中国激光
第12卷 第2期

包含光阑的激光谐振腔模式

范滇元 王照明 朱爱兵 高脐媛

（中国科学院上海光机所）

提要：用光线矩阵方法研究了两类带有光阑的谐振腔。对包含软边光阑的腔，从衍射积分方程出发，求出了本征模式的普遍解析解。对包含硬边光阑的腔，用适当孔径的高斯光阑代替实际小孔，得到模式的近似解。用于分析常见的小孔选模腔、自孔径选模腔及包含光阑的热稳腔等，所得结果和实验测量值良好地相符。

Eigenmodes of resonator containing apertures

Fan Dianyuan, Wang Zhaoming Zhu Aibing, Gao Qiyuan

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: Using ray-matrix method we investigated the resonators containing two kinds of apertures. For the first one with soft-aperture, a general analysis solution of eigenmodes was derived on the basis of the diffraction integral equation. The relationship between the features of the zero-order mode and size and position of the aperture was investigated. For the second one with hard-aperture, we substituted a Gaussian aperture with suitable diameter for the used aperture, the approximate solution of eigenmode was obtained. The result was used for analysing the mode-selecting resonator with iris, the self-aperture mode-selecting resonator and thermo-insensitive resonator containing a aperture. The theory has been well verified by our experiments.

一、引　言

不考虑光阑效应的谐振腔理论已比较成熟，然而实际上总是存在着程度不同的光阑，它们对腔的模式往往有不可忽视的影响。对于“硬边”型光阑，如工作物质的有限口径、反射镜的有限尺寸，以及人为引入的选模小孔等，要得到严格分析解是困难的。除了数值解外，只对若干特定情况已提出了解析和半解析方法[1,2]；对于“软边”型的光阑，如透过率为高斯函数的“高斯光阑”和反射率为高斯函数的“高斯反射镜”，能够用光线矩阵方法获得准确的解析解。

已有若干文献研究了高斯反射镜谐振腔[3~7]。本文则以统一的方法研究更为一般的软边光阑谐振腔——腔内包含一个或数个高斯光阑，且放置在任意的纵向位置。从模式重现原理出发，建立光线矩阵元表达的衍

收稿日期：1984年3月6日。

射积分方程，求出了基模和高阶模的严格解析解。在轴对称系统中统一地用复宗量拉盖尔-高斯函数表达，并以腔的全程矩阵元 $ABCD$ 为系数。高斯反射镜可以等价地看作高斯光阑和反射镜重合的结果，所以文献[1～5]将是本文的一个特殊情况。

本文得到的高斯光阑腔的解也能够用来分析带有硬边小孔的谐振腔。此时用适当孔径的高斯光阑代替实际的硬边小孔，从而导出模式的近似解。用这一方法研究了实验上常用的小孔选模腔、自孔径选模腔和包含选模孔的热稳腔。为验证理论，用工作物质为磷酸盐钕玻璃的小孔选模腔作了实验测量。

二、高斯光阑腔的基本理论

透过率为 $T(r)=e^{-r^2/a^2}$ 的高斯光阑有对应的矩阵表示式 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1/F & 1\end{pmatrix}$，其中 $F=ika^2/2$[8]。在轴对称系统中，腔的本征函数 $\psi(r)$ 将满足下列用矩阵元表达的衍射积分方程：

$$\gamma\psi(r)=-i\frac{k}{B}e^{ik\frac{D}{2B}r^2}\times\int\psi(\rho)e^{ik\frac{A}{2B}\rho^2}J_0(k\rho r/B)\rho\,d\rho。\tag{1}$$

解出这一方程，得到本征模系的解析形式的解（L_p 是 p 阶拉盖尔多项式）：

本征函数

$$\psi_p(r)=L_p\left(\mp\frac{ikr^2}{B}\sqrt{\left(\frac{D+A}{2}\right)^2-1}\right)\times e^{ikr^2/2q},\tag{2A}$$

