中国激光

第12卷　第4期

关于非均匀性对单横模激光振荡特性的影响

王　裕　民

（中国科学院上海光机所）

提要：考虑到激光的横模分布、介质增益及腔损失的横向不均匀性后，给出了不同激光模式振荡的速率方程，并讨论上述不均匀性对振荡条件、增益饱和特性、频率牵引、振荡功率等的影响。

Influence of inhomogeneity on single transverse mode laser oscillation properties

Wang Yumin

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: Having considered the transverse distribution of the modes and the transverse inhomogeneity of gain and losses, the rate-equations of the oscillating modes are given.

The influence of the inopmogeneity on the oscillating condition, properties of the saturated gain, pull-in frequency and oscillating power are also discussed.

一、引　　言

在描述激光振荡的方程中一般都不考虑激光的横向强度分布，并认为介质增益及损失沿横向也是均匀的。但实际上激光光束、增益或损失都不是均匀的，特别是气动激光器，增益沿气流方向极不均匀。这时采用怎样的稳定振荡条件，就不是显而易见的了。

我们从激光半经典理论出发，将光场按本征模展开，将耦合损失处理为边界问题，得到了不同模式激光振荡的速率方程。其结果与通常均匀光束、均匀介质的方程之差别仅仅是在通常方程中出现的增益或损失要用矩阵元代替。

二、激光振荡方程

1. 场方程

考虑图1的谐振腔，腔内有横向不均匀的增益介质。腔内的电场振幅满足 Maxwell 方程(MKS 单位制)[1]：

收稿日期：1984年3月14日。

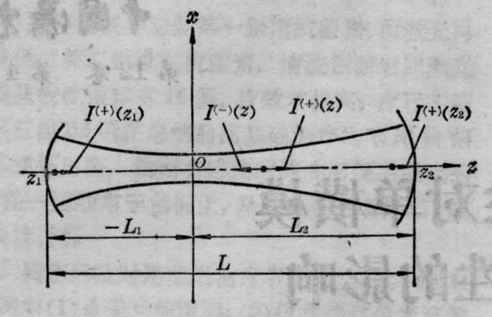


图1　谐振腔的坐标

$$\left(-\nabla^2+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\mu_0\sigma_0\frac{\partial}{\partial t}\right)E(\boldsymbol{x},\ t)$$
$$=-\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}P(\boldsymbol{x},\ t) \tag{1}$$

$E(\boldsymbol{x},\ t)$为电场振幅，$P(\boldsymbol{x},\ t)$为介质的极化强度，两者均是空间坐标$\boldsymbol{x}$及时间t的函数。σ_0为描述光在介质中损耗而引进的电导率。μ_0、ε_0分别是真空磁导率及极化率，

$$c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

为真空中光速，当$\sigma_0=P=0$时上式变为真空中自由传播的电磁波方程。若真空中自由传播的电磁波为$e^{-i\nu t}\cdot U(\boldsymbol{x})$形式，则$U(\boldsymbol{x})$满足亥姆亥茨方程：

$$(-\nabla^2+k^2)U(\boldsymbol{x})=0 \tag{2}$$

k为光的传播常数(波数)。在近轴近似下其解为球面波或厄米-高斯形式的波[2]。向正负方向传播的厄米-高斯模分别为(为简单起见，这里先只考虑x，z两维情况)
$u_n(x,z)\cdot e^{-i[\nu_n t-\theta'_n(z)+\varphi_n^{(+)}]}$及$u_n(x,z)\cdot e^{-i[\nu_n t+\theta'_n(z)+\varphi_n^{(-)}]}$。或简单记为：

$$u_n(x,\ z)\cdot e^{-i[\nu_n t\mp\theta'_n(z)+\varphi_n^{(\pm)}]}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
u_n(x,\ z)&=H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)}\right)\cdot e^{-\frac{x^2}{\omega^2(z)}}\\
\theta'_n(z)&=k_n\left(z+\frac{x^2}{2R(z)}\right)+\phi_n(z)\\
\phi_n(z)&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\frac{k\omega_0^2}{2z}\\
\omega^2(z)&=\omega_0^2\left[1+\left(\frac{2z}{k\omega_0^2}\right)^2\right]\\
R(z)&=z\left[1+\left(\frac{k\omega_0^2}{2z}\right)^2\right]
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

H_n为n次厄米多项式，u_n为厄米-高斯函数；ν_n为自由传播的第n个横模的角频率；$\varphi_n^{(\pm)}$分别是向正负方向传播的光相位；k_n是波数，忽略不同横模由于波数微小差异引起$\phi_n(z)$、$\omega^2(z)$及$R(z)$的变化，取$k_n=k$。在z处波阵面的曲率半径为$R(z)$，高斯光束半径为$\omega(z)$，在$z=0$处(见图1)光束半径最小，为ω_0。(3)式是近轴近似下自由传播的光场。两不同的横模n及m，$u_n(x,\ z)$及$u_m(x,\ z)$对固定的z是正交的，即

