中国激光
第11卷 第9期

光与二能级系统相互作用孤立波方程的精确解

谭维翰 顾敏

(中国科学院上海光机所)

提要：在光与二能级原子系统相互作用的基础上，我们导出相互作用孤立波方程组及其精确解，以及存在解的两个必要条件。

Exact solution to solitary wave equations of light interacting with two-level atomic systems

Tan Weihan, Gu Ming

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: On the basis of light interaction with two-level atomic system, we derive the interaction solitary wave equations, its solution and two necessary conditions for the existence of the solution.

一、引言

在光与原子相互作用理论中，二能级系统的相互作用占有重要位置，光在放大介质中$(2m+1)\pi$脉冲(按面积定理

$$\int \varepsilon\, d\tau=(2m+1)\pi,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

的形成，在吸收介质中自感透明、光子回波等典型问题均与此有关。在这些研究中对二能级相互作用方程的求解是作了很多近似处理的，例如最常用的矢量模型就假定了$1/T_1=1/T_2$；而作为$2m\pi$脉冲出现的判据——面积定理的证明，则是假定了$1/T_1$、$1/T_2\to 0$。虽然这些模型与判据已半定量地描述上述问题，但用于近年来出现的双稳态稳定性分析以及由稳态向混沌态过渡的研究就显得很不够，需要寻求新的方法来解决这些问题。Lamb[1]和Haus[2]等已将孤立波方法应用于研究一般的二能级相互作用，但也作了$1/T_1$、$1/T_2\to 0$的近似。本文主要求得了$1/T_1\neq 0$, $1/T_2\neq 0$的情况下二能级相互作用的孤立波方程的精确解，并导出孤立波存在的两个必要条件。

二、光与二能级原子系统相互作用的孤立波方程

参照文献[3]第二章(9-3)式，我们有：

收稿日期：1983年8月18日。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\omega_a+\gamma_a/2\right)a$$
$$=\frac{ip}{\hbar}[Ee^{-i\omega_0 t+ikx}+\text{c.c}]b \tag{1}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\omega_b+\gamma_b/2\right)b$$
$$=\frac{ip}{\hbar}[Ee^{-i\omega_0 t+ikx}+\text{c.c}]a$$

令：

$$a=v_1 e^{-\frac{i\omega t-ikx}{2}-\frac{i\omega_a+i\omega_b}{2}t}$$
$$b=v_2 e^{\frac{i\omega t-ikx}{2}-\frac{i\omega_a+i\omega_b}{2}t} \tag{2}$$
$$i\bar{\delta}=-\frac{i\omega}{2}+\frac{i\omega_a-i\omega_b}{2},$$
$$E=\widetilde{E}e^{-i(\omega-\omega_0)t}$$

并取旋波近似，便得：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\bar{\delta}+\gamma_a/2\right)v_1=i\frac{p}{\hbar}\widetilde{E}v_2$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-i\bar{\delta}+\gamma_b/2\right)v_2=i\frac{p}{\hbar}\widetilde{E}^*v_1 \tag{3}$$

同样由文献[3](9-10)式得出光波在媒质中的传播方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\nu_i\frac{\partial}{\partial t}-C^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$$
$$\times(Ee^{-i\omega_0 t+kx}+\text{c.c})=4\pi\omega_0^2P$$

采用振幅慢变及旋波近似，我们得：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+C\frac{\partial}{\partial x}+\nu_i\right)\widetilde{E}$$
$$=i\,2\pi\,\omega_0 n_0 p v_1 v_2^* \tag{4}$$

对(3)、(4)式作变数变换 $\varepsilon=ip\widetilde{E}/\hbar$，便得：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\bar{\delta}+\gamma_a/2\right)v_1=\varepsilon v_2$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-i\bar{\delta}+\gamma_b/2\right)v_2=-\varepsilon^*v_1 \tag{5}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+C\frac{\partial}{\partial x}+\nu_i\right)\varepsilon$$
$$=-2\pi\omega_0 n_0 p^2\hbar^{-1}v_1v_2^*$$

