中国激光
第12卷 第3期

梯度周期场自由电子激光器

张大可 雷仕湛 陈建文

(中国科学院上海光机所)

提要: 本文在单电子模型的基础上逐阶求解相对论电子的洛伦兹方程和能量方程，得到了梯度周期场自由电子激光器的增益表达式。计算表明当周期磁场的振幅沿 z 方向变化时，增益可获得提高。

Free-electron laser with gradient magnetic field

Zhang Dake, Lei Shizhan, Chen Jianwen

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: In this article, Lorentz equation and energy equation for the relativistic electrons are solved order by order on the basis of the single-electron model. The gain expression for free-electron lasers with gradient magnetic field is obtained. The result show that when the amplitude of the periodic magnetic field varies along z direction, the gain is expected to be increased.

一、引 言

自 1976 年第一台自由电子激光器问世以来，对于这一类型器件的研究，已经引起了普遍的重视。从理论预言来说，自由电子激光器的能量转换效率可以高达 50%。但目前实际得到的效率却远没有达到这一水准。因此，如何提高自由电子激光器的能量转换效率，已经成为现阶段研究讨论最多的课题之一，曾为此提出了不少设计方案，如采用储存环[1]，或者电子收集器[2]，采用振幅沿横向作梯度变化的周期磁场[3]，以及采用空间周期沿电子传播方向可变的摆动器[4]等。我们认为，如果周期静磁场的振幅不是常数，而是沿着电子束传播方向作线性变化的话，就可以更加有效地实现电子束在空间的聚束，从而提高激光器的能量转换效率。本文应用逐阶近似的方法，计算了梯度周期场自由电子激光器的增益，并将计算结果同周期场振幅恒定的情况进行了比较。

二、基本分析

以下我们将根据单电子模型建立相对论电子的动力学方程和能量方程，并对这些方程逐阶求解，最后将所得的结果按照电子进

收稿日期：1984 年 4 月 16 日。

入磁场的初始位相求取平均，以获得电子束与辐射场相互作用的整体效应。

设梯度周期场为：

$$\boldsymbol{B}_m = B_m(z)\{\hat{e}_x\cos k_0 z + \hat{e}_y \sin k_0 z\} \tag{1}$$

式中 $k_0 = 2\pi/\lambda_0$，而 λ_0 是周期场的空间周期，$B_m(z)$ 是周期场的振幅，可以表示为 z 的缓变函数：

$$B_m(z) = B_0(1+sz) \tag{2}$$

其中 B_0 是一个常量，而 s 为可变参数。

我们假设沿 z 方向传播的辐射场是圆偏振的，其频率为 ω_r，亦即：

$$\boldsymbol{E}_r = E_0\{\hat{e}_x\cos\xi_r - \hat{e}_y\sin\xi_r\} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{B}_r = \frac{E_0}{c}\left\{\hat{e}_x\sin\xi_r + \hat{e}_y\cos\xi_r\right\} \tag{4}$$

式中：$\xi_r \equiv k_r z - \omega_r t + \phi$

$$k_r \equiv \omega_r/c \tag{5}$$

而 ϕ 是初位相；E_0 则是辐射场电矢量的振幅。我们设 E_0 是一个小量，以致辐射场同相对论电子的相互作用，可以作为微扰来处理。

单电子的相对论洛伦兹方程和能量方程分别为：

$$\frac{d}{dt}\gamma\boldsymbol{v} = -\frac{|e|}{m}\{\boldsymbol{E} + \boldsymbol{vB}\} \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}\gamma = -\frac{|e|}{mc^2}\boldsymbol{vE} \tag{7}$$