$$\int_X u_n(x,\ z)\cdot u_m(x,\ z)\cdot dx=\delta_{nm}。$$

在谐振腔中，由于介质及边界的作用，光场分布将变成自由传播模的叠加。对非稳定腔，腔中的光场应写成两列球面波的叠加；对稳定腔，腔中的场应按厄米-高斯模展开。本文只考虑稳定腔情况，谐振腔中场可看作一系列沿正向及负向传播的不同横向模的叠加：

$$\begin{aligned}
E(x,\ z,\ t)=\frac{1}{2}\sum_n\{&E_n^{(+)}(z,\ t)\\
&\times u_n(x,\ z)\cdot e^{-i[\nu_n t+\varphi_n^{(+)}-\theta'_n(z)]}\\
&+E_n^{(-)}(z,\ t)\\
&\times u_n(x,\ z)e^{-i[\nu_n t+\varphi_n^{(-)}+\theta'_n(z)]}\\
&+C\cdot C\}
\end{aligned} \tag{4}$$

展开式的系数$E_n^{(+)}$及$E_n^{(-)}$表示场振幅；$C\cdot C$代表前两项的复共轭，$E_n^{(\pm)}$及$\varphi_n^{(\pm)}$皆为实数。

同样地将极化强度$P(x,\ z,\ t)$也按厄米-高斯模展开：

$$\begin{aligned}
P(x,\ z,\ t)=\frac{1}{2}\sum_n\{&P_n^{(+)}(z,\ t)\\
&\times u_n(x,\ z)\cdot e^{-i[\nu_n t+\varphi_n^{(+)}-\theta'_n(z)]}\\
&+P_n^{(-)}(z,\ t)\cdot u_n(x,\ z)\\
&\times e^{-i[\nu_n t+\varphi_n^{(-)}+\theta'_n(z)]}+C\cdot C\}
\end{aligned} \tag{5}$$

但其中$P_n^{(\pm)}$不再是实数。

将(4)及(5)式代入(1)式，采用如下近似[1]：$E_n^{(\pm)}(z,\ t)$、$\phi_n(z)$、$R(z)$为z的缓变函数，$E^{(\pm)}$又为t的缓变函数(即$\left|\frac{\partial E_n^{(\pm)}}{\partial z}\right|\ll$

$|kE_n^{(\pm)}|$, $\left|\frac{\partial E_n^{(\pm)}}{\partial t}\right| \ll |\nu_n E_n^{(\pm)}|$ 等)；再利用 $u_n(x)$ 的正交性得：

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}\pm c\frac{\partial}{\partial z}\right)E_n^{(\pm)}+\frac{1}{2}\sum_m \alpha_{nm}E_m^{(\pm)}\\&\quad=-\frac{\nu}{2\varepsilon_0}\cdot ImP_n^{(\pm)}(z,t)\\&\left(\frac{\partial}{\partial t}\pm c\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi_n^{(\pm)}\\&\quad=-\frac{\nu}{2\varepsilon_0}E_n^{(\pm)-1}\mathrm{Re}\,P_n^{(\pm)}(z,t)\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

式中

$$\alpha_{nm}=\int_X \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}u_n(x,z)\cdot u_m(x,z)\times dx\Big/\int_X |u_n(x,z)|^2\cdot dx$$

$$\equiv\left\langle n\left|\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right|m\right\rangle\Big/\langle n|m\rangle \tag{6'}$$

式中 $I_mP_n^{(\pm)}$ 及 $\mathrm{Re}\,P_n^{(\pm)}$ 分别代表取 $P_n^{(\pm)}$ 的虚部及实部。

2. 密度矩阵方程

设介质为两能级系统，a 及 b 分别代表上、下态。密度矩阵元 ρ_{ab} 及 ρ_{aa}、ρ_{bb} 满足下述方程[1]：

$$\frac{d}{dt}\rho_{ab}(x,z,t,v)=-(i\omega+\gamma)\rho_{ab}+\frac{i}{\hbar}V_{ab}(x,z,t)\cdot D(x,z,t,v) \tag{7.1}$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{aa}(x,z,t,v)=\lambda_a(x,z,t,v)-\gamma_a\rho_{aa}-\left[\frac{i}{\hbar}V_{ab}\cdot\rho_{ba}+C\cdot C\right] \tag{7.2}$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{bb}(x,z,t,v)=\lambda_b(x,z,t,v)-\gamma_b\cdot\rho_{bb}+\left[\frac{i}{\hbar}V_{ab}\cdot\rho_{ba}+C\cdot C\right] \tag{7.3}$$

其中 $\frac{d}{dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial z}$，$v$ 是分子热运动速度，V_{ab} 为相互作用矩阵元，

$$\begin{aligned}V_{ab}(x,z,t)=&-\frac{p}{2}\sum_n\{E_n^{(+)}(z,t)\\&\times u_n(x,z)\cdot e^{-i[\nu_n t+\varphi_n^{(+)}-k_n\left(z+\frac{x^2}{2R(z)}\right)-\phi_n(z)]}\\&+E_n^{(-)}(z,t)\cdot u_n(x,z)\\&\times e^{-i[\nu_n t+\varphi_n^{(-)}+k_n\left(z+\frac{x^2}{2R}\right)+\phi_n(z)]}+C\cdot C\}\end{aligned}\tag{8}$$

