

# 差频 Ronchi 光栅的频谱特性 与在图象处理中的应用

周 进\* 高文琦

(南京大学物理系)

**提要:** 用两个不同空间频率的 Ronchi 光栅相迭置, 可得到差频 Ronchi 光栅, 文中讨论了这种光栅的频谱特性, 并以此作为滤波器对图象进行一阶、二阶微分处理以及对由于匀速运动而造成的模糊图象进行还原处理。

## The spectral characteristics of a double frequency Ronchi grating and the application in image processing

Zhou Jin, Gao Wenqi

(Department of Physics, Nanjing University)

**Abstract:** A double frequency Ronchi grating is prepared by overlapping two Ronchi gratings of different spatial frequencies. In this paper, the spectral characteristics of such grating is discussed. We used it as a filter to get the first and second order differential processing or to recover images smeared by uniform motion.

在光学图象处理中, 经常需要对图象进行微分处理和对运动模糊图象进行还原处理。人们提出用空间滤波器<sup>[1]</sup>, 如复合余弦光栅<sup>[2]</sup>、计算全息微分滤波器<sup>[3]</sup>等来实现。本文介绍用差频 Ronchi 光栅滤波器作图象的微分处理和还原处理, 得到较好的实验结果。

### 一、基本原理

设  $H_1$ 、 $H_2$  分别为两个周期略有不同的光栅函数, 为简便起见, 令其孔径为无限大,

$$H_1(u) = \text{rect}\left(\frac{u}{a}\right) \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(u - nb)$$

$$H_2(u) = \text{rect}\left(\frac{u}{a - \Delta a}\right)$$

$$\otimes \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[u - m(b - \Delta b) - c]$$

这里  $\otimes$  代表卷积,

$$\text{rect}\left(\frac{u}{a}\right) = \begin{cases} 1 & -\frac{a}{2} < u < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

参数  $a$ 、 $b$ 、 $\Delta a$ 、 $\Delta b$ 、 $c$  见图 1。

显然  $\frac{a - \Delta a}{b - \Delta b} = \frac{a}{b}$

差频 Ronchi 光栅函数为:

收稿日期: 1984 年 8 月 6 日。

\* 南京大学物理系 82 级研究生。

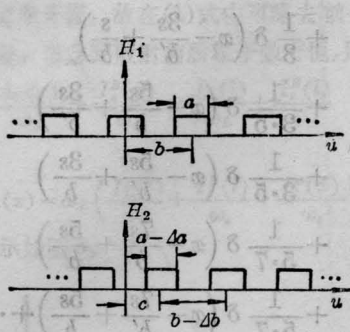


图 1

$$\begin{aligned}
 H(u) &= H_1(u) \cdot H_2(u) \\
 &= \left\{ \text{rect}\left(\frac{u}{a}\right) \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(u - nb) \right\} \\
 &\quad \cdot \left\{ \text{rect}\left(\frac{u}{a - \Delta a}\right) \right. \\
 &\quad \left. \otimes \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[u - m(b - \Delta b) - c] \right\}
 \end{aligned}$$

其频谱:  $h(x) = \mathcal{F}\{H(u)\}$ ,  
 $\mathcal{F}\{\cdot\}$  为傅里叶变换符号。所以

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \mathcal{F}\{H_1(u) \cdot H_2(u)\} \\
 &= \mathcal{F}\left\{ \text{rect}\left(\frac{u}{a}\right) \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(u - nb) \right\} \\
 &\quad \otimes \mathcal{F}\left\{ \text{rect}\left(\frac{u}{a - \Delta a}\right) \right. \\
 &\quad \left. \otimes \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[u - m(b - \Delta b) - c] \right\} \\
 &= A \left\{ \text{sinc}(av) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{b}\right) \right\} \\
 &\quad \otimes \left\{ \text{sinc}[(a - \Delta a)v] \right. \\
 &\quad \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{m}{b - \Delta b}\right) \cdot \exp(-j2\pi\nu c) \left. \right\} \\
 &= A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{na}{b}\right) \\
 &\quad \cdot \text{sinc}\left(\frac{ma}{b}\right) \cdot \delta\left(\nu - \frac{n}{b} - \frac{m}{b - \Delta b}\right) \\
 &\quad \cdot \exp[-j2\pi mc/(b - \Delta b)]
 \end{aligned}$$

