

# 用位相光栅进行图象相减

田志伟 施永强

(杭州大学物理系)

**提要:** 置一位相光栅于相干光学处理系统频谱平面, 利用其零级与一级衍射光的相干迭加实现图象相减。通过控制光栅的位相调制量使零级与一级衍射光强相等, 调节光栅位置获得 $\pi$ 位相差。选择适当的光栅, 还可同时得到图象的相加和相减信号。

## Image subtraction by phase grating

Tian Zhiwei, Shi Yongqiang

(Department of Physics, Hangzhou University)

**Abstract:** With a phase grating located at Fourier frequency plane, optical image subtraction is obtained as a result of the coherent superposition of the zeroth and the first order of the diffracted light. Compared with the amplitude grating method, it makes more use of the processing lenses' aperture. If a suitable phase grating is adopted, image subtraction and addition can be simultaneously realized. The experimental result is given.

### 一、引言

图象相减技术能为人们提供图象间的差异信息, 有着广泛的应用。用光学方法进行图象相减, 是光学信息处理的重要领域。1975年 J. F. Ebersole 对这一领域中早期的各种光学图象相减的方法进行了较全面的评价和总结<sup>[1]</sup>。

S. H. Lee 等最早提出置一振幅光栅于傅里叶频谱平面实现图象相减或相加的方法<sup>[2]</sup>。该方法操作简便, 实时性强, 近来又有充实和发展<sup>[3~5]</sup>。本文提出一种用位相光栅

进行图象相减的方法, 可克服用振幅光栅不能充分利用透镜孔径的缺点, 提高了光能利用率。选用合适的光栅还可同时获得图象的相加和相减信号。

### 二、原理

设两张待处理透明片在  $x_0$  方向的最大宽度为  $2a$ , 振幅透射率分别为  $f(x_0, y_0)$  和  $g(x_0, y_0)$ , 对称地置于相干光学处理系统的输入平面, 中心坐标分别为  $(a, 0)$  和  $(-a, 0)$ 。系统的输入函数为:

收稿日期: 1984年5月8日。

$$u_0(x_0, y_0) = f(x_0 - a, y_0) + g(x_0 + a, y_0)$$

对上式进行傅里叶变换后得到频谱面上的频谱分布为:

$$U_0(\xi, \eta) = F(\xi, \eta) \exp(-j2\pi\xi a) + G(\xi, \eta) \exp(j2\pi\xi a)$$

其中  $F(\xi, \eta)$  和  $G(\xi, \eta)$  分别是  $f(x_0, y_0)$  和  $g(x_0, y_0)$  的傅里叶变换。

在系统的频谱面上置一正弦型位相光栅  $H(\xi, \eta)$ , 忽略其有限大小得:

$$H(\xi, \eta) = \exp[jm \sin(2\pi b\xi)] \quad (1)$$

式中  $m$  为位相调制度,  $b$  为常量。通过光栅后的频谱分布变成:

$$U_i(\xi, \eta) = U_0(\xi, \eta) H(\xi, \eta) = F(\xi, \eta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \times \exp[j2\pi\xi(nb-a)] + G(\xi, \eta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \times \exp[j2\pi\xi(nb+a)]$$

这里  $J_n(m)$  为整数阶第一类 Bessel 函数。

对  $U_i(\xi, \eta)$  进行逆傅里叶变换, 略去常数因子后得到在坐标反射的输出平面上的振幅分布:

$$u_i(x, y) = \sum_n J_n(m) [f(x+nb-a, y) + g(x+nb+a, y)] \quad (2)$$

由于变换透镜的有限孔径,  $n$  现在只能取有限值, 视透镜的孔径和光栅的空间频率而定。(2) 式表明, 输入函数  $f(x, y)$  和  $g(x, y)$  在输出平面上带权重  $J_n(m)$  以  $b$  为间隔沿  $x$  方向周期排列。当  $f(x, y)$  与  $g(x, y)$  相互叠加且各自的不同衍射级次又不重叠时, 有  $b=2a$ , 代入(2)式得:

$$u_i(x, y) = \sum_n J_n(m) \{f[x+(2n-1)a, y] + g[x+(2n+1)a, y]\} \quad (3)$$

从(3)式知, 在以  $(a, 0)$  为中心、沿  $x$  方向宽度为  $2a$  范围内的输出为:

$$u_1(x, y) = J_0(m)f(x-a, y) + J_{-1}(m)g(x-a, y)$$

$$= J_0(m)f(x-a, y) - J_1(m)g(x-a, y)$$

同样可得  $(-a, 0)$  为中心沿  $x$  方向宽  $2a$  范围内的输出:

$$u_2(x, y) = J_1(m)f(x+a, y) + J_0(m)g(x+a, y)。$$

图 1 画出了  $J_0(m)$  和  $J_1(m)$  的值随  $m$  变化的曲线。由图可见, 当  $m=m_1=1.435$  时

$$u_1(x, y) \propto f(x-a, y) - g(x-a, y)$$

$$u_2(x, y) \propto f(x+a, y) + g(x+a, y)$$

$u_1(x, y)$  为两图象相减,  $u_2(x, y)$  为两图象相加。当  $m=m_2=3.113$  时, 情况正好相反。

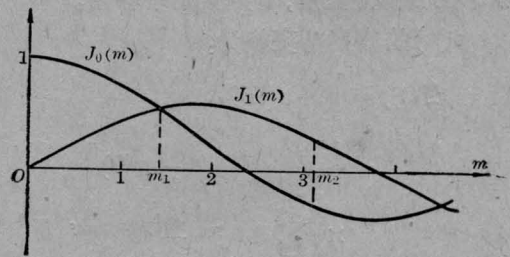


图 1  $J_0(m)$ 、 $J_1(m)$  随  $m$  变化的曲线

若位相光栅的光栅常数为  $d$ , 变换透镜焦距为  $f$ , 光源波长为  $\lambda$ , 则由(1)式得  $b = \lambda f/d$ , 即

$$d = \frac{\lambda f}{2|a|} \quad (4)$$

输入图象的中心位置一旦给定, 便可由(4)式确定光栅常数  $d$ , 反之亦然。

### 三、位相光栅的代用与制作

正弦型位相光栅只要适当控制位相调制度和光栅位置, 便可使零级与一级衍射光强度相等, 并使零级与正一级或负一级位相差为  $\pi$ 。通过零级与一级的相干叠加既能实现图象相减, 同时又获得图象相加。作为正弦位相光栅的代用品, 我们考察常见的矩形位相光栅的衍射特性。设矩形位相光栅的位相分布如图 2 所示, 忽略其有限大小, 振幅透射

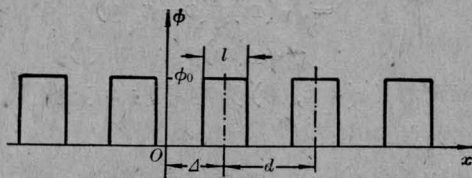


图2 矩形位相光栅的位相分布

率为:

$$t(x) = \left[ \text{rect} \left( \frac{x}{d} \right) - \text{rect} \left( \frac{x}{l} \right) (1 - e^{-j\phi_0}) \right] * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nd - \Delta)$$

其中  $d$  为光栅常数,  $\phi_0$  为一固定位相值,  $l$  为非零位相部分宽度,  $\Delta$  为微调平移量。

$t(x)$  的傅里叶变换为:

$$T(\xi) = \left[ \text{sinc}(d\xi) - \frac{l}{d} \text{sinc}(l\xi) (1 - e^{-j\phi_0}) \right] \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left( \xi - \frac{n}{d} \right) e^{-j2\pi n \Delta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T(n) \delta \left( \xi - \frac{n}{d} \right)$$

由于各级衍射光的复振幅与各  $\delta$  函数的系数  $T(n)$  成正比, 对我们感兴趣的  $n=0, \pm 1$  的级次:

$$T(0) = 1 - \frac{l}{d} (1 - e^{-j\phi_0})$$

$$T(\pm 1) = 2 \frac{l}{d} \text{sinc} \left( \frac{l}{d} \right) \times \sin \left( \frac{\phi_0}{2} \right) e^{-j \left( \frac{\phi_0}{2} + \frac{\pi}{2} \pm 2\pi \frac{\Delta}{d} \right)}$$

零级与正负一级衍射光之间的位相差分别为:

$$\phi(0, 1) = \left( \frac{\phi_0}{2} + \frac{\pi}{2} + 2\pi \frac{\Delta}{d} \right) - \text{tg}^{-1} \frac{l \sin \phi_0}{d - l + l \cos \phi_0} \quad (5)$$

$$\phi(0, -1) = \left( \frac{\phi_0}{2} + \frac{\pi}{2} - 2\pi \frac{\Delta}{d} \right) - \text{tg}^{-1} \frac{l \sin \phi_0}{d - l + l \cos \phi_0} \quad (6)$$

令  $|T(0)|^2 = |T(\pm 1)|^2$  得:

$$\cos \phi_0 = \frac{2l^2 \sin^2 \left( \frac{l}{d} \right) - (d-l)^2 - l^2}{2l(d-l) + 2l^2 \sin^2 \left( \frac{l}{d} \right)} \quad (7)$$

在光栅的  $d$  和  $l$  值已知时, 可由 (7) 式求得  $\phi_0$  的值, 作为制作光栅的依据。(7) 式还限制了  $l$  的变化范围,  $l$  只能在  $0.265d \sim 0.735d$  之间取值。进一步的运算还表明, 在  $l = \frac{d}{2}$  处,  $\phi_0$  有极小值  $2.008(\text{rad})$ 。

由 (5)、(6) 两式可见, 只要 (7) 式得以满足, 适当调节光栅的位置总可找到一个合适的  $\Delta$  值, 使  $\phi(0, 1) = \pi$  或  $\phi(0, -1) = \pi$ , 得到两图象相减输出。但由 (5) ~ (7) 式, 除  $l = d/2$  的情况外, 条件

$$\begin{cases} \phi(0, 1) = \pi \\ \phi(0, -1) = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \phi(0, 1) = 0 \\ \phi(0, -1) = \pi \end{cases}$$