$\hbar\omega$ 为两能级间能量差；r、r_a、r_b 分别为相位、上下能级弛豫速率；p 为电偶极矩阵元；$D=\rho_{aa}-\rho_{bb}$ 为上下能级粒子密度差；λ_a、λ_b 为上下能级泵浦率。

为解方程(7.1)，按照文献[1]的方法令：

$$z'=z-\nu_n(t-t') \tag{9.1}$$

则

$$\begin{aligned}\rho_{ab}(x,z,t,v)=&\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}dt'\\&\times\exp[-(i\omega+8)(t-t')]V_{ab}(z',t')\\&\times D(x,z',t',v)\end{aligned}\tag{9.2}$$

做速率方程近似(即设 $E_n^{(\pm)}$、$\varphi_n^{(\pm)}$、D 在相位弛豫时间 r^{-1} 内变化很小)和“转动波近似”，(8)式代入(9.2)式得：

$$\begin{aligned}\rho_{ab}(x,z,t,v)=&-\frac{ip}{2\hbar}\sum_n\\&\times\Big\{u_n(x,z)\cdot D(x,z,t,v)\\&\times\Big[\frac{E_n^{(+)}(z,t)\,e^{-i\left[\nu_n t-k_n\left(z+\frac{x^2}{2R}\right)+\varphi_n^{(+)}-\phi_n(z)\right]}}{r+i(\omega-\nu_n+k_nv)}\\&+\frac{E_n^{(-)}\cdot e^{-i\left[\nu_n t+k_n\left(z+\frac{x^2}{2R}\right)+\varphi_n^{(-)}+\phi_n(z)\right]}}{r+i(\omega-\nu_n-k_nv)}\Big]\Big\}\end{aligned}\tag{9.3}$$

极化强度用密度矩阵元表示为：

$$P(x,z,t)=p\int_{-\infty}^{\infty}(\rho_{ab}(x,z,t,v)+\rho_{ba})dv$$

将(5)式及(9.3)式代入上式，再利用正交性得到：

$$\begin{aligned}P_n^{(\pm)}(z,t)=&-\frac{ip^2}{\hbar}\sum_m E_m^{(\pm)}(z,t)\\&\times e^{i(\psi_{nm}^{(\pm)}\mp\theta_{nm})}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D_{nm}(z,t,v)dv}{\gamma+i(\omega-\nu_m\pm k_mv)}\end{aligned}\tag{10}$$

式中 $\psi_{nm}^{(\pm)}=(\nu_nt+\varphi_n^{(\pm)})-(\nu_mt+\varphi_m^{(\pm)})$

$\theta_{nm}=(k_nz+\phi_n)-(k_mz+\phi_m)$

D_{nm} 为反转粒子密度的矩阵元，

$$\begin{aligned}D_{nm}(z,t,v)=&\int_X D(x,z,t,v)\cdot u_n(x,z)\\&\times u_m(x,z)\cdot e^{i(k_n-k_m)x^2/2R}\cdot dx\Big/\int_X u_n^2\cdot dx\end{aligned}\tag{11}$$

将(10)式代入(6)式，忽略模间相互作用后得：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\pm c\frac{\partial}{\partial z}\right)E_n^{(+)}+\frac{1}{2}\alpha_{nn}E_n^{(\pm)}$$
$$=\frac{\sigma c}{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}D_{nn}(z,\ t,\ v)$$
$$\times\mathscr{L}(\omega-\nu_n\pm k_nv)dv\cdot E_n^{(\pm)}\quad(12.1)$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\pm c\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi_n^{(\pm)}$$
$$=\frac{c\sigma}{2}\int_{-\infty}^{\infty}D_{nn}(z,\ t,\ v)$$
$$\times\mathscr{L}(\omega-\nu_n\pm k_nv)\frac{\omega-\nu_n\pm k_nv}{\gamma}dv。$$
$$(12.2)$$

其中 $\sigma=\frac{kp^2}{\varepsilon_0\hbar\gamma}$ 为感应跃迁截面。

$\mathscr{L}(y_0)\equiv\frac{1}{1+(y_0/r)^2}$ 为 Lorentz 因子。

(12)式用光强表示为：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\pm c\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot I_n^{(\pm)}+\alpha_{nn}\cdot I_n^{(\pm)}$$
$$=c\int_{-\infty}^{\infty}\sigma D_{nn}(z,\ t,\ v)$$
$$\times\mathscr{L}(\omega-\nu_n\pm k_nv)dv\cdot I_n^{(\pm)}\quad(13.1)$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\pm c\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi_n^{(\pm)}=c\int_{-\infty}^{\infty}\sigma\cdot D_{nn}(z,\ t,\ v)$$
$$\times\mathscr{L}(\omega-\nu_n\pm k_nv)\frac{\omega-\nu_n\pm k_nv}{r}dv$$
$$(13.2)$$