本征值

$$\gamma_p=\left[\frac{D+A}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{D+A}{2}\right)^2-1}\right]^{2p+1},\tag{2B}$$

q 参数

$$1/q=\frac{D-A}{2B}\pm\frac{1}{B}\sqrt{\left(\frac{D+A}{2}\right)^2-1}。\tag{2C}$$

这个解对任何腔型（稳定、非稳和介稳）、光阑处于腔内任何位置都普遍适用。虽然从“光线重现”的几何理论也能得到形式相似的 q 和 γ_0 表达式[9]，但(2)式是从模式重现出发的，它不仅允许矩阵元 $ABCD$ 是复数，而且得到了几何理论无法求出的本征函数 $\psi(r)$ 的普遍表达式。(2)式对高斯反射镜腔也是适用的，文献［3～7］的结果是高斯光阑位置和反射镜重合的一种特殊情况，而且(2)的表达形式更为简洁和普遍。

对于任何一个具体形式的腔，只要算出包含光阑作用的复数矩阵元，就能导出本征模的全部特性。下面对图1所示的典型情况进行讨论。若取 A 镜面为参考面，并规定凹面反射镜的曲率半径取正值，则循环一周的矩阵为：

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_0 & B_0\\ C_0 & A_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2/r_B & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}A_0 & B_0\\ C_0 & D_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2/r_A & 1\end{pmatrix},\tag{3A}$$

$A_0B_0C_0D_0$ 是自左向右的单程光线矩阵元，即

$$\begin{pmatrix}A_0 & B_0\\ C_0 & D_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & l_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1/F & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & l_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-l_2/F & l_1+l_2-l_1l_2/F\\ -1/F & 1-l_1/F\end{pmatrix}。\tag{3B}$$

引入符号：

$$\begin{aligned}G_1&=A_0-B_0/r_A=g_1+iM_1,\\ G_2&=D_0-B_0/r_B=g_2+iM_2,\end{aligned}\tag{4}$$

$$\cos(\alpha+i\beta)=\frac{A+D}{2}=2G_1G_2-1=2(g_1g_2-M_1M_2)-1+i2(g_1M_2+g_2M_1)。$$

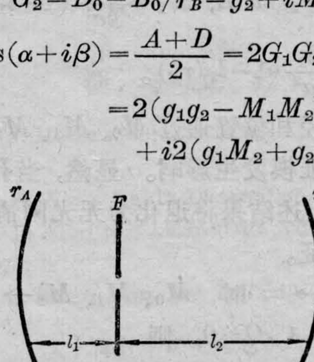


图1　包含一个高斯光阑的腔

g_1、g_2 是无光阑时的 g 参数，M_1、M_2 是光阑引起的修正，它使广义 G 参数变为复数。利用(3)、(4)式可得出参考面(A 镜)处的模式场函数 ψ_1、循环一周的相移 φ、损耗参数$|\gamma|$以及基模的光斑尺寸 W_A 和波面曲率半径 R_A 的具体表达式：

$$\begin{aligned}
&\psi_p(r)=L_p(2r^2/W_A^2-ikr^2(1/R_A-1/r_A))\\
&\qquad\times e^{ikr^2/2R_A-r^2/W_A^2}\\
&\varphi_p=\pm(2p+1)\alpha\\
&|\gamma_p|=e^{-(2p+1)|\beta|}\\
&2/kW_A^2=\mathrm{Im}\{1/q_A\}\\
&\quad=\pm\frac{P}{2L'}\frac{(g_2-M_0M_2)\operatorname{tg}\alpha+(M_2+M_0g_2)\operatorname{th}\beta}{(g_2-M_0M_2)^2+(M_2+M_0g_2)^2}\\
&1/R_A=\mathrm{Re}\{1/q_A\}=1/r_A\\
&\quad\pm\frac{P}{2L'}\frac{(M_2+M_0g_2)\operatorname{tg}\alpha-(g_2-M_0M_2)\operatorname{th}\beta}{(g_2-M_0M_2)^2+(M_2+M_0g_2)^2}
\end{aligned}\tag{5}$$