式中

$$A = \frac{a^2}{b^2}$$

在光学系统中

$$\nu = \frac{x}{s} \quad s \text{ 为定标因子}$$

若采用  $4f$  系统  $s = \lambda f$ ,  $\lambda$  是波长,  $f$  为透镜焦距。注意到

$$\begin{aligned}
 &\delta\left(\nu - \frac{n}{b} - \frac{m}{b - \Delta b}\right) \\
 &= s\delta\left(x - \frac{ns}{b} - \frac{ms}{b - \Delta b}\right)
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 h(x) &= As \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{na}{b}\right) \\
 &\quad \times \text{sinc}\left(\frac{ma}{b}\right) \delta\left(x - \frac{ns}{b} - \frac{ms}{b - \Delta b}\right) \\
 &\quad \cdot \exp\left\{-j2\pi m \frac{c}{b - \Delta b}\right\}.
 \end{aligned}$$

为了能得到本实验图象处理所需要的频谱, 须有

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2}, \quad \frac{2\pi c}{b - \Delta b} = \pi$$

(这一要求可以通过调节滤波器在频谱面上的位置来满足)。现今  $b' = b - \Delta b$ , 且略去常数因子, 这里列出在 0 级、+1 级、+2 级中起主要作用的几项:

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \left\{ \frac{\pi^2}{4} \delta(x) - \delta\left(x - \frac{s}{b} + \frac{s}{b'}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \delta\left(x - \frac{s}{b'} + \frac{s}{b}\right) \right\} \\
 &\quad + \left\{ \delta\left(x - \frac{s}{b}\right) - \delta\left(x - \frac{s}{b'}\right) \right\} \\
 &\quad + \left\{ -\delta\left(x - \frac{s}{b'} - \frac{s}{b}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{1.3} \delta\left(x - \frac{3s}{b} + \frac{s}{b'}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{1.3} \delta\left(x - \frac{3s}{b'} + \frac{s}{b}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3.5} \delta\left(x - \frac{5s}{b} + \frac{3s}{b'}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3.5} \delta\left(x - \frac{5s}{b'} + \frac{3s}{b}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{5.7} \delta\left(x - \frac{7s}{b'} + \frac{5s}{b}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{5.7} \delta\left(x - \frac{7s}{b} + \frac{5s}{b'}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \dots \right\} + \dots
 \end{aligned}$$

若待处理的物为  $f(x')$ , 其谱为

$$F(u) = \mathcal{F}\{f(x')\},$$

经差频 Ronchi 光栅滤波后得

$$F'(u) = F(u) \cdot H(u),$$

第二次傅里叶变换

$$f'(x) = \mathcal{F}_2\{F(u) \cdot H(u)\},$$

略去常数因子, 注意到

$$\mathcal{F}_2\{\mathcal{F}_1[f(x')]\} = f(x)$$

(这里略去放大倍数), 所以

$$f'(x) = f(x) \otimes h(x)$$

$$= f(x) \otimes \left\{ \frac{\pi^2}{4} \delta(x) - \delta\left(x - \frac{s}{b} + \frac{s}{b'}\right) \right.$$

$$\left. - \delta\left(x + \frac{s}{b} - \frac{s}{b'}\right) \right\}$$

$$+ f(x) \otimes \left\{ \delta\left(x - \frac{s}{b}\right) - \delta\left(x - \frac{s}{b'}\right) \right\}$$