式中 $\boldsymbol{E}\equiv\boldsymbol{E}_r$，$\boldsymbol{B}\equiv\boldsymbol{B}_m+\boldsymbol{B}_r$。将 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的表达式(1)、(4)和(5)代入方程(6)，积分得：

$$\gamma v_x = \frac{|e|E_0}{\omega_r m}\sin\xi_r - \frac{|e|B_m(z)}{k_0 m}\cos k_0 z + \frac{|e|B_0}{k_0 m}\frac{s}{k_0}\sin k_0 z + \text{常数} \tag{8}$$

$$\gamma v_y = \frac{|e|E_0}{\omega_r m}\cos\xi_r - \frac{|e|B_m(z)}{k_0 m}\sin k_0 z - \frac{|e|B_0}{k_0 m}\frac{s}{k_0}\cos k_0 z + \text{常数} \tag{9}$$

以及：

$$\frac{d}{dt}\gamma(1-\beta_z) = \frac{|e|B_m(z)}{\gamma mc}\{\gamma v_x\sin k_0 z - \gamma v_y\cos k_0 z\} \tag{10}$$

对于比较强的静磁场：$CB_0 \gg E_0$，且 $\omega_0^{-1} \gg \omega_r^{-1}$，同时考虑到 $s/k_0 = s\lambda_0/2\pi \ll 1$，即有：

$$\frac{d}{dt}\gamma(1-\beta_z) \approx 0 \tag{11}$$

$$\gamma(1-\beta_z) = \text{常数} \tag{12}$$

根据方程(7)、(8)、(9)和(12)式可以计算在无微扰($\boldsymbol{E}=0$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_m$)时，电子的运动轨迹和能量分别为：

$$x_s \approx \frac{|e|B_m(z)}{\gamma_s k_0^2 m}\sin(k_0 z_s + \theta_0) \tag{13}$$

$$y_s \approx -\frac{|e|B_m(z)}{\gamma_s k_0^2 m}\cos(k_0 z_s + \theta_0) \tag{14}$$

$$z_s = z_0 + ut \tag{15}$$

$$\gamma = \gamma_s \tag{16}$$

式中的任意常数 z_0 和 θ_0，分别是相对论电子的初始纵向坐标和位相，而 u 和 γ_s 分别为其初始速度和能量。上式表明，在无微扰条件下，相对论电子将沿 z 方向回旋前进，其回旋频率为 $\beta_z^0\omega_0$($\beta_z^0 \equiv u/c$)，而回旋半径 $r_0 = |e|B_m(z)/\gamma_s m k_0^2$，将沿 z 向变化。

考虑到辐射场的微扰作用，相对论电子的轨迹和能量分别可以表示为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_s + \delta\boldsymbol{r}_1 + \delta\boldsymbol{r}_2 + \cdots\\ \gamma(t) &= \gamma_s + \delta\gamma_1 + \delta\gamma_2 + \cdots\end{aligned} \tag{17}$$

其中 $\delta\boldsymbol{r}_1 = (\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1)$ 和 $\delta\gamma_1$ 都是正比于 E_0 的一阶小量，并且在 $t=0$ 时均取为零。

将上述轨迹和能量的展开表达式代入方程(7)式，得到：

$$\frac{d}{dt}\delta\gamma_1 = -\frac{|e|}{mc^2}\left\{\frac{dx_s}{dt}E_x + \frac{du_s}{dt}E_y\right\} \approx -\frac{\gamma_3\Omega_E\Omega_0}{\omega_0}(1+sz_s)\cos(\Delta\omega t + \theta) \tag{18}$$

其中，$\Omega_E \equiv |e|E_0/\gamma_s mc \sim 0.6\times10^3 E_0/\gamma_s\,\mathrm{s}^{-1}$，而 E_0 以 V/m 为单位；$\Omega_0 \equiv |e|B_0/\gamma_s m \sim 1.8\times10^7 B_0/\gamma_s\,\mathrm{s}^{-1}$，而 B_0 以 Gs 为单位。

$$\begin{aligned}\Delta\omega &\equiv \beta_z^0\omega_0 - \omega_r(1-\beta_z^0)\\ \theta &\equiv (k_r + k_0)z_0 + \theta_0 + \phi\end{aligned} \tag{19}$$