换变数 $x=x,\ \bar{t}=t-x/C,\ \mu=2\pi\omega_0 n_0 p^2/\hbar$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}}+i\bar{\delta}+\gamma_a/2\right)v_1=\varepsilon v_2$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}}-i\bar{\delta}+\gamma_b/2\right)v_2=-\varepsilon^*v_1 \tag{6}$$
$$\left(C\frac{\partial}{\partial x}+\nu_i\right)\varepsilon=-\mu v_1v_2^*$$

当 $\gamma_a=\gamma_b=0$ 时(6)式就是 Haus 得出的二能级系统孤立波方程。

为了与文献[4]符号一致，并使(6)具有一般的形式，令 $\varepsilon\to r,\ -\varepsilon^*\to q,\ \bar{t}\to x,\ C\to t$，便到：

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\bar{\delta}+\gamma_a/2\right)v_1=rv_2$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\bar{\delta}+\gamma_b/2\right)v_2=qv_1 \tag{7}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu_i\right)r=-\mu v_1v_2^*$$

令 $v_1=\varphi e^{-\frac{\gamma_a+\gamma_b}{4}x}$，$v_2=\psi e^{-\frac{\gamma_a+\gamma_b}{4}x}$，$\delta=\bar{\delta}+i\frac{\gamma_b-\gamma_a}{4}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\delta\right)\varphi=r\psi$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\delta\right)\psi=q\varphi \tag{8}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu_i\right)r=-\mu e^{-\frac{\gamma_a+\gamma_b}{2}x}\varphi\psi^*$$

三、光与二能级原子系统相互作用孤立波方程的解

现写出(8)式孤立波方程的解，将 r、q 看成散射势，φ, ψ 可表示为：

$$\begin{pmatrix}\varphi e^{i\delta x}\\ \psi e^{i\delta x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\int_{-\infty}^{x}dy\times\begin{pmatrix}0 & r\\ qe^{i2\delta(x-y)} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi e^{i\delta y}\\ \psi e^{i\delta y}\end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\begin{pmatrix}\bar{\varphi}e^{-i\delta x}\\ \bar{\psi}e^{-i\delta x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+\int_{-\infty}^{x}dy\begin{pmatrix}0 & re^{-i2\delta(x-y)}\\ q & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\varphi}e^{-i\delta y}\\ \bar{\psi}e^{-i\delta y}\end{pmatrix} \tag{10}$$

(9)、(10)式分别为 δ 的上半平面、下半平面解析函数。以(9)式为例，应用(9)式进行叠代，

令 $$u(x,y)=\begin{pmatrix}0 & r\\ qe^{2i\delta(x-y)} & 0\end{pmatrix}$$

$$R(x)=\int_{-\infty}^{x}dy\max(|r(y)|,\ |q(y)|)$$

则

$$\begin{pmatrix}\varphi e^{i\delta x}\\ \psi e^{i\delta x}\end{pmatrix}=\Big(I+\int_{-\infty}^{x}dyu(x,\ y)+\int_{-\infty}^{x}dy\,u(x,\ y)\times\int_{-\infty}^{y}dy'\,u(y,\ y')+\cdots\Big)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad(11)$$

当 $\operatorname{Im}\delta>0$ 时,

$$\begin{pmatrix}|\varphi e^{i\delta x}|\\ |\psi e^{i\delta x}|\end{pmatrix}\leqslant\Big[I+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{p}R^{p}(x)\Big]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad(12)$$

当 $R(+\infty)<\infty$ 时,上式绝对收敛,同理可证在 $\operatorname{Im}\delta<0$ 时(10)式绝对收敛。

参照文献[4],(9)、(10)又可用逆散射方法求解:

$$\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{i\delta x}+\int_{-\infty}^{x}g(x,\ y)e^{-i\delta y}\,dy\quad(13)$$

$$\begin{pmatrix}\bar\varphi\\ \bar\psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}e^{i\delta x}+\int_{-\infty}^{x}\bar g(x,\ y)e^{i\delta y}\,dy\quad(14)$$

而列函数 $g=\begin{pmatrix}g_1\\g_2\end{pmatrix}$, $\bar g=\begin{pmatrix}\bar g_1\\ \bar g_2\end{pmatrix}$, 又满足积分方程