$$+ f(x) \otimes \left\{ -\delta\left(x - \frac{3s}{b} + \frac{s}{b'}\right) \right.$$

$$+ \frac{1}{3} \delta\left(x - \frac{3s}{b'} + \frac{s}{b}\right)$$

$$+ \frac{1}{3} \delta\left(x - \frac{3s}{b} + \frac{s}{b'}\right)$$

$$+ \frac{1}{3 \cdot 5} \delta\left(x - \frac{5s}{b'} + \frac{3s}{b}\right)$$

$$+ \frac{1}{3 \cdot 5} \delta\left(x - \frac{5s}{b} + \frac{3s}{b'}\right)$$

$$+ \frac{1}{5 \cdot 7} \delta\left(x - \frac{7s}{b'} + \frac{5s}{b}\right)$$

$$+ \frac{1}{5 \cdot 7} \delta\left(x - \frac{7s}{b} + \frac{5s}{b'}\right)$$

$$+ \dots \} + \dots,$$

我们感兴趣的是第二项、第三项。

其中第二项是:

$$f'_1(x) = f(x) \otimes \left\{ \delta\left(x - \frac{s}{b}\right) - \delta\left(x - \frac{s}{b'}\right) \right\}$$

$$= f\left(x - \frac{s}{b}\right) - f\left(x - \frac{s}{b'}\right),$$

当  $\frac{s}{b} - \frac{s}{b'}$  很小时, 与一阶微分定义相符合,

其微分宽度为  $\frac{s\Delta b}{b^2}$ 。

第三项是

$$f'_2(x) = f(x) \otimes \left\{ -\delta\left(x - \frac{s}{b} - \frac{s}{b'}\right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} \delta\left(x - \frac{3s}{b} + \frac{s}{b'}\right) \right\}$$

$$+ \frac{1}{3} \delta\left(x - \frac{3s}{b'} + \frac{s}{b}\right)$$

$$+ \frac{1}{3 \cdot 5} \delta\left(x - \frac{5s}{b} + \frac{3s}{b'}\right)$$

$$+ \frac{1}{3 \cdot 5} \delta\left(x - \frac{5s}{b'} + \frac{3s}{b}\right)$$

$$+ \frac{1}{5 \cdot 7} \delta\left(x - \frac{7s}{b} + \frac{5s}{b'}\right)$$

$$+ \frac{1}{5 \cdot 7} \delta\left(x - \frac{7s}{b'} + \frac{5s}{b}\right) + \dots \},$$

利用关系式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = 1,$$

上式可化为

$$f'_2(x) = \frac{1}{3} f(x) \otimes \left\{ \delta\left(x - \frac{3s}{b} + \frac{s}{b'}\right) \right.$$

$$\left. - 2\delta\left(x - \frac{s}{b} - \frac{s}{b'}\right) \right.$$

$$+ \delta\left(x - \frac{3s}{b'} + \frac{s}{b}\right) \left\{ \right.$$

$$+ \frac{1}{15} f(x) \otimes \left\{ \delta\left(x - \frac{5s}{b} + \frac{3s}{b'}\right) \right.$$

$$\left. - 2\delta\left(x - \frac{s}{b'} - \frac{s}{b}\right) \right.$$

$$+ \delta\left(x - \frac{5s}{b'} + \frac{3s}{b}\right) \left\{ \right.$$

$$+ \frac{1}{35} f(x) \otimes \left\{ \delta\left(x - \frac{7s}{b} + \frac{5s}{b'}\right) \right.$$

$$\left. - 2\delta\left(x - \frac{s}{b} - \frac{s}{b'}\right) \right.$$

$$+ \delta\left(x - \frac{7s}{b'} + \frac{5s}{b}\right) \left\{ \right.$$

这是一系列  $f(x)$  的微分宽度不同的二阶微分的迭加。由于后面几项系数比第一项小很多, 故在光学处理中, 有反应的仅是第一项, 它表现出  $f(x)$  的二阶微分。