(7)式表明辐射场对相对论电子所做的功正比于 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}_r$，而速度矢量和电矢量的相对方向决定了能量转移的方向。显然，$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}_r$ 保

持为正值的时间越长，能量转换效率也就越高。我们已经求得相对论电子的回旋频率为 $\beta_z^0\omega_0$，而在电子为静止的坐标系中，由于多普勒效应，辐射场的频率将改变成为 $\omega_r(1-\beta_z^0)$，因此，由(19)式所定义的参量 $\Delta\omega$，实际上表征了电子与辐射场偏离共振的程度，可以视为是共振参量。

将方程(18)式对时间积分，即可求得一阶微扰能量 $\delta\gamma_1$ 为：

$$\delta\gamma_1=-\frac{\gamma_s\Omega_E\Omega_0}{\omega_0\Delta\omega}\{\sin(\Delta\omega t+\theta)-\sin\theta\}$$
$$-\frac{\gamma_s\Omega_E\Omega_0 su}{\omega_0\Delta\omega^2}\{\Delta\omega t\sin(\Delta\omega t+\theta)$$
$$+\cos(\Delta\omega t+\theta)-\cos\theta\} \tag{20}$$

(20)式给出了单个相对论自由电子在与辐射场的相互作用过程中，在一阶近似条件下的能量变化。为了求得电子束作为一个整体的宏观效应，就必须对每个电子的初始纵向位相 $(k_r+k_0)z_0$ 和横向位相 θ_0 求取平均。实际上，对于这二者的平均效果是完全一样的。因此，我们认为 $\langle\ \rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\ )d\theta$，其中 $\langle\ \rangle$ 代表对初位相的平均值。按此，有：

$$\langle\delta\gamma_1\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta\gamma_1 d\theta=0 \tag{21}$$

在一级微扰近似下：

$$\gamma v_x=(\gamma_s+\delta\gamma_1)\frac{d}{dt}(x_s+\delta x_1)$$
$$\approx(\gamma_s+\delta\gamma_1)\frac{d}{dt}x_s+\gamma_s\frac{d}{dt}\delta x_1$$

然后根据方程(8)式，求得：

$$\frac{d}{dt}\delta x_1=\frac{\Omega_E}{k_r}\sin(k_r z_s-\omega_r t+\phi)$$
$$-\frac{\Omega_0}{k_0}s\delta z_1\cos k_0 z_s$$
$$+\frac{\Omega_0}{k_0}(1+sz_s)k_0\delta z_1\sin k_0 z_s$$
$$+\frac{\Omega_0}{k_0}\frac{s}{k_0}\sin k_0 z_s \tag{22}$$

同理，求得：

$$\frac{d}{dt}\delta y_1=\frac{\Omega_E}{k_r}\cos(k_r z_s-\omega_r t+\phi)$$
$$-\frac{\Omega_0}{k_0}s\,\delta z_1\sin k_0 z_s$$
$$-\frac{\Omega_0}{k_0}(1+sz_s)k_0\delta z_1\cos k_0 z_s$$
$$-\frac{\Omega_0}{k_0}\frac{s}{k_0}\cos k_0 z_s \tag{23}$$

另外，根据方程(10)式，考虑到 $cB_0\gg E_0$，$\omega_0^{-1}\gg\omega_r^{-1}$ 以及 $\delta\gamma_1\ll\gamma_3$，即有：

$$\frac{d}{dt}\gamma(1-\beta_z)$$
$$\approx\left(\frac{|e|B_0}{k_0 m}\right)^2\frac{s}{\gamma c}$$
$$\approx\left(\frac{|e|B_0}{k_0 m}\right)^2\frac{s}{c\gamma_3}\left(1-\frac{\delta\gamma_1}{\gamma_s}\right) \tag{24a}$$