其中 $I_n^{(\pm)}=\frac{c}{2}\varepsilon_0E_n^{(\pm)2}$ 分别为沿正负方向传播的光强。将(9.3)式、(8)式代入(7.2)和(7.3)式并假设原子运动平滑了 $|E_n^{(+)}+E_n^{(-)}|^2$ 中的烧孔效应[3]，则 D 所满足的方程为：

$$\frac{d}{dt}\rho_{aa}(x,\ z,\ t,\ v)=\lambda_aW(v)$$
$$-\gamma_a\rho_{aa}-\sigma D(x,\ z,\ t,\ v)$$
$$\times\sum_n\frac{1}{\hbar\nu}u_n^2(x,\ z)$$
$$\times[\mathscr{L}(\omega-\nu_n+k_nv)I_n^{(+)}$$
$$+\mathscr{L}(\omega-\nu_n-k_nv)\cdot I_n^{(-)}]\quad(14.1)$$
$$\frac{d}{dt}\rho_{bb}(x,\ z,\ t,\ v)=\lambda_bW(v)-\gamma_b\rho_{bb}$$
$$+\sigma D\sum_n\frac{1}{\hbar\nu}u_n^2(x,\ z)$$
$$\times[\mathscr{L}(\omega-\nu_n+k_nv)\cdot I_n^{(+)}$$
$$+\mathscr{L}(\omega-\nu_n-k_nv)I_n^{(-)}]\quad(14.2)$$

其中 $\quad W(v)=\frac{1}{u\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\left(\frac{v}{u}\right)^2}$

为归一化的 Maxwell 速度分布，u 为最可几速率。

3. 边界损失

在输出耦合较大时，腔内损失不能用分布损失来代替，必须解边值问题。腔的坐标如图1。腔面是曲率半径分别为 $R(1)$ 及 $R(2)$ 的球面。球面上坐标满足关系：

$$z_i+\frac{x^2}{2R(i)}=L_i\quad i=1,\ 2。$$

设镜面的振幅反射率为 ρ_1 及 ρ_2，边界条件可写为：

$$\sum_m E_m^{(+)}(z_1,t)\cdot u_m(x,z_1)\cdot e^{-i[\nu_mt+\varphi_m^{(+)}-k_mL_1-\phi_m(z_1)]}$$
$$=-\rho_1\sum_m E_m^{(-)}(z_1,t)\cdot u_m(x,\ z_1)$$
$$\times e^{-i[\nu_mt+\varphi_m^{(-)}+k_mL_1+\phi_m(z_1)]},$$
$$\sum_m E_m^{(-)}(z_2,t)\cdot u_m(x,z_2)\times e^{-i[\nu_mt+\varphi_m^{(-)}+k_mL_2+\phi_m(z_2)]}$$
$$=-\rho_2\sum_m E_m^{(+)}(z_2,\ t)\cdot u_m(x,\ z_2)$$
$$\times e^{-i[\nu_mt+\varphi_m^{(+)}-k_mL_2-\phi_m(z_2)]}。\quad(15.1)$$

利用 u_m 的正交性上式可写为：

$$E_n^{(+)}(z_1,\ t)=-\sum_m E_m^{(-)}(z_1,\ t)\cdot(\rho_1)_{nm}$$
$$\times e^{i[(\nu_n-\nu_m)t+\varphi_n^{(+)}-\varphi_m^{(-)}]-i[(k_n+k_m)L_1+\phi_n(z_1)+\phi_m(z_1)]}$$
$$E_n^{(-)}(z_2,\ t)=-\sum_m E_m^{(+)}(z_2,\ t)\cdot(\rho_2)_{nm}$$
$$\times e^{-i[(\nu_n-\nu_m)t+\varphi_n^{(+)}-\varphi_m^{(-)}]+i[(k_n+k_m)L_2+\phi_n(z_2)+\phi_m(z_2)]}$$
$$(15.2)$$

式中 $\quad(\rho_i)_{nm}=\langle n|\rho_i|m\rangle/\langle n|n\rangle$。

显然当 ρ_i=常数，反射镜半径 $a_i\gg\omega_i$ 时 $(\rho_i)_{nm}=\delta_{nm}$，这就是说均匀反射率不会引起模式畸变。反之当反射镜的反射率不均匀或孔径不够大时 $(\rho_i)_{mn}\neq0$，就会引起模式混合使本征模发生畸变。对处在自由运转的连续激光器，相位变化是随机的，从时间平均效果看，可忽略(15.2)式中的非对角元项，由此可近似为：

$$E_n^{(+)}(z_1,\ t)=-E_n^{(-)}(z_1,\ t)\cdot(\rho_1)_{nn}$$
$$\times e^{-2i[k_nL_1+\phi_n(L_1)]+i[\varphi_n^{(+)}-\varphi_n^{(-)}]}$$
$$E_n^{(-)}(z_2,\ t)=-E_n^{(+)}(z_2,\ t)\cdot(\rho_2)_{nn}$$
$$\times e^{2i[k_nL_2+\phi_n(L_2)]+i[\varphi_n^{(+)}-\varphi_n^{(-)}]} \qquad (15.3)$$

以上(12.1)→(15.3)式给出了第 n 个模振荡的速率方程。它与通常的速率方程的区别只是将方程中出现的粒子反转密度及损失用相应的矩阵元来代替。

三、激光振荡条件

在稳态情况，由(14.1)和(14.2)式得：

$$D(x,\ z,\ v)=\frac{N(x,\ z)W(v)}{\left\{\begin{array}{l}1+I_s^{-1}\sum\limits_m[I_m^{(+)}\mathscr{L}(\omega-\nu_m+k_mv)\\ +I_m^{(-)}\mathscr{L}(\omega-\nu_m-k_mv)]\cdot u_m^2(x,\ z)\end{array}\right\}} \qquad (16)$$