其中，正负号应根据 $W_A^2>0$ 的要求选取，

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{-(P^2-Q^2-1)+\sqrt{(P^2+Q^2-1)^2+4Q^2}}\\
&\qquad/\sqrt{2}\,P,\\
&\operatorname{th}\beta=\sqrt{(P^2-Q^2-1)+\sqrt{(P^2+Q^2-1)^2+4Q^2}}\\
&\qquad/\sqrt{2}\,P,\\
&P=2(g_1g_2-M_1M_2)-1,\\
&Q=-2(g_1M_2+g_2M_1),\\
&g_1=1-L/r_A,\ g_2=1-L/r_B,\\
&L=l_1+l_2,\quad L'=L\\
&M_0=2l_1l_2/ka^2L,\ M_1=\frac{2l_2}{ka^2}(1-l_1/r_A),\\
&M_2=\frac{2l_1}{ka^2}(1-l_2/r_B)。
\end{aligned}\tag{6}$$

光阑的孔径和位置通过 M_0、M_1、M_2 这三个参数对本征模发生影响。显然，当孔径 a 足够大时，上述结果将退化为无光阑情况。下面作一验证。

当 $a\to\infty$ 时，M_0、M_1、$M_2\to0$，此时 $P=2g_1g_2-1$，$Q=0$。则

$$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{-(P^2-1)+|P^2-1|}/\sqrt{2}\,P,$$

$$\operatorname{th}\beta=\sqrt{(P^2-1)+|P^2-1|}/\sqrt{2}\,P。$$

按照约定，开平方的结果恒取正值，所以上式中取 $\sqrt{(p^2-1)^2}=|p^2-1|$。分两种情况讨论：

(1) $|P|<1$

相当于 $0<g_1g_2<1$，即稳定腔情况。此时，$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{1-P^2}/P$，$\operatorname{th}\beta=0$。代入(5)式得：

$$\begin{aligned}
&2/kW_A^2=\sqrt{1-P^2}/2Lg_2\\
&\qquad=\sqrt{g_1g_2(1-g_1g_2)}/Lg_2\\
&1/R_A=1/r_A\\
&\psi_p(r)=L_p(2r^2/W_A^2)e^{ikr^2/2R_A-r^2/W_A^2}\\
&\varphi_p=(2P+1)\operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{1-P^2}/P)\\
&|\gamma_p|=0
\end{aligned}\tag{7}$$

(2) $|P|>1$

相当于非稳腔情况。此时 $\operatorname{tg}\alpha=0$，$\operatorname{th}\beta=\sqrt{P^2-1}/P$，

则：

$$\begin{aligned}
&2/kW_A^2=0\\
&1/R_A=1/r_A\mp\sqrt{P^2-1}/2Lg_2\\
&\qquad=1/r_A\mp\sqrt{g_1g_2(g_1g_2-1)}/Lg_2\\
&\psi_p(r)=L_p(\pm ikr^2\sqrt{P^2-1}/2Lg_2)\\
&\qquad\times e^{ikr^2/2R_A}\\
&\varphi_p=(2p+1)\pi\\
&|\gamma_p|=(1/M)^{2p+1}。
\end{aligned}\tag{8}$$

M 是非稳腔的放大倍数，即：

$$\begin{aligned}
M&=e^{-|\beta|}=P+\sqrt{P^2-1}\\
&=(2g_1g_2-1)+2\sqrt{g_1g_2(g_1g_2-1)}
\end{aligned}$$

(7)、(8)式都和熟知的结果相一致。当光阑孔径有限时，M_0、M_1、M_2 不为零，本征模的特性将发生改变。改变的大小不仅和孔径 a 有关，还取决于光阑的位置 l_1、l_2。