为了能用图解法表示出这二阶微分的意义, 令

$$f(x) = \text{rect}(x).$$

在理想情况下, 即不考虑系统的影响, 这时二阶微分结果如图 2(a)。实际上, 在光学系统中, 透镜孔径、滤波器的大小、以及离焦等因素对输入图象有平滑作用。这时在上述的公式中所有的  $\delta(\cdot)$  函数将被如  $\sin c(\cdot)$  这



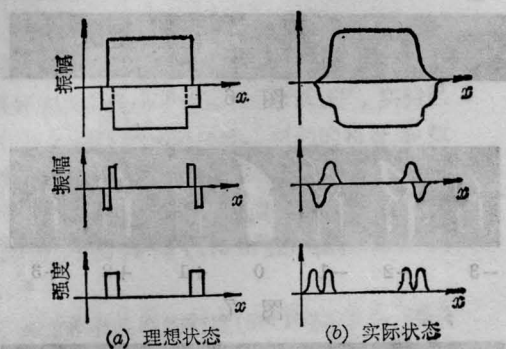


图 2

样的平滑函数所代替, 这时二阶微分将获得如图 2(b) 的双线结构。

最后, 讨论当  $f(x)$  为匀速运动模糊函数的情况。

$$f(x) = \int_0^T g(x+vt) dt$$

其微分

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= \int_0^T \frac{dg(x+vt)}{dx} \frac{dx}{dt} dt \\ &= \frac{1}{v} \{g(x+vT) - g(x)\} \\ df(x) &= \frac{dx}{v} \{g(x+vT) - g(x)\} \end{aligned}$$

可见对这种模糊象进行微分可得到原函数, 但为了使  $g(x+vT)$  与  $g(x)$  不重叠, 则要求  $vT$  要大于  $g(x)$  的宽度。

多次曝光运动模糊象的处理方法基本一致<sup>[4]</sup>。

## 二、滤波器的制作

对一定的物要得到好的处理结果, 滤波器是重要的因素。

首先, 要保证处理后的像所在的级 (设为  $n$ ) 与相邻级 ( $n+1$ ) 上的像不重叠, 从原理部分可知, 它需要满足下列条件:

$$(n+1) \frac{s}{b} - n \frac{s}{b'} \geq ML \quad (\text{像的宽度}).$$

式中  $M$  为放大倍数, 在  $4f$  系统中为  $f_2/f_1$ ,  $L$  为物的宽度,  $s$  为第二透镜傅氏变换的定

标因子, 它等于  $\lambda f_2$ 。

因此  $\frac{s}{M} = \lambda f_1$ , 可以证明此式对实验中系统也成立 (见附录)。则有

$$\frac{\lambda f_1}{b} - n \left( \frac{\lambda f_1}{b - \Delta b} - \frac{\lambda f_1}{b} \right) \geq L,$$

我们需要的是  $n=1$ 。  $n=2$  两级, 且  $\Delta b$  很小, 故可略去左边第二项, 按通常的放宽余量<sup>[3]</sup>取

$$b = \frac{2}{3} \frac{\lambda f_1}{L},$$

其次, 考虑微分线的宽度, 从关系式  $\frac{s}{b^2} \Delta b$  可知, 它依赖于  $s$ 、 $b$ 、 $\Delta b$ 。  $s$  为系统参数, 实验时是一定的;  $b$  在上面已经确定, 所以仅要考虑的是  $\Delta b$ 。从微分定义出发,  $\Delta b$  越小, 微分线越窄, 效果越好。但在光学系统中,  $\Delta b$  太小, 由于系统孔径的限制, 其微分线的亮度将会很快下降。因此  $\Delta b$  大小的最佳确定将依赖于系统的有效孔径。

