2\lambda\cos\theta}$。 (13′)

零级主最大的半径为 $\dfrac{f\sin\theta}{|\cos\theta|}$，可见它通过频谱面的中心。由于实际上圆心远离物波的频谱范围，我们观察到的干涉条纹是近似平行直线为同心圆弧。

(14)式即为物体位移方向上的单位矢量 $(\sin\theta,\ \cos\theta)$ 和矢量 $\left(f_{yi},\ f_{zi}+\dfrac{1}{\lambda}\right)$ 垂直的条件。从图 2 易证矢量 $\left(f_{yi}, f_{zi}+\dfrac{1}{\lambda}\right)$ 的方向即为物的照明平行光束和 z 轴夹角的平分角线方向。

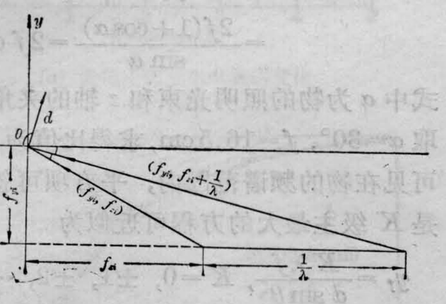

图 2

四、频谱面的全息重现

将(6′)式代入(9)式，我们得到

$$t(x, y)=U_r^*\iiint_{-\infty}^{+\infty}\exp\frac{j2\pi z_0}{\lambda}\times\mathscr{F}\{U(x_0,\ y_0,\ z_0)\}_{f_x=\frac{x_f}{\lambda f},\ f_y=\frac{y_f}{\lambda f}}$$
$$\times L(x_f,\ y_f)\exp\left\{\frac{j2\pi}{\lambda}\left[\frac{z_i(x_f^2+y_f^2)}{2(z_i-z_f)z_f}-\frac{xx_f+yy_f}{z_f}+\frac{x^2+y^2}{2z_f}\right]\right\}dx_f dy_f dz_f \quad (15)$$

设全息图被波长为 λ' 的球面重现波照明：

$$U_p(x, y)=\exp\left\{\frac{j\pi}{\lambda' z_p}\left[x^2+(y-y_p)^2\right]\right\} \quad (16)$$

式中 $(0,\ y_p,\ z_p)$ 为球面重现波中心的坐标(图 3)。于是在 $z=\zeta$ 平面上的波场分布为

$$U(\xi,\ \eta,\ \zeta)=\iint_{-\infty}^{+\infty}tU_p\exp\left\{\frac{-j\pi}{\lambda'\zeta}\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\right]\right\}dxdy。\quad (17)$$

将(15)和(16)式代入(17)式，经整理后得式中对 x, y 的积分为

$$\iint_{-\infty}^{+\infty}\cdots dxdy=\iint_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\frac{j2\pi}{\lambda'}\left[\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{1}{z_f}-\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{1}{z_r}+\frac{1}{z_p}-\frac{1}{\zeta}\right)\frac{x^2+y^2}{2}-\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{x_f}{z_f}-\frac{\xi}{\zeta}\right)x-\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{y_f}{z_f}-\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{y_r}{z_r}+\frac{y_p}{z_p}-\frac{\eta}{\zeta}\right)y\right]\right\}dxdy。$$

考虑上式中 x^2+y^2 项系数为 0 的平面 $z=\zeta_f$，即

$$\frac{1}{\zeta_f}=\frac{1}{z_p}-\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{1}{z_r}+\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{1}{z_f}, \quad (18)$$