其中 $I_s=\dfrac{\hbar\nu}{kp^2}\dfrac{\varepsilon_0\hbar\gamma\gamma_a\gamma_b}{\gamma_a+\gamma_b}=\dfrac{\hbar\nu}{\sigma}\dfrac{\gamma_a\gamma_b}{\gamma_a+\gamma_b}$ 为饱和参量。$N=\lambda_a/\gamma_a-\lambda_b/\gamma_b$ 是光强为零时反转密度。由(13.1)式给出第 n 个模向正负方向传播的增益系数为：

$$g_{nn}^{(\pm)}(z)=\pm\frac{dI^{(\pm)}}{I^{(\pm)}dz}$$
$$=\langle n|g^{(\pm)}(x,\ z)|n\rangle/\langle n|n\rangle \qquad (17.1)$$

式中

$$g_{(x,z)}^{(\pm)}=\int_{-\infty}^{\infty}g_{(x,z,v)}^{(\pm)}\cdot dv \qquad (17.2)$$

又

$$g_{(x,z,v)}^{(\pm)}=\frac{\sigma N(x,\ z)\cdot W(v)\cdot\mathscr{L}(\omega-\nu_n\pm k_nv)}{\left\{\begin{array}{l}1+I_s^{-1}\sum\limits_m[I_m^{(+)}\mathscr{L}(\omega-\nu_m+k_mv)\\ +I_m^{(-)}\mathscr{L}(\omega-\nu_m-k_mv)]\cdot u_m^2(x,\ z)\end{array}\right\}} \qquad (17.3)$$

增益系数与粒子反转关系为 $g=\sigma N$, $g_{(x,z,v)}^{(\pm)}dv$ 是在$(x,\ z)$处，由速度为 $v\to v+dv$ 的原子对频率为 ν_n 向正负方向传播的光增益的贡献。$g_{(x,z)}^{(\pm)}$ 则为频率是 ν_n 的光沿正负向传播在$(x,\ z)$处的增益。

由(13.2)式给出第 n 个横模沿正负方向传播时相位变化：

$$\frac{d\varphi(z)^{(\pm)}}{dz}=\frac{1}{2}\left\langle n\left|\int_{-\infty}^{\infty}g_{(x,z,v)}^{(\pm)}\frac{\omega-\nu_n\pm k_nv}{\gamma}\right.\right.$$
$$\left.\times dv|n\right\rangle\Big/\langle n|n\rangle \qquad (18)$$

从(17.1)和(18)式可见它们与通常增益、相位变化的区别仅仅是将右端的量变为相应的矩阵元。

令 $\dfrac{\partial}{\partial t}$ 项为 0，在(12.1)式中对 z 积分(从 $z_1\to z_2$)，将得到的形式解代入(15.3)式，得到：

$$(\rho_1)_{nn}\cdot(\rho_2)_{nn}\cdot\exp\left\{\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{2}[g_{nn}^{(+)}(z)+g_{nn}^{(-)}(z)]dz-\alpha_{nn}\right\}$$
$$\times\exp\left\{2i\left[k_nL+\left(n+\frac{1}{2}\right)\times\left(\tan^{-1}\frac{k\omega_0^2}{2L_2}-\tan^{-1}\frac{k\omega_0^2}{2L_1}\right)\right.\right.$$
$$-\int_{z_1}^{z_2}dz\int_{-\infty}^{\infty}\left[g_{nn}^{(+)}(z,\ v)\frac{\omega-\nu_n+k_nv}{\gamma}\right.$$
$$\left.\left.\left.+g_{nn}^{(-)}(z,\ v)\frac{\omega-\nu_n-k_nv}{\gamma}\right]dv\right\}=1 \qquad (19)$$

由此得到两个振荡条件：令(19)式相位部分的相位等于 $2\pi(q+1)$(q 是正整数)，再利用 L_1 及 L_2 的表达式[2]：

$$-L_1=\frac{L(R_2-L)}{R_1+R_2-L},$$
$$L_2=\frac{L(R_2-L)}{R_1+R_2-L},$$
$$\omega_0^2=\left(\frac{2}{k}\right)^2\frac{\left\{\begin{array}{c}L(R_1-L)(R_2-L)\\ \times(R_1+R_2-L)\end{array}\right\}}{(R_1+R_2-2L)^2}$$

由此得到 n 模的振荡频率：

$$\nu_{nq}=\frac{\pi C}{L}\left\{(q+1)+\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\cos^{-1}\sqrt{g_1g_2}}{\pi}\right\}$$
$$+\frac{C}{2L}\int_{z_1}^{z_2}(F_{nn}^{(+)}+F_{nn}^{(-)})dz \qquad (20)$$

式中

$$F_{nn}^{(\pm)}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} g_{nn}^{(\pm)}(z,\ v)\ \frac{\omega-\nu_n\pm k_n v}{\gamma}\,dv$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\langle n|g_{(x,z,v)}^{(\pm)}|n\rangle}{\langle n|n\rangle}\times\frac{\omega-\nu_n\pm k_n v}{\gamma}\,dv \qquad (20')$$