三、基模和光阑的关系

光阑的存在不仅使 $p>0$ 的高阶模发生明显的改变：等位相面不再是球面，强度分布图不再有等于零的节点；而且使 $p=0$ 的基模也和空腔时有很大的差别。

由(5)式可见，不论 g_1g_2 取何值，$2/kW_A^2$

一般不为零。因此即使是 $g_1g_2>1$ 的非稳腔，它的基模也是高斯光束而不再是点光束。

这种基模和 $g_1g_2<1$ 的无光阑稳定腔的零阶高斯光束也有不同的特性。(5)式表明，它的等相面虽仍是球面但不再和反射镜的曲率半径一致($R_A\neq r_A$)；光斑尺寸变小和高次模的损耗间距扩大了等等。

基模特性的变化紧密依赖于小孔的大小和位置。下面以最常用的半共焦腔为例，具体研究它的基模和光阑的关系。设腔长为 1000 毫米，$r_A\to\infty$，$r_B=2000$ 毫米，所以 $g_1=1$，$g_2=1/2$。

1. 光腰尺寸和位置

由于基模是高斯光束，我们可根据参考面处的光斑 W_A 和波面半径 R_A 推算它的光腰尺寸 W_0 和离平面镜的距离 Z_0:

$$W_0^2=W_A^2R_A^2\Big/\left[R_A^2+\left(\frac{k}{2}W_A^2\right)^2\right],$$

$$Z_0=R_A(W_A^2-W_0^2)/W_A^2。$$

无光阑时，对 $\lambda=1.06$ 微米的激光，

$$W_0=W_A=\sqrt{\frac{2L}{k}}=0.579\text{ 毫米},$$

$Z_0=0$；而存在光阑时，W_0 和 Z_0 均发生改变，如图 2 所示。我们看到，光阑的影响表现在:

(1) 和空腔相比，光腰发生收缩，且光阑越小或离平面镜越远，收缩越显著；

(2) 光腰位置跟随光阑逐渐远离平面镜，但并不和光阑重合。孔径越小，离镜越远。

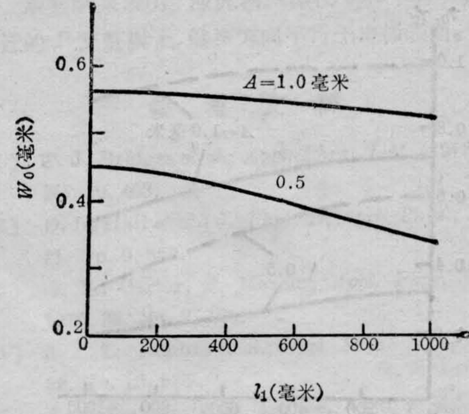
2. 平面镜处的波面曲率半径

与空腔不同，波面不再和反射镜面重合。它随光阑的大小和位置变化，如图3。光阑越小或离平面镜越远，曲率半径就越小。

3. 模损耗

空腔时基模的损耗很小，$\gamma_0\approx1$。引入光阑后损耗显著增加，本征值 γ_0 减少。光阑离平面镜越远，γ_0 就越小，如图 4 实线所示。

对于其它腔型我们也作了计算，结果表明，除细节外光阑对基模的影响和上述半共焦腔是类似的。



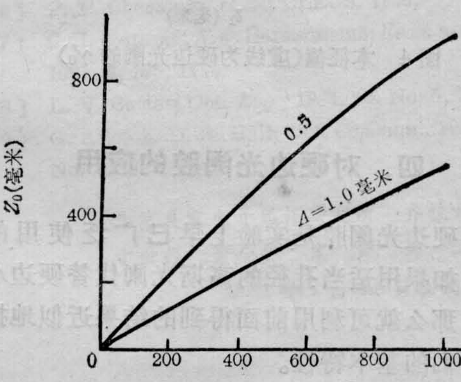


图 2 光腰尺寸及位置随光阑距离的变化

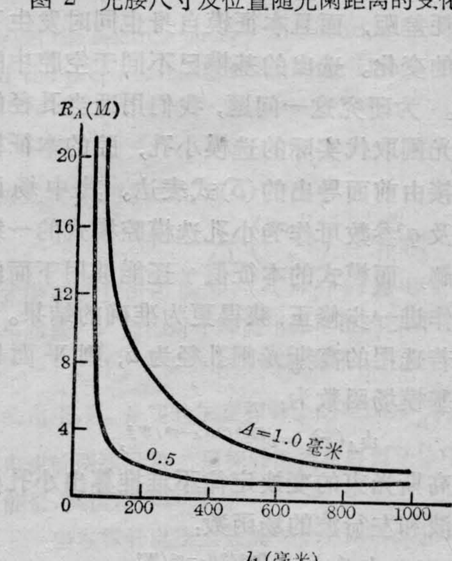


图 3 波面曲率半径

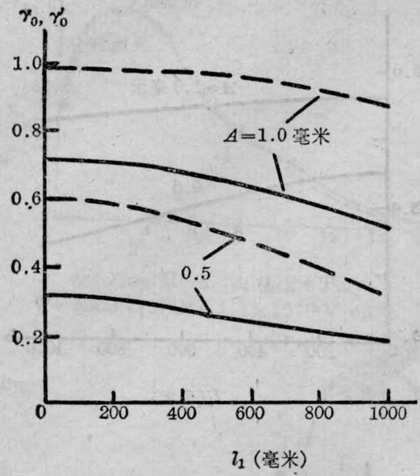


图4　本征值(虚线为硬边光阑的 γ'_0)

四、对硬边光阑腔的应用

硬边光阑腔是实验上早已广泛使用的腔。如果用适当孔径的高斯光阑代替硬边小孔，那么就可利用前面得到的结果近似地描述它们的基本特性。

1. 小孔选模腔的模式

腔内存在选模小孔后不仅扩大了模式间的损耗差距，而且本征模自身也同时发生了显著的变化。选出的基模已不同于空腔中的基模。为研究这一问题，我们用适当孔径的高斯光阑取代实际的选模小孔，腔的本征模就直接由前面导出的(5)式表达。其中场函数 ψ 及 q 参数可作为小孔选模腔模式的一级近似解，而模式的本征值 γ 还能够用下面的方法作进一步修正，获得更为准确的结果。

若选用的高斯光阑孔径为 a，则平面镜处的基模场函数为:

$$\psi_A(r)=e^{jkr^2/2R_A-r^2/W_A^2},$$

利用高斯光束的变换定律不难推算出小孔处右行波和左行波的场函数:

$$\psi_+(r)=e^{jkr^2/2R_+-r^2/W_+^2},$$
$$\psi_-(r)=e^{jkr^2/2R_--r^2/W_-^2}。$$

如果计算它们穿过高斯光阑的透过率，显然就得到(5)式给出的本征值 γ_0；为了获得对选模小孔情况的修正，现计算它们穿过孔径为 a 的硬边小孔的透过率:

$$T_+=\int_0^a|\psi_+|^2 r\,dr\Big/\int_0^\infty|\psi_+|^2 r\,dr,$$
$$T_-=\int_0^a|\psi_-|^2 r\,dr\Big/\int_0^\infty|\psi_-|^2 r\,dr,$$

那么，修正的本征值 γ'_0 由下式确定:

$$|\gamma'_0|^2=T_+T_-=(1-e^{-2a^2/W_+^2})(1-e^{-2a^2/W_-^2})。$$

对半共焦腔具体计算了 $|\gamma'_0|$ 随小孔大小和位置的变化，如图4中虚线所示。

上述修正的精确程度可以从两方面来考核。在理论上，文献[6]曾用类似的方法得出谐振腔反射镜有限口径对本征值的修正，它和严格的计算机数值解符合得十分良好。但这是小孔和反射镜重合的特殊情况，对于本文考虑的小孔处于任何位置的普遍情况，文献中尚无精确的理论结果可供比较。我们设计了专门的实验进行验证并确定实际硬边小孔和等价软边光阑间孔径的对应关系。所用谐振腔由半透($T=30\%$)的平面镜和 $r_B=1000$ mm 的全反镜组成。腔的几何长度为580 mm，工作物质为 $\phi5.5\times90$ mm 的磷酸盐钕玻璃棒，放置在接近全反镜一端。选模小孔半径为0.6 mm，可在腔内自由移动。我们用振荡阈值法测量小孔带来的损耗；用高精度的环路全息干涉仪[10]在不同位置测量输出光束的波面曲率半径；同时用照相法测量光斑尺寸。由此得出了本征值 $|\gamma'|$、光腰尺寸 W_0 及光腰位置 Z_0 随小孔在腔内移动时的变化规律。图5示出了实验结果及用孔径为0.4 mm 的高斯光阑计算的曲线。结果表明，只要选取合适的高斯光阑孔径，上述理论能够较好地描述小孔选模腔的基本特性。

2. 自孔径选模腔的模式

用拉长腔的方法也能获得稳定的基模振荡，此时是利用工作物质自身的孔径来选模。对这种腔已有的理论是以空腔模式为分析的出发点。实际上由于存在光阑效应，原有模

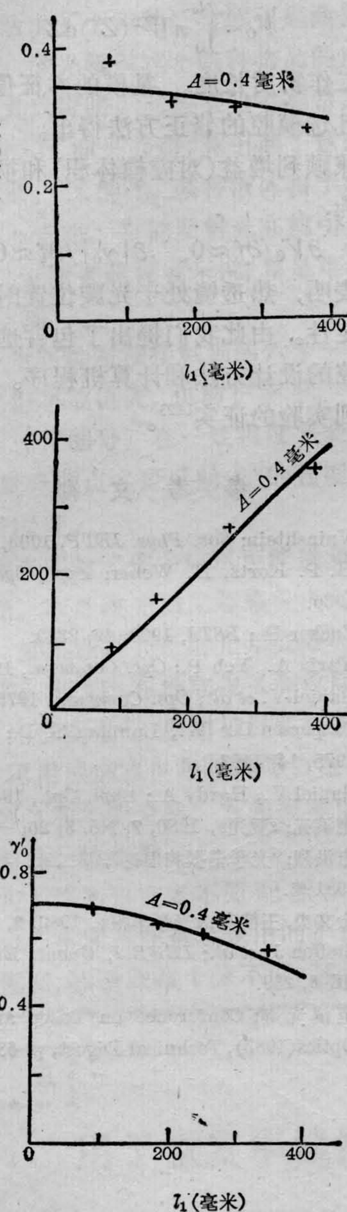


图5 实验和理论的比较
+—实验点 ——理论曲线

式结构要发生变化。

由于存在二个起作用的光阑，因此要引入二个间隔等于激光棒长的高斯光阑，如图6。本文第二部分给出的普遍结果仍然适用，所不同的仅是单程光线矩阵(3B)及相应参数的具体表达形式要修改为：

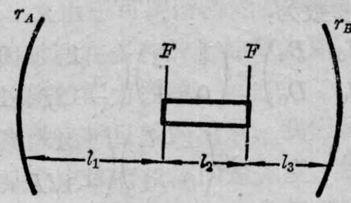


图6 自孔径选模腔

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & l_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_1=1-L/r_A-\frac{4l_2l_3}{k^2a^4}(1-l_1/r_A),$$

$$g_2=1-L/r_B-\frac{4l_1l_2}{k^2a^4}(1-l_3/r_B),$$

$$M_0=\frac{2}{ka^2L}(l_1l_2+2l_1l_3+l_3l_2)/(1-4l_1l_2l_3/k^2a^4L),$$

$$M_1=\frac{2}{ka^2}[l_2+2l_3-(l_1l_2+2l_1l_3+l_3l_2)/r_A],$$

$$M_2=\frac{2}{ka^2}[l_2+2l_1-(l_1l_2+2l_1l_3+l_3l_2)/r_B]。$$

本征模式的解仍由(5)式表达。

3．包含选模小孔的热稳腔理论

已有的热稳腔理论[11]没有考虑光阑效应。选模小孔的引入将带来两方面的影响：(1)显著改变了腔的本征模结构，使模体积的表达式要作较大的修改；(2)小孔造成的损耗不可忽视，因而热稳判据中必须包括模损耗稳定的条件。本文给出的软边光阑腔理论可以较好地解决这一问题。