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}F(x+y)+\int_{-\infty}^{x}F(y+y')g(x,y')dy'=\bar g(x,y)\quad(15)$$

$$\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\bar F(x+y)+\int_{-\infty}^{x}\bar F(y+y')\bar g(x,\ y')dy'=g(x,\ y)\quad(16)$$

g、$\bar g$ 与 r、q 的关系为(参见附录)

$$r=-2\bar g_1(x,\ x)\quad q=2g_2(x,\ x)\quad(17)$$

(15)、(16)为关于孤立波的积分方程,由文献[5]的分析,得出存在孤立波有一定的条件。现假定存在一个孤立波(对存在 N 个孤立波的讨论是类似的)则可取:

$$F(x)=d(t)e^{-i\zeta x},\quad \bar F(x)=\bar d(t)e^{i\bar\zeta x}\quad(18)$$

函数 $d(t)$、$\bar d(t)$ 需要由(8)的第3个方程来确定。将(18)代入(15)、(16)式得:

$$\begin{aligned}
&d(t)\int_{-\infty}^{x}e^{-i\zeta(y+y')}g_2(x,\ y')dy'=\bar g_2(x,\ y)\\
&d(t)\Big[e^{-i\zeta(x+y)}+\int_{-\infty}^{x}e^{-i\zeta(y+y')}g_1(x,\ y')dy'\Big]=\bar g_1(x,\ y)\\
&\bar d(t)\Big[-e^{i\bar\zeta(x+y)}+\int_{-\infty}^{x}e^{i\bar\zeta(y+y')}\bar g_2(x,\ y')\,dy'\Big]=g_2(x,\ y)\\
&\bar d(t)\int_{-\infty}^{x}e^{i\bar\zeta(y+y')}\bar g_1(x,\ y')dy'=g_1(x,\ y)
\end{aligned}\quad(19)$$

解联立方程(19)式的第1、3式

$$\begin{aligned}
&g_2(x,\ y)=\bar h e^{i\bar\zeta y},\ \bar g_2(x,\ y)=he^{-i\zeta y}\\
&d(t)\frac{\bar h e^{-i(\zeta-\bar\zeta)x}}{-i(\zeta-\zeta)}=h\\
&\bar d(t)\Big[-e^{-i\bar\zeta x}+h\frac{e^{-i(\zeta-\bar\zeta)x}}{-i(\zeta-\zeta)}\Big]=\bar h
\end{aligned}\quad(20)$$

解得 $\bar h=-\bar d(t)e^{i\zeta x}/D$,

$$\begin{aligned}
&h=d(t)\bar d(t)e^{-i(\zeta-\bar\zeta)x+i\bar\zeta x}/i(\zeta-\zeta)D\\
&D=1+\frac{d(t)\bar d(t)e^{-i2(\zeta-\zeta)x}}{(\zeta-\zeta)^2}\\
&q=2\bar h e^{i\zeta x}
\end{aligned}\quad(21)$$

同样解联立方程(19)式的第2、4式

$$\begin{aligned}
&g_1(x,\ y)=\bar k e^{i\bar\zeta y},\ \bar g_1(x,\ y)=ke^{-i\zeta y}\\
&d(t)\Big[e^{-i\bar\zeta x}+\bar k\,\frac{e^{-i(\zeta-\bar\zeta)x}}{-i(\zeta-\zeta)}\Big]=k\\
&\bar d(t)k\frac{e^{-i(\zeta-\zeta)x}}{-i(\zeta-\zeta)}=\bar k
\end{aligned}\quad(22)$$

解得 $k=d(t)e^{-i\zeta x}/D$

$$\begin{aligned}
&\bar k=\frac{d(t)\bar d(t)e^{-i(\zeta-\bar\zeta)x-i\zeta x}}{-i(\zeta-\zeta)D}\\
&r=-2ke^{-i\zeta x}
\end{aligned}\quad(23)$$