又：

$$\frac{d}{dt}\gamma(1-\beta_z)$$
$$\approx\frac{d}{dt}(\gamma_s+\delta\gamma_1)\left(1-\beta_z^0-\frac{1}{c}\delta\dot{z}_1\right)$$
$$=(1-\beta_z^0)\frac{d}{dt}\delta\gamma_1-\frac{\gamma_s}{c}\frac{d}{dt}\delta\dot{z}_1 \tag{24b}$$

将(24b)代入(24a)，有：

$$\frac{d}{dt}\delta\dot{z}_1=\frac{c(1-\beta_z^0)}{\gamma_s}\frac{d}{dt}\delta\gamma_1-\frac{\Omega_0^2 s}{k_0^2}$$
$$\frac{d}{dt}\delta z_1=\frac{c(1-\beta_z^0)}{\gamma_s}\delta\gamma_1-\frac{\Omega_0^2 st}{k_0^2} \tag{24c}$$

(24c)式右边的第二项为非共振项，故可以忽略不计，此时解得 δz_1 为：

$$\delta z_1=-\frac{\Omega_E\Omega_0(1-\beta_z^0)}{k_0\Delta\omega^2}\{\cos\theta$$
$$-\cos(\Delta\omega t+\theta)-\Delta\omega t\sin\theta\}$$
$$-\frac{\Omega_E\Omega_0(1-\beta_z^0)}{k_0\Delta\omega^3}su\{2[\sin(\Delta\omega t+\theta)$$
$$-\sin\theta]-\Delta\omega t[\cos(\Delta\omega t+\theta)+\cos\theta]\} \tag{24d}$$

上述结果表明，在一阶近似条件下，相对论电子与辐射场的相互作用并不导致能量的转移，而仅仅使得电子束形成空间聚束，然而正是这种空间聚束，在二阶近似中产生了能

量的单向转移。

在二阶近似中，我们令 $x=x_s+\delta x_1$, $y=y_s+\delta y_1$, $z=z_s+\delta z_1$ 以及 $\gamma=\gamma_s+\delta\gamma_1+\delta\gamma_2$。这样，辐射场电矢量的 x 和 y 分量将分别表示为：

$$\begin{aligned}E_x&=E_0\cos(k_r(z_s+\delta z_1)-\omega_r t+\phi)\\&\approx E_0\{\cos\xi_{r0}-k_r\delta z_1\sin\xi_{r0}\}\\E_y&=-E_0\sin(k_r(z_s+\delta z_1)-\omega_r t+\phi)\\&\approx -E_0\{\sin\xi_{r0}+k_r\delta z_1\cos\xi_{r0}\}\end{aligned} \tag{25}$$

式中：$\xi_{r0}\equiv\xi_r|_{z=z_s}=-\omega_r(1-\beta_z^0)t+k_r z_0+\phi$。于是有：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\delta\gamma_2=-\frac{|e|E_0}{mc^2}\Big\{&\frac{d}{dt}\delta x_1\cos\xi_{r0}\\&-k_r\delta z_1\frac{dx_s}{dt}\sin\xi_{r0}\\&-\frac{d}{dt}\delta y_1\sin\xi_{r0}\\&-k_r\delta z_1\frac{dy_s}{dt}\cos\xi_{r0}\Big\}\end{aligned} \tag{26}$$

忽略 $\frac{d}{dt}\delta x_1$ 和 $\frac{d}{dt}\delta y_1$ 的表达式((22)和(23)式)中的非共振项，同时将(24)式代入(26)式，得到：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\delta\gamma_2\approx\frac{\gamma_s\Omega_E}{c}\Big\{&\frac{\Omega_0}{k_0}(1+sz_s)k_r\delta z_1\sin(\Delta\omega t+\theta)\\&+\frac{\Omega_0}{k_0}s\delta z_1\cos(\Delta\omega t+\theta)\Big\}\end{aligned} \tag{27}$$