差频 Ronchi 光栅可用同一红膜光栅掩模以微小差额比例二次缩印于同一底片上制作而成 (图 3)。本实验中我们采用的掩模周期  $b=1\text{mm}$ ,  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ , 掩模总面积为  $0.6 \times 0.6\text{m}^2$ , 缩小倍数为 25 和 25.5。

制作中微小差额比例是通过改变红膜掩模与照像机之间的距离而达到的。要精确地

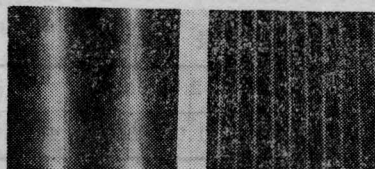


图 3

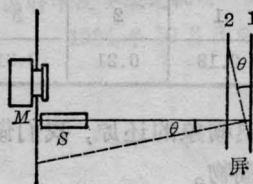


图 4

$M$ —照相机;  $S$ —激光器

控制这种改变,可采用光杠杆原理,如图4,而不需要精密的控制仪器。

### 三、实验结果

#### 1. 实验光路

实验中采用了如图5的光路,物面与象面满足成像关系。这种光路,由于物面 $P_1$ 靠近 $L_2$ ,谱面 $P_2$ 靠近 $L_3$ ,这样透镜 $L_2$ 、 $L_3$ 的边缘所截去的高频分量将减小,有助于得到好的实验结果。



图 5

Z—针孔滤波器;  $L_1$ —准直透镜;  $L_2$ —傅里叶变换透镜;  $L_3$ —成像透镜;  $P_1$ —物平面;  $P_2$ —频谱面;  $P_3$ —象平面

#### 2. 实验物

为不同的目的,我们做了三种物。其一为黑白二元蜡烛物,用来观察一级、二级微分现象;其二为有五个灰度的物,用来观察滤波器所得的一级微分对灰度的灵敏度,物的各灰度的透过率用光密度计测量,结果见表1;其三为宽度各异的四条线,用来观察此滤波器能处理物的最小细节的限度,四条线的宽度见表2。

表 1

灰度级	1	2	3	4	5
透过率(%)	11.0	21.0	34.0	47.0	67.0

表 2

标 号	1	2	3	4
线宽(mm)	0.12	0.21	0.31	0.55

对运动模糊象的还原,我们做了XV字的运动模糊物。

#### 3. 实验结果

差频 Ronchi 光栅频谱见图6。

0 级 +1 +2 +3



图 6



-3 -2 -1 0 +1 +2 +3

图 7



-3 -2 -1 0 +1 +2 +3

图 8

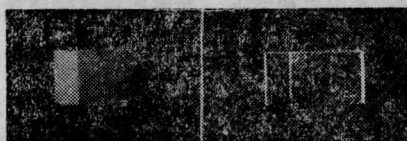


图 9



-1 像 +1

图 10

从照片看,各级光点数与理论结果一致。一级两个光点与二级的三个光点正是我们进行一阶、二阶微分所需要的 $\delta$ 函数。

图7是对二元蜡烛物的微分处理结果。

有趣的是,当底片离开像面一些距离接近时,得到图8的结果。与图7比较,二阶微分的双线变得更加明显。这是因为除了系统孔径对物的平滑作用外又迭加上了一次散焦引起的平滑效应,使图2(b)中 $f'_2(x)$ 的两个相差 $\pi$ 位相的脉冲相迭更多而造成的。

图9给出了五个灰度的一阶微分像。从照片看,微分线基本可辨,它与灰度的梯度成对应的关系,即梯度大,强度也大。

图10给出了滤波器能处理物的最小限

度。标号 3、4 的线能够微分；标号 1 的线则仅能得到两个衍射象；标号 2 的线则处在临界宽度。在本实验系统中，从理论算出最小限度为 0.20 mm，实验和理论是符合的。

图 11 为运动模糊象的还原实验结果，处理后得到运动开始时和运动结束时两个像。要得到好的还原结果，要求运动模糊象在底片的线性区域内曝光，否则用此法处理是比较困难的。