由(13)、(20)~(23)得

$$\varphi=e^{-i\delta x}+\int_{-\infty}^{x} g_1(x,\ y)e^{-i\zeta y}\,dy$$

$$=e^{-i\delta x}+\frac{\bar{k}e^{i(\bar{\zeta}-\delta)x}}{i(\zeta-\delta)} \tag{24}$$

$$\psi=\int_{-\infty}^{x} g_2(x,\ y)e^{-i\delta y}\,dy$$

$$=\frac{-\bar{d}(t)e^{i(2\bar{\zeta}-\delta)x}}{i(\zeta-\delta)D} \tag{25}$$

为保证积分方程(19)收敛,应取

$$\zeta=\xi+i\eta/2,\ \bar{\zeta}=\xi-i\eta/2,\ \eta>0 \tag{26}$$

这里应指出上面(20)、(22)、(24)、(25)式的推导均用了(26)式。

又考虑到 $r=\varepsilon$, $q=-\varepsilon^*$, 有

$$\bar{d}(t)=-d^*(t) \tag{27}$$

由(21)、(23)、(26)、(27)得

$$\begin{aligned} D&=1+\frac{|d(t)|^2}{\eta^2}e^{2\eta x} \\ q&=2\,\frac{d^*(t)}{D}\,e^{i2\bar{\zeta}x} \end{aligned} \tag{28}$$

$$r=-2\,\frac{d(t)}{D}\,e^{-i2\zeta x} \tag{29}$$

由(24)、(25)得

$$\varphi\psi^*=\frac{id(t)}{D}\frac{1}{\zeta-\delta^*}$$

$$\times\left(1+\frac{\bar{k}e^{i\zeta x}}{i(\bar{\zeta}-\delta)}\right)e^{-i2\zeta x+i(\delta^*-\delta)x} \tag{30}$$

先按 Haus[2] 的简化求解 $d(t)$

当 $x\to-\infty$, $D\to 1$, $\varphi\to e^{-i\delta x}$

$$\varphi\psi^*\to id(t)e^{-i2\zeta x+i(\delta^*-\delta)x}/(\zeta-\delta^*) \tag{31}$$

$$r\to-2d(t)e^{-i2\zeta x}$$

$$q\to 2d^*(t)e^{i2\bar{\zeta}x}$$

将(31)式代入(8)的第(3)式,并令

$$\delta_i=\frac{\gamma_a+\gamma_b}{2},\quad \delta=\delta_r+\frac{i\delta_i}{2} \tag{32}$$

$$2\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu_i\right)d(t)=\frac{i\mu d(t)}{\xi-\delta_r+i(\eta+\delta_i)/2}$$

$$d(t)=d(0)e^{-(\nu_i-i\mu/[2(\xi-\delta_r)+i(\eta+\delta_i)])t}$$

$$=\eta e^{-\eta(x_0+\beta_0 t+i\beta_1 t)}$$

$$\eta\beta_0=\nu_i-\mu\,\frac{(\eta+\delta_i)}{4(\xi-\delta_r)^2+(\eta+\delta_i)^2}$$

$$=\nu_i-\frac{\mu}{\eta+\delta_i}\cdot\frac{1}{1+X^2}$$

$$\eta\beta_1=-\mu\,\frac{2(\xi-\delta_r)}{4(\xi-\delta_r)^2+(\eta+\delta_i)^2}$$

$$=-\frac{\mu X}{(\eta+\delta_i)(1+X^2)} \tag{33}$$

$$X=\frac{2(\xi-\delta_r)}{\eta+\delta_i}$$

将(33)中 $d(t)$ 代入 D 及 r 的表达式(28)、(29)中

$$\begin{aligned} D&=2e^{\eta(x-x_0-\beta_0 t)}\cosh\eta(x-x_0-\beta_0 t) \\ r&=-\eta e^{-i(2\xi x+\eta\beta_1 t)}\operatorname{sech}\eta(x-x_0-\beta_0 t) \end{aligned} \tag{34}$$

应注意到对于 $x\nrightarrow-\infty$ 的情形，由于 D 与 t 有关，(34)式并不满足(8)的第3式，因而不是(8)的精确解。现进一步求 $d(t)$ 的精确解，不用 Haus 简化，由(23)、(21)、(27)、(24)得

$$\varphi=\left[1+\frac{\zeta-\bar{\zeta}}{\zeta-\delta}\left(1-\frac{1}{D}\right)\right]e^{-i\delta x}$$

$$=\left[1+\frac{i\eta}{\xi-\delta_r-i(\eta+\delta_i)/2}\left(1-\frac{1}{D}\right)\right]e^{-i\delta x} \tag{35}$$