若设 $\delta\gamma_2=\delta\gamma_2'+\delta\gamma_2''$，即有：

$$\frac{d}{dt}\delta\gamma_2'=\frac{\gamma_s\Omega_E\Omega_0(1+sz_s)k_r}{\omega_0}\delta z_1\sin(\Delta\omega t+\theta) \tag{28a}$$

$$\begin{aligned}\langle\delta\gamma_2'\rangle=-\frac{\gamma_s\Omega_E^2\Omega_0^2(1-\beta_z^0)\omega_r}{2\omega_0^2\Delta\omega^3}\Big\{&2(1-\cos\Delta\omega t)\\&-\Delta\omega t\sin\Delta\omega t\\&+sut\left(2+\cos\Delta\omega t-\frac{3\sin\Delta\omega t}{\Delta\omega t}\right)\Big\}\end{aligned} \tag{28b}$$

以及：

$$\frac{d}{dt}\delta\gamma_2''=\frac{\gamma_3\Omega_E\Omega_0 s}{\omega_0}\delta z_1\cos(\Delta\omega t+\theta) \tag{29a}$$

$$\begin{aligned}\langle\delta\gamma_2''\rangle\\=-\frac{\gamma_s\Omega_E^2\Omega_0^2(1-\beta_z^0)sc}{2\omega_0^2\Delta\omega^3}\Big\{&(2-sut)\sin\Delta\omega t\\&+\frac{3su}{\Delta\omega}-\left(\frac{3su}{\Delta\omega}+\Delta\omega t\right)\cos\Delta\omega t\\&-t\left(1+\frac{sut}{2}\right)\Big\}\end{aligned} \tag{29b}$$

考虑到 $sc\ll\omega_r$，即有：

$$\langle\delta\gamma_2\rangle=\langle\delta\gamma_2'\rangle+\langle\delta\gamma_2''\rangle\approx\langle\delta\gamma_2'\rangle$$

三、增益方程

我们设在相对论电子与辐射场的整个相互作用过程中能量是守恒的，也就是说除了电子与场之间的能量交换之外，再也没有其他形式的能量损失。这样，增益 G 可以定义为：

$$G=-\frac{\langle\Delta\gamma\rangle mc^2\rho_e V}{\epsilon_0E_0^2V} \tag{30}$$

其中，V 是相互作用区域的空间体积，ρ_e 是电子束的密度，分母 $\epsilon_0E_0^2V$ 则是辐射场的初始能量，而 $\langle\Delta\gamma\rangle\equiv\langle\gamma-\gamma_s\rangle\approx\langle\delta\gamma_2\rangle$。根据这一定义式，辐射光强的变化规律可以表示为：$I=I_0\exp(G)$。

根据方程(28)式，可以写出指数增益 G 的具体形式为：

$$\begin{aligned}G=\frac{\rho_e|e|^4B_0^2\omega_r(1-\beta_z^0)}{2\epsilon_0\omega_0^2m^3\gamma_s^3\Delta\omega^3}\Big\{&2(1-\cos\Delta\omega t)\\&-\Delta\omega t\sin\Delta\omega t\\&+sut\left(2+\cos\Delta\omega t-\frac{3\sin\Delta\omega t}{\Delta\omega t}\right)\Big\}\end{aligned} \tag{31}$$

在实际工作的器件中，相互作用长度 L 是一个常量。在无微扰情况下，相对论电子通过这一作用距离所需要的时间为 L/u，由于辐射场所引起的电子速度的偏移是一个小量，所以可以近似地认为 L/u 即为每个电子通过 L 所需的时间，为此，我们定义一个无量纲参量 η：

$$\eta\equiv\Delta\omega L/u \tag{32}$$

这样，总的增益即为：

$$G(\eta)=G_0\left\{2(1-\cos\eta)-\eta\sin\eta+sL\left(2+\cos\eta-\frac{3\sin\eta}{\eta}\right)\right\}\frac{1}{\eta^3} \tag{33}$$

式中，

$$G_0\equiv\frac{\rho_e|e|^4B_0^2\omega_r(1-\beta_z^0)L^3}{2\epsilon_0\omega_0^2m^3\gamma_s^3c^3\beta_z^{03}} \tag{34}$$