可见频率牵引项是与模式分布有关的。

由(19)式的绝对值部分相等，得稳定激光振荡的条件：

$$(\rho_1)_{nn}\cdot(\rho_2)_{nn}\cdot\exp\left\{\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{2}[g_{nn}^{(+)}(z)+g_{nn}^{(-)}(z)]\,dz-\alpha_{nn}\right\}=1 \qquad (21)$$

该式与由(17.1)～(17.3)、(15.3)式的两边取绝对值(或将振幅 $E_n^{(\pm)}$ 换为强度形式)的表达式所组成的方程等价，即(21)式也可写为下述方程组形式：

$$\pm\frac{dI_n^{(\pm)}(z)}{I_n^{(\pm)}(z)\cdot dz}=\frac{\left\langle n\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_0(x,\ z)W(v)\mathscr{L}(\omega-\nu_n\pm k_n v)\cdot dv}{1+I_s^{-1}\sum_m[I_m^{(+)}(z)\mathscr{L}(\omega-\nu_m+k_m v)+I_m^{(-)}(z)\mathscr{L}(\omega-\nu_m-k_n v)]u_m^2(x,z)}\right|n\right\rangle}{\langle n|n\rangle}$$

$$-\langle n|\alpha|n\rangle/\langle n|n\rangle。 \qquad (22.1)$$

$$\left.\begin{aligned}I_n^{(+)}(z_1)&=|(\rho_1)_{nn}|^2\cdot I_n^{(-)}(z_1)\\ I_n^{(-)}(z_2)&=|(\rho_2)_{nn}|^2\cdot I_n^{(+)}(z_2)\end{aligned}\right\} \qquad (22.2)$$

以上结果是在$(x,\ z)$两维情况下得到的。很容易证明三维情况只要将本征函数 $u_n(x,\ z)$ 换成 $u_{nm}(x,\ y,\ z)$，即量子态 $|n\rangle\to|n,\ m\rangle$，对坐标 x 的积分换成对 $x,\ y$ 的积分即可。

四、几点讨论

当考虑到增益、损失及场分布的不均匀后，激光振荡的许多特性都应有相应的改变，为了简单，下面我们只讨论对频率牵引、增益饱和、振荡功率等的影响。

1. 频率牵引

将(17.3)式代入(20′)式，对 v 积分，假设为完全均匀展宽情况，即设 Doppler 线宽 $ku\ll\gamma$，则积分就简单地近似为：

$$F_{nn}^{(\pm)}(z)=F_{nn}(z)$$

$$=\left[\frac{\sigma N(x,\ z)\mathscr{L}(\omega-\nu_n)}{1+I\mathscr{L}(\omega-\nu_n)u_n^2(x,\ z)/I_s}\ \frac{\omega-\nu_n}{\gamma}\right]_{nn}$$

对于三维情况上式变为：

$$F_{nm,nm}(z)=\left[\frac{\sigma N(x,\ y,\ z)\mathscr{L}(\omega-\nu_n)}{1+I\mathscr{L}(\omega-\nu_n)u_{nm}^2(x,y,z)/I_s}\times\frac{\omega-\nu_n}{\gamma}\right]_{nm,\,nm}。$$

振荡频率为：

$$\nu_{nmq}=\frac{c\pi}{L}\left\{(q+1)+(n+m+1)\frac{\cos^{-1}\sqrt{g_1g_2}}{\pi}\right\}$$

$$+\frac{c}{2L}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\left\{\begin{aligned}&g_0\,\frac{\omega-\nu_{nm}}{\gamma}u_{nm}^2(x,\ y,\ z)\\&\times dxdydz\end{aligned}\right\}}{\left\{\begin{aligned}&1+\left(\frac{\omega-\nu_{nm}}{\gamma}\right)^2\\&+Iu_{nm}^2(x,\ y,\ z)/I_s\end{aligned}\right\}} \qquad (23.1)$$

对 TEM_{00} 模，$u_{00}=e^{-2\gamma^2/\omega_0^2}$，设 g_0 为常数，(23.1)式积分(用极坐标容易计算)：

$$\Delta\nu_{00}=\nu_{nmq}-\frac{c\pi}{L}\times\left\{(q+1)+(n+m+1)\frac{\cos^{-1}\sqrt{g_1g_2}}{\pi}\right\}$$

$$=\frac{c}{2}\,g_0\,\frac{\omega-\nu_{00}}{\gamma}\times\frac{\ln[1+I\mathscr{L}(\omega-\nu_{00})/I_s]}{I/I_s} \qquad (23.2)$$

如果按通常均匀光强分布计算，频率牵引为：

$$\Delta\nu_{均}=\frac{c}{2}\,g_0\,\frac{\omega-\nu_{00}}{\gamma}\,\frac{\mathscr{L}(\omega-\nu_{00})}{1+I/I_s\cdot\mathscr{L}(\omega-\nu_{00})} \qquad (23.3)$$

其中 ω 为 Lorentz 线型的中心角频率。图 2 画出两种场分布的频率牵引量之比与 $I/I_s\cdot\mathscr{L}(\omega-\nu)$ 的关系。从图看到按均匀场分布计算的频率牵引与 TEM_{00} 模振荡时频率牵