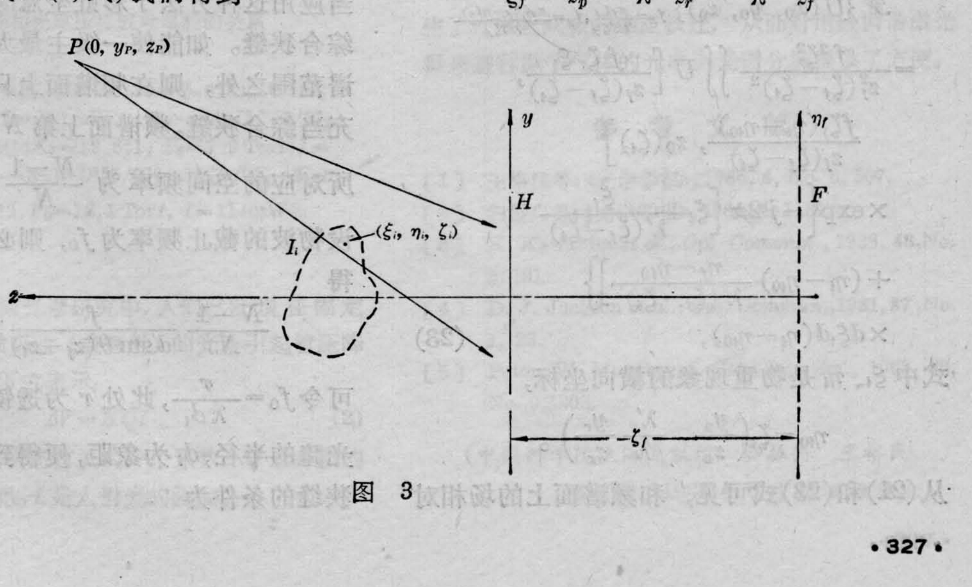

图 3

在此平面上有

$$\iint_{-\infty}^{+\infty}\cdots dxdy=\lambda^2 z_f^2\,\delta\left(x_f-\frac{\lambda}{\lambda'}\frac{z_f\xi_f}{\zeta_f}\right)$$

$$\times\delta\left[y_f-\frac{\lambda}{\lambda'}\frac{z_f(\eta_f-\eta_{f0})}{\zeta_f}\right],\tag{19}$$

式中$(\xi_f,\ \eta_f)$为与平面$z=\zeta_f$相联系的坐标，

$$\eta_{f0}=\zeta_f\left(\frac{y_p}{z_p}-\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{y_r}{z_r}\right)。\tag{20}$$

根据δ-函数的性质，从(17)式可以得到在$z=\zeta_f$平面上的波场分布为

$$U(\xi_f,\ \eta_f,\ \zeta_f)=\int\exp\frac{j2\pi z_0}{\lambda}$$

$$\times\mathscr{F}\{U(x_0,\ y_0,\ z_0)\}_{f_x=\frac{z_f\xi_f}{\lambda'f\zeta_f},f_y=\frac{z_f(\eta_f-\eta_{f0})}{\lambda'f\zeta_f}}$$

$$\times\exp\left[-\frac{j\pi}{\lambda'}\frac{\xi_f^2+(\eta_f-\eta_{f0})^2}{\zeta_f-\zeta_i}\right]dz_0$$

$$\times L\left[\frac{\lambda z_f\xi_f}{\lambda'\zeta_f},\frac{\lambda z_f(\eta_f-\eta_{f0})}{\lambda'\zeta_f}\right],\tag{21}$$

式中ζ_i为物重现象的坐标:

$$\frac{1}{\zeta_i}=\frac{1}{z_p}-\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{1}{z_r}+\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{1}{z_i}。\tag{22}$$

(18)和(19)式指出的$(x_f,\ y_f,\ z_f)$和$(\xi_f,\ \eta_f,\ \zeta_f)$的关系和全息中物及重现象的位置关系完全一致，因此$z=\zeta_f$平面就是频谱面$z=z_f$平面的重现平面，(21)式中的因子$L\left[\frac{\lambda z_f\xi_f}{\lambda'\zeta_f},\ \frac{\lambda z_f(\eta_f-\eta_{f0})}{\lambda'\zeta_f}\right]$就是频谱面上的空间滤波因子$L(x_f,\ y_f)$的全息重现。可以证明(21)式中的

$$\mathscr{F}\{U(x_0,\ y_0,\ z_0)\}_{f_x=\frac{z_f\xi_f}{\lambda'f\zeta_f},f_y=\frac{z_f(\eta_f-\eta_{f0})}{\lambda'f\zeta_f}}$$

$$=\frac{f^2\zeta_f^2}{z_f^2(\zeta_f-\zeta_i)^2}\iint U\left[\frac{f\zeta_f\xi_i}{z_f(\zeta_f-\zeta_i)},\right.$$

$$\left.\frac{f\zeta_f(\eta_i-\eta_{i0})}{z_f(\zeta_f-\zeta_i)},\ z_0(\zeta_i)\right]$$

$$\times\exp\left\{-j2\pi\left[\xi_i\frac{\xi_f}{\lambda'(\zeta_f-\zeta_i)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+(\eta_i-\eta_{i0})\frac{\eta_f-\eta_{f0}}{\lambda'(\zeta_f-\zeta_i)}\right]\right\}$$

$$\times d\xi_i d(\eta_i-\eta_{i0}),\tag{23}$$

式中ξ_i、η_i是物重现象的横向坐标，

$$\eta_{i0}=\zeta_i\left(\frac{y_p}{z_p}-\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{y_r}{z_r}\right)。$$

从(21)和(23)式可见，和频谱面上的场相对应，在$z=\zeta_f$平面上的场是物重现象在重现频谱面上产生的场和重现空间滤波因子的积，这个重现空间滤波因子在一定条件下起着彩虹全息中狭缝重现象的作用。用白光照射全息片时，得到不同颜色的物重现象和相应的综合狭缝重现象。当眼睛在综合狭缝重现象处观察时，由于眼睛光瞳的限制，在视网膜上得到准单色的物重现象。