原图 移动像 处理后的像

图 11

#### 四、与复合余弦光栅滤波器的比较

差频 Ronchi 光栅滤波器与余弦复合光栅滤波器相比有如下特点。

1. 在处理结果中可以同时得到一阶微分、二阶微分；
2.  $\pm 1$  级衍射效率高于余弦复合光栅<sup>[5]</sup>；
3. 对制作滤波器的底片的线性性无任何要求；
4. 差频 Ronchi 光栅是在白光下拍摄的，滤波器上可避免相干噪声的影响；
5. 一阶微分对灰度物有较好的灵敏度；
6. 制作简单、方便且灵活。

#### 五 附 录

对图 5 所示的光路，设物面  $P_1$  到  $L_2$ 、谱面  $P_2$  到  $L_3$  以及  $L_3$  到像面  $P_3$  的距离分别为  $d_1$ 、 $d_2$ 、 $d_3$ 。物函数为  $f(x')$ 。

在谱面  $P_2$  有<sup>[8]</sup>，

$$F'(u) = \frac{A}{\lambda f} \exp \left[ j \frac{\pi}{\lambda f_1} \left( 1 - \frac{d_1}{f_1} \right) \right]$$

$$\times (u^2 + v^2) \mathcal{F}\{f(x')\}_{s_1=\lambda f_1}$$

$$F(u) = F'(u) \cdot H(u)$$

$$= \frac{A}{\lambda f} \exp \left[ j \frac{\pi}{2 f_1} \left( 1 - \frac{d_1}{f_1} \right) \right] \times (u^2 + v^2) \mathcal{F}\{f(x')\}_{s_1=\lambda f_1} \cdot H(u)。$$

式中的二次位相因子可等效于一个距  $P_2$  为  $f_1 / \left( 1 - \frac{d_1}{f_1} \right)$  的点光源，用它照明  $P_2$  面上的函数  $\mathcal{F}\{f(x')\}_{s_1=\lambda f_1} \cdot H(u)$ ，在象面  $P_3$  面上可得<sup>[9]</sup>

$$f(x) \propto e^{j \frac{\pi}{\lambda d} (x^2 + y^2)} \cdot \mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(x')\}_{s_1=\lambda f_1} \cdot H(u)\}_{s_2=\lambda d}$$

式中

$$d = \frac{f_2}{f_2 - d_2} \cdot d_2 + d_3,$$

感兴趣的是光强，故可略去二次位相因子。

$$f(x) \propto f \left( \frac{x}{M} \right) \otimes h(x) |_{s_2=\lambda d}$$

式中

$$M = \frac{s_2}{s_1} = \frac{\lambda d}{\lambda f_1}$$

$$\frac{s_2}{M} = \lambda f_1$$

从上面结论可以看出，原理部分的结论可推广到一般系统，仅是定标因子要作相应的改变。

最后，对梁昆淼教授、叶权书副教授给予的指导，丁剑平同志给予的帮助表示感谢。

#### 参 考 文 献

- [1] S. K. Yao, S. H. Lee; *JOSA*, 1971, **61**, No. 4, 474.
- [2] 叶蓉华, 何永蓉; 《南京大学学报》, 1980, No. 3, 33.
- [3] W. H. Lee; *Progress in Optics*, 1976, **XVI**, 179.
- [4] D. P. Jablowski; *Appl. Opt.*, 1973, **62**, 1703.
- [5] S. H. Lee; "Optical Information Processing", New York, p. 58.
- [6] S. H. Lee; *Opt. Eng.*, 1974, **13**, 196.
- [7] S. H. Lee; *Appl. Phys*, 1976, **10**, 203.
- [8] J. W. 顾德门; 《傅里叶光学导论》，科学出版社，p. 98.
- [9] J. D. 加斯基尔; 《线性系统·傅里叶变换·光学》，人民教育出版社，p. 448.