如果令方程(33)式中的 s 等于零，即得到周期磁场的振幅为恒量时的增益 $G^0(\eta)$，即：

$$G^0(\eta)=G_0\{2(1-\cos\eta)-\eta\sin\eta\}\frac{1}{\eta^3} \tag{35}$$

对于给定的相互作用距 L，我们可以选取适当的参数，如电子的初速度 $u=c\beta_z^0$，或者周期静磁场的空间周期 $\lambda_0=2\pi c/\omega_0$ 等，来改变 η，使得增益 $G(\eta)$ 为最大。

四、讨　论

在本文中，我们应用逐阶近似的方法求解单电子的相对论动力学方程和能量方程，并将计算结果按初始位相的统计权重进行平均，获得了梯度周期场自由电子激光器的增益表达式。我们看到，在一阶近似下，场与电子束之间没有纯的能量交换。这是由于当电子进入周期磁场之后，根据其初始位相的不同，或是被加速，即获得能量；或是被减速，即失去能量，而其平均效果为零。周期磁场的作用，仅仅是使电子束产生空间聚束，而正是这种聚束，在二阶近似中产生了正的增益。

将(33)式和(35)式加以比较，我们看到周期静磁场的振幅沿相对论电子束的传播方向递增的器件，其增益较磁场振幅恒定的情况增加了一项：$sL\left\{2+\cos\eta-\dfrac{3\sin\eta}{\eta}\right\}$。其中$\{\ \}$内的项恒大于零。因此，只要适当地选

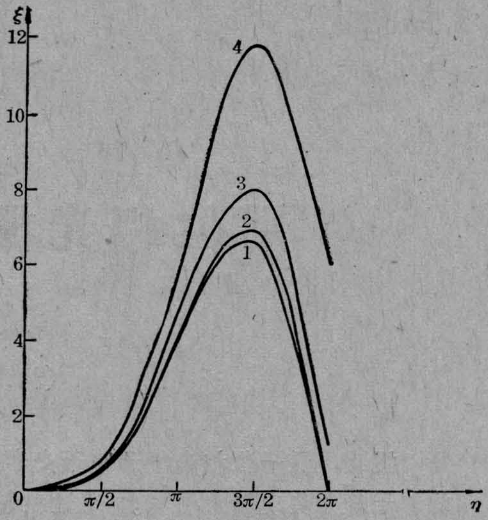

图 1　$\xi=\left\{2(1-\cos\eta)-\eta\sin\eta+sL\left(2+\cos\eta-\dfrac{3\sin\eta}{\eta}\right)\right\}$ 随 η 的变化曲线

(1、2、3、4 分别对应于 $sL=0$、0.1、1、2 四种情况)

取参数 s，就可以使得自由电子激光器的增益有一定程度的提高。图 1 给出了当 $sL=0$、0.1、1 和 2 时，$\xi=\{2(1-\cos\eta)-\eta\sin\eta+sL(2+\cos\eta-3\sin\eta/\eta)\}$ 随 η 变化的曲线，它表明相对于振幅恒定的周期场，梯度场自由电子激光器的增益分别提高了 1.7% ($sL=0.1$)，17% ($sL=1$) 以及 78% ($sL=2$)。当然，sL 也不能取得过大，否则将违背我们前面所作的 $B_m(z)$ 是 z 的缓变函数这一假设以及由此而来的近似条件，结果将使得整个计算结果失效。根据方程(24)和(27)式，我们认为梯度周期场结构的这种效应，是通过强化对电子束的聚束来实现的。

参　考　文　献

[1] T. L. Smith *et al.*; *J. Appl. Phys.*, 1979, **50**, 4580.

[2] L. R. Elias; *Phys. Rev. Lett.*, 1972, **42**, 977.

[3] H. Bochmer *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1982, **48**, No. 3, 141.

[4] 王润文等;《中国激光》, 1983, **10**, No. 7, 385.