五、实验结果和讨论

考虑(12′)式中一次项和二次项系数的比值

$$\frac{2f\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2f\left(\frac{1}{\lambda}+f_{zi}\right)}{f_{yi}}$$

$$=\frac{2f(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}=2f\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

式中α为物的照明光束和z轴的夹角。我们取$\alpha=30°$, $f=16.5\,\text{cm}$,求得比值为123 cm。可见在物的频谱范围内，平方项可忽略。于是K级主最大的方程可近似为

$$y_f=\frac{K\lambda f}{d\sin\theta},\ K=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots。\tag{24}$$

可设紧靠主最大的干涉最小和主最大之间的间隔为综合狭缝宽度w:

$$w=\frac{\lambda f}{Nd\sin\theta}。\tag{25}$$

当应用这种方法于彩虹全息时要求只有一个综合狭缝。如能使一级主最大落在物波的频谱范围之外，则在频谱面上只有零级主最大充当综合狭缝。频谱面上第$N-1$级干涉最小所对应的空间频率为$\frac{N-1}{N}\frac{f}{d\sin\theta(z_f-z_i)}$,设物波的截止频率为$f_0$，则必须选择参数使得

$$\frac{N-1}{N}\frac{f}{d\sin\theta(z_f-z_i)}\geqslant f_0,\tag{26}$$

可令$f_0=\frac{r}{\lambda d_i}$,此处$r$为透镜成象系统出射光瞳的半径，$d_i$为象距，便得到只有一个综合狭缝的条件为

$$\frac{N-1}{Nd} \geqslant \frac{r \sin\theta}{\lambda z_0}。 \tag{26'}$$

至于次最大,在曝光次数 N 大时，其影响可以忽略，或每次曝光量按牛顿二项式系数的比例,则次最大消失[6]。

从(26′)式可见,在光路确定以后，为了保证只有一个综合狭缝，位移量 d 必须足够小。但由(25)式, d 变小综合狭缝变宽,为了维持综合狭缝的一定宽度，须增加曝光次数 N。我们选取 $d=5\mu m$, $N=7$, $z_0=32$ cm, $\theta=75°$, $r=2.5$ cm, $\lambda=6328$ Å,计算结果说明条件(26′)式满足,并求得综合狭缝宽度为 3 mm。选取 $z_r=13$ cm, $z_p=120$ cm, $z_f=23.5$ cm, 对 $\frac{\lambda'}{\lambda}=0.8$,求得重现象平均深度为 12 cm, 重现频谱面位置 $\zeta_f=-52$ cm。实验结果和理论分析符合，白光重现下的彩虹全息象的照片如图 4 所示，提高实验精度可以减小色模糊。

图 4

本文的实验工作是在美国沙基诺大学光学实验室中完成的，陈选教授给予很多指导和帮助,在此致谢。

参 考 文 献

[1] Guicong Chen *et al.*; *JOSA*, 1982, **72**, 1830.

[2] Qizhe Shan *et al.*; *Appl. Opt.*, 1983, **22**, 3902.

[3] C. P. Grover, H. M. van Driel; *JOSA*, 1980, **70**, 335.

[4] H. Chen *et al.*; *Appl. Opt.*, 1981, **20**, 3557.

[5] 陈桂丛, H. Chen;《光学学报》, 1983, **3**, No. 4, 326

[6] J.M. Burch, J. M. T. Tokarski; *Opt. Acta*, 1968, **15**, 101.

(上接第 345 页)

而等加速模式测量结果如图 5 所示，调制频率脉冲数用多道分析器记录。可以看出光脉冲数与速度成正比变化，速度计算公式为:

$$v_A = N/f_R t T n_0$$

式中 N 为光脉冲数, f_R 为振动子工作频率, t 为测量时间, T 为多道每道停留时间, n_0 为光栅密度。

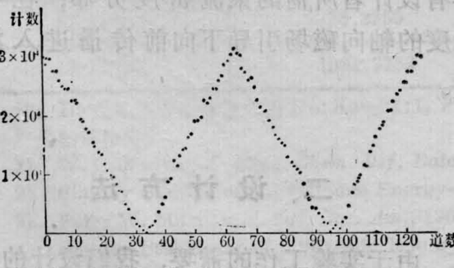

图 5 双光栅移频法所测得的等加速穆斯堡尔谱仪的速度谱

本结果由于光栅密度不够，测出的速度变化曲线有些涨落点,如果采用较密光栅,可以改进测量结果。

甘进福同志在本实验的制作和调试等工作中给了很大帮助,谨此致谢。

参 考 文 献

[1] M. Born, E. Wolf; Principle of Optics, 6th ed., Pergamon, New York, 1980, p.593.

[2] 韩光耀等;《激光》, 1982, No.6, 66.

[3] 易明等;《南京大学学报》, 1984, No 4.

[4] G. Bekefi, A. H. Barrett; Electromagnetic Vibrations, Waves, and Radiation. MIT Press, Cambridge, 1977, p. 561.