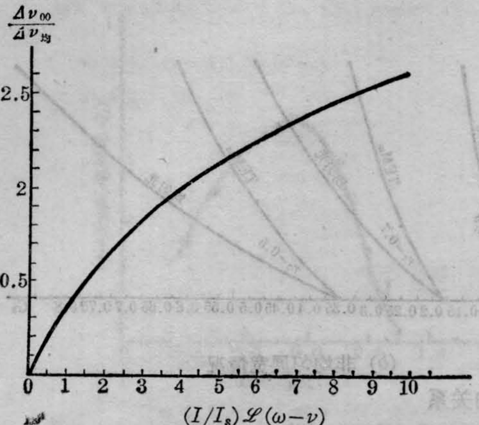


图 2 $\Delta\nu_{00}/\Delta\nu_{均}$(TEM$_{00}$ 模与等强度分布的频率牵引量之比)与 $I/I_s\cdot\mathscr{L}(\omega-\nu)$ 的关系

引的差别还是很大的。

2. 增益饱和特性

在讨论增益饱和时可设 $\omega=\nu_{nm}$，仍以 TEM$_{00}$ 模为例。与(23.1)～(23.2)式类似，完全均匀展宽时：

$$g_{00}(z)=g_0\ln(1+I_{00}/I_s)/(I_{00}/I_s) \tag{24.1}$$

完全非均匀展宽时：

$$g_{00}(z)=2g_0[(1+I_{00}/I_s)^{\frac{1}{2}}-1]/(I_{00}/I_s) \tag{25.1}$$

而均匀强度分布时，对均匀展宽及非均匀展宽的饱和增益分别是：

$$g_{均}(z)=\frac{g_0}{1+I/I_s} \tag{24.2}$$

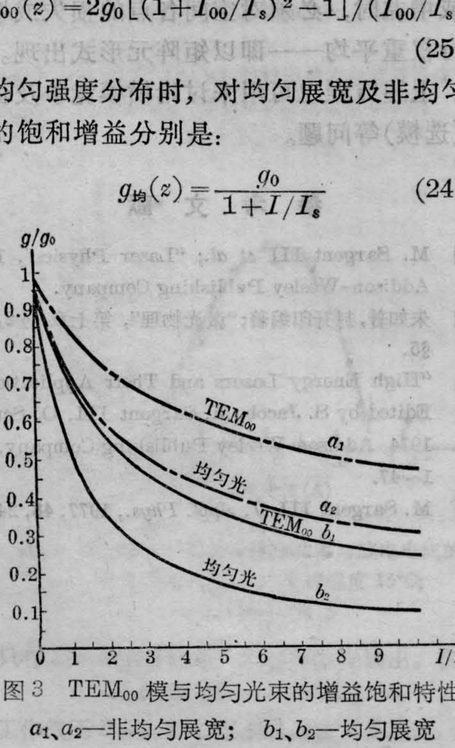


图 3 TEM$_{00}$ 模与均匀光束的增益饱和特性

a_1、a_2—非均匀展宽；b_1、b_2—均匀展宽

$$g_{均}(z)=g_0/(1+I_s)^{\frac{1}{2}} \tag{25.2}$$

图 3 画出饱和增益与腔内光强的关系。可以看到，光强的高斯型分布降低了增益的饱和效应，从(24.1)和(25.1)可得到：高斯光强分布使饱和强度对均匀展宽增加 2.51 倍，对非均匀展宽则增加 2.34 倍。这与 Sargent III 在讨论高斯光束对饱和光谱学时所指出的结果是一致的[4]。

3. 振荡功率

为了说明横向不均匀对功率的影响，考虑一最简单的情况：设 $\alpha=0$，反射率 $r_1=|\rho_1|^2, r_2=|\rho_2|^2$ 皆为常数，$g_0(x,y,z)=g_0(z)$，在均匀展宽时，对 TEM$_{00}$ 模解方程(22.1)式和(22.2)式得：

$$\frac{I^{(+)}_{(2)}}{I_s}\int_{\sqrt{r_1r_2}}^{1}\frac{(\beta+r_2/\beta)\,d\beta}{\left\{\begin{array}{l}\beta\ln[1+(I^{(+)}_{(2)}/I_s)\\ \times(\beta+r_2/\beta)\cdot\mathscr{L}(\omega-\nu_{00})]\end{array}\right\}}=\int_0^L g_0(z)\,dz=G_0 \tag{26.1}$$

其中 $\beta\equiv I^{(+)}_{(z)}/I_s$，$I^{(+)}_{(2)}$ 为腔内 $z=z_2$ 处向右传播的光强度，而设光束为均匀强度分布时：

$$\frac{I^{(+)}_{(2)}}{I_s}=\frac{\sqrt{r_1}\left(G_0-\ln\dfrac{1}{\sqrt{r_1r_2}}\mathscr{L}(\omega-\nu_{00})^{-1}\right)}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})(1-\sqrt{r_1r_2})} \tag{26.2}$$