首先，我们导出包含热透镜f的高斯光阑腔的本征模式。自左向右的单程光线矩阵

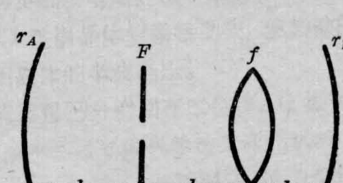


图7 包含光阑的热稳腔

及有关参数为:

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = 1 - L/r_A - \frac{l_3}{f}\left(1 - \frac{l_1 + l_2}{r_A}\right),$$

$$L = l_1 + l_2 + l_3,$$

$$g_2 = 1 - L/r_B - \frac{l_1 + l_2}{f}(1 - l_3/r_B),$$

$$L' = L[1 - l_3(l_1 + l_2)/fL],$$

$$M_0 = \frac{2l_1}{ka^2 L}\left(l_2 + l_3 - \frac{l_2 l_3}{f}\right) \Big/ [1 - l_3(l_1 + l_2)/fL],$$

$$M_1 = \frac{2}{ka^2}\left[l_2 + l_3 - \frac{l_1}{r_A}(l_2 + l_3) - \frac{l_3 l_2}{f}(1 - l_1/r_A)\right],$$

$$M_2 = \frac{2}{ka^2}\left[l_1 - l_1(l_2 + l_3)/r_B - \frac{l_1 l_2}{f}(1 - l_3/r_B)\right]。$$

本征模的解仍由(5)式表达。

根据(5)式给出的 W_A 和高斯光束变换定律可求得腔内任一截面上的光斑尺寸 $W(Z)$。于是工作物质内包含的基模模体积 V_0 就不难求出:

$$V_0 = \int_0^{l_0} \pi W^2(Z') dZ',$$

l_0 是工作物质长度。基模的本征值 $|\gamma'|$ 亦可按小孔选模腔的修正方法得出。

兼顾到增益(对应模体积)和损耗的热稳判据为:

$$\partial V_0/\partial f \approx 0, \quad \partial|\gamma_0'|/\partial f \approx 0。$$

计算表明，热透镜处于光腰位置时有最好的热稳定性。由此我们提出了包含选模小孔的热稳腔的设计方法和计算机程序。理论结果已得到实验的证实[12]。

参 考 文 献

[1] Vainshtein; *Sov. Phys. JETP*, 1963, **17**, 707.

[2] H. P. Kortz, H. Weber; *Appl. Opt.*, 1981, **20**, 1936.

[3] Zucker H.; *BSTJ*, 1970, **49**, 2349.

[4] Yariv A., Yeh P.; *Opt. Commun.*, 1975, **13**, 370.

[5] Ganiel V. *et al.*; *Opt. Commun.*, 1975, **14**, 290.

[6] Casperson Lee W., Lunnam S. D.; *Appl. Opt.*, 1975, **14**, 1193.

[7] Ganiel V., Hardy A.; *Appl. Opt.*, 1976, **15**, 2145.

[8] 范滇元;《激光》, 1980, **7**, No. 8, 26.

[9] 方洪烈;"光学谐振腔理论", 第二章, 科学出版社, 1981年.

[10] 余文炎, 王桂英;《光学学报》, 1982, **2**, 349.

[11] Steffen J. *et al.*; *IEEE J, Quant. Electr.*, 1972, **QE-8**, 239.

[12] 范滇元等; Conference on Laser and Electro-Optics(1983), Technical Digest, p. 68.