不同时满足, 因而不能象正弦光栅那样同时得到图象的相减和相加。若  $l = \frac{d}{2}$ , 微调光栅使  $\Delta = \frac{d}{4}$ , 我们便同时得到两图象的相加和相减。

无论是正弦位相光栅还是矩形位相光栅, 其位相延迟值都与光栅的制作工艺有关。用感光材料制作则与曝光量和处理方法有关<sup>[6]</sup>。用扫描曝光法可获得具有合适位相值的正弦和矩形位相光栅<sup>[7]</sup>。更简单一点, 用一个  $l \sim \frac{d}{2}$  的朗奇光栅作为母光栅紧贴在全息干板上均匀曝光, 适当控制曝光量并将所得的振幅光栅漂白, 便可制得矩形位相光栅。

#### 四、实 验

实验光路如图 3 所示, 为一典型的  $4f$  系统, 用 He-Ne 激光作光源。透镜  $L_1$ 、 $L_2$  和  $L_3$  的焦距都是  $f = 600 \text{ mm}$ , 激光束经空间滤波器 SF 过滤后由  $L_1$  准直照明输入物体。实验所用的位相光栅是由一母光栅在全息干板

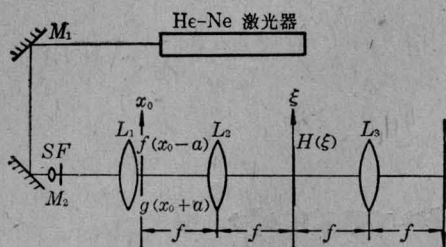
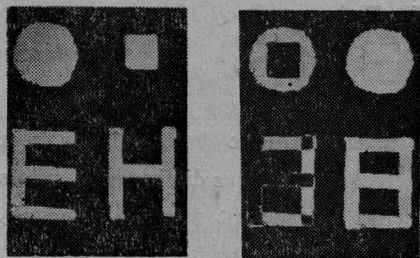


图3 实验系统光路图

上复制而成,空间频率为20线对/mm。制作时为了调整光栅位相调制量,在一条全息干板上用不同时间曝光成灰阶板式的结构,用Kodak R-10漂白液漂白、干燥后使用。

用透明片作输入物体时,需将它们浸入液门中。作为初步的实验,我们的输入图象为在黑纸上刻出的两个字符和两个几何图形的组合,如图4(a),实际尺寸约为 $5 \times 11 \text{ mm}^2$ 。图4(b)给出了实验结果,图中左边是两图象相减,右边是两图象相加。



(a) 两张输入图象

(b) 实验结果

图 4

## 五、讨 论

由文中二、三节知,凡是具有零级与一级衍射光强相等的性质的位相光栅,都可按本文的方法用于图象相减,位相差由光栅的平移来控制。

与用振幅光栅进行图象加减的方法比较,振幅光栅方法对光栅无特殊要求,而位相

光栅一方面要求制作均匀,另一方面要有合适的位相调制,制作比较费时。本文的方法有如下优点:

1. 用光栅实现图象相减,对光学透镜的要求极高,尤其是象差要小。一般透镜的象差都是中央小,边缘部分大,用振幅光栅时要在两输入图象之间留出一张图象宽度的范围,不能将输入图象置于透镜中央,这就要求透镜在更大的孔径上压低象差。从理论上讲,透镜直径应大于输入图象宽度的三倍<sup>[1]</sup>。用位相光栅则可利用透镜的中央部分,两张输入图象可以紧靠在一起,因此透镜直径的理论值仅为振幅光栅方法的 $\frac{2}{3}$ 。对同一尺寸的图象来说,无疑可降低对透镜的孔径或象差的要求。另一方面,位相光栅衍射效率高,且零级衍射得以利用,光能利用率高。

2. 适当选择光栅的栅形,可同时得到图象的相减和相加,无需再作调节。

本文介绍的方法可与光源编码技术<sup>[4]</sup>结合,使用准单色扩展光源进行图象加减,以改善图象质量。出于以上相同的考虑,此法除了能降低对透镜的要求外还可降低对编码用的多狭缝的要求,使更多的光能得以利用。

## 参 考 文 献

- [1] J. F. Ebersole; *Opt. Eng.*, 1975, **14**, 436.
- [2] S. H. Lee et al.; *JOSA*, 1970, **60**, 1037.
- [3] F. T. S. Yu, Anthony Tai; *Appl. Opt.*, 1979, **18**, 2705.
- [4] S. T. Wu, F. T. S. Yu; *Appl. Opt.*, 1981, **20**, 4082.
- [5] S. Kossler, R. Hild; *Opt. Quant. Elect.*, 1983, **15**, 65.
- [6] 王玉堂,郑师海;《激光》,1982, **9**, 603.
- [7] 王玉堂,樊晓泉;《中国激光》,1984, **11**, 78.