对完全非均匀展宽时：

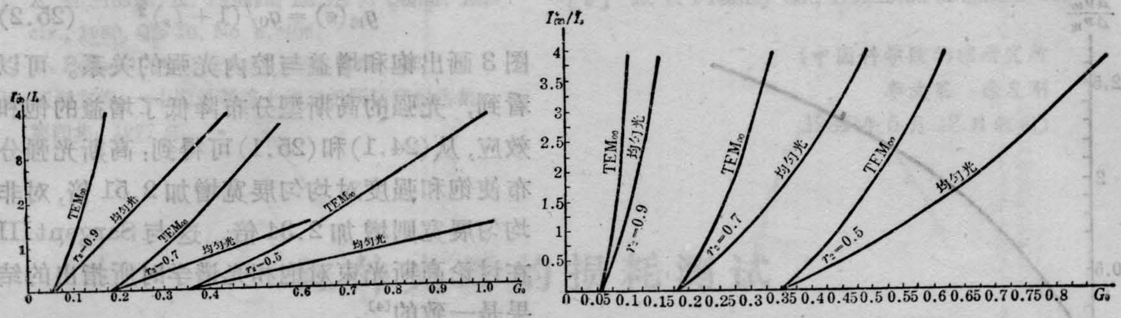
若 $\omega=\nu_{00}$，则得：

$$\frac{I^{(+)}_{(2)}}{I_s}\int_{\sqrt{r_1r_2}}^{1}\frac{(\beta+r_2/\beta)\,d\beta}{\beta\{[1+I^{(+)}_{(2)}(\beta+r_2/\beta)/I_s]^{\frac{1}{2}}-1\}}=2G_0 \tag{27.1}$$

而通常光束均匀分布时为：

$$\int_{\sqrt{r_1r_2}}^{1}[1+I^{(+)}_{(2)}(\beta+r_2/\beta)/I_s]^{\frac{1}{2}}\cdot d\beta/\beta=G_0 \tag{27.2}$$

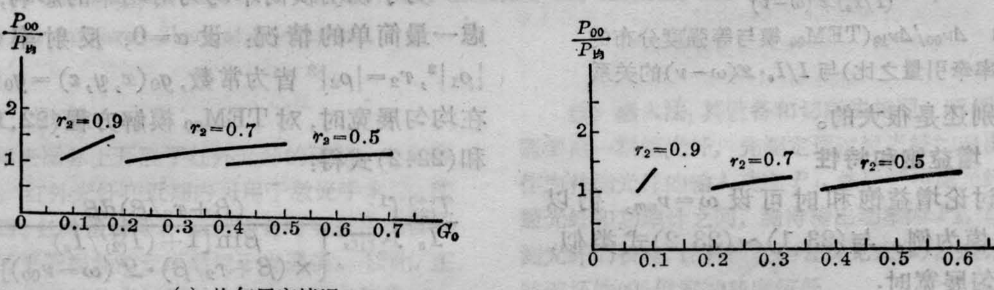
图 4(a)和(b)分别画出在均匀展宽和非均匀展宽时，腔内 $z=z_2$ 处，向右传播的光强相对值与单程增益 G_0 的关系。从图可见二者差别很大，这是因有效饱和参量变化引起的。如果将光强换成功率，取均匀强度分布的光束面积为 $\pi\omega_0^2$，则：



(a) 均匀展宽情况

(b) 非均匀展宽情况

图4 $I_{(2)}^{(+)}/I_s$ 与 G_0 的关系



(a) 均匀展宽情况

(b) 非均匀展宽情况

图5 TEM$_{00}$ 模的振荡功率与面积等于 $\pi\omega_0^2$ 的均匀强度分布的光束的振荡功率之比和总增益的关系

$$\frac{P_{00}}{P_{均}}=\frac{I_{00(2)}^{(+)}\int_0^\infty e^{-2\left(\frac{r}{\omega_0}\right)^2}\cdot 2\pi r\,dr}{I_{均(2)}^{(+)}\cdot\pi\omega_0^2}=\frac{I_{00(2)}^{(+)}}{2I_{均(2)}^{(+)}}。$$

图5(a)和(b)分别给出不同情况下，TEM$_{00}$ 模与按均匀分布算得的振荡功率之比和总增益的关系。由图可见：总增益越高，在计算振荡功率时用均匀光强分布代替高斯强度分布的近似性也就越差。

最后附带说明的是：在速率方程中增益和损失用矩阵元来代替在直观上也是容易理解的。因为根据测不准原理，对一确定模式(量子态)的一个光子必然占据一定的空间，在空间各点以一定的几率出现(表现为一定的光强分布)，因此在讨论该光子传播中的损失或增益时，必须对空间各点的损失或增益进行权重平均——即以矩阵元形式出现。

上述方程也可用来讨论横模竞争及优势模(选模)等问题。

参 考 文 献

[1] M. Sargent III *et al.*; "Laser Physics", 1974, Addison-Wesley Publishing Company.

[2] 朱如普，封开印编著；"激光物理"，第七章，§2，§3，§5.

[3] "High Energy Lasers and Their Applications", Edited by S. Jacob, M. Sargent III, O. Scully, 1974, Addison-Wesley Publishing Company, pp. 1～47.

[4] M. Sargent III; *J. Appl. Phys.*, 1977, **48**, 243.