由(35)、(25)式得出 $\varphi\psi^*$ 中 $1/D^2$ 与 $1/D$ 的系数比为:

$$\rho=\frac{\left(\dfrac{-i\eta}{\xi-\delta_r-i(\eta+\delta_i)/2}\right)}{\left(1+\dfrac{i\eta}{(\xi-\delta_r)-i(\eta+\delta_i)/2}\right)} \tag{36}$$

又由(34)得

$$\frac{\partial D}{\partial t}=-2\eta\beta_0(D-1) \tag{37}$$

由(29)式得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu_i\right)r\propto\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu_i\right)\frac{d(t)}{D}$$

$$=\frac{d(t)}{D}\left[\frac{\partial\ln d(t)}{\partial t}+\nu_i-\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial t}\right]$$

$$=\frac{d(t)}{D}\Big[-\eta(\beta_0+i\beta_1)+\nu_i$$

$$+2\eta\beta_0\left(1-\frac{1}{D}\right)\Big] \tag{38}$$

故 $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\nu_i\right)r$ 中 $1/D^2$ 与 $1/D$ 的系数比为:

$$\rho'=\frac{-2\eta\beta_0}{-\eta(\beta_0+i\beta_1)+\nu_i+2\eta\beta_0} \tag{39}$$

令 $\rho=\rho'$ 便得:

$$\frac{\nu_i}{\eta\beta_0}=-\frac{\delta_i}{\eta},\quad \frac{\beta_1}{\beta_0}=2(\xi-\delta_r)/\eta \tag{40}$$

由(33)、(40)消去β_0、β_1，得:

$$\mu=\nu_i(1+X^2)\frac{(\eta+\delta_i)^2}{\delta_i} \tag{41}$$

注意到(26)及(32)

$$\eta>0,\ \delta_i=\frac{\gamma_a+\gamma_b}{2}=\frac{1}{T_2}>0$$

故(41)式也可写为

$$\mu\geqslant\nu_i\frac{(\eta+\delta_i)^2}{\delta_i}\geqslant\nu_i\delta_i=\frac{\nu_i}{T_2} \tag{42}$$

本文导出$R(\infty)<\infty$及(42)式作为孤立波存在的必要条件，前者是关于光强的；后者是关于粒子数浓度的。当然它们不是充分条件，但与引言中提到的面积定理结合在一起，有可能就是孤立波存在的充要条件，但有待于进一步证明。当这些条件得到满足后，电振动振幅将以孤立(34)式的形式在介质内传输。(34)式是一个孤立波的解析解，对于$n(>1)$个孤立波情形讨论是类似的，只需将(18)、(20)、(22)式推广为：

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n}d_j(t)e^{-i\zeta_j x},\quad \overline{F}(x)=\sum_{j=1}^{n}\overline{d}_j(t)e^{i\overline{\zeta}_j x} \tag{43}$$

$$g_2(x,\ y)=\sum_{j=1}^{n}\overline{h}_j e^{i\overline{\zeta}_j y},\quad \overline{g}_2(x,\ y)=\sum_{j=1}^{n}h_j e^{-i\zeta_j y}$$

$$g_1(x,\ y)=\sum_{j=1}^{n}\overline{k}_j e^{i\overline{\zeta}_j y},\quad \overline{g}_1(x,\ y)=\sum_{j=1}^{n}k_j e^{-i\zeta_j y} \tag{44}$$

其他均可类似地进行。

附　　录

i. 由(9)式

$$\psi e^{i\delta x}=\int_{-\infty}^{x}qe^{i2\delta(x-y)}\varphi e^{i\delta y}\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{x}qe^{i2\delta(x-y)}\left[1+\int_{-\infty}^{y}r\psi e^{i\delta y'}\,dy'\right]dy$$

$$=\frac{1}{2i\delta}q+O\left(\frac{1}{\delta^2}\right) \tag{A1}$$

由(13)式

$$\psi=\frac{1}{i\delta}g_2(x,\ x)e^{-i\delta x}+O\left(\frac{1}{\delta^2}\right) \tag{A2}$$

比较(A1)、(A2)得:

$$q=2g_2(x,\ x) \tag{A3}$$

ii. 由(10)式

$$\overline{\varphi}e^{-i\delta x}=\int_{-\infty}^{x}re^{-i\delta(x-y)}\overline{\psi}e^{-i\delta y}\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{x}re^{-i2\delta(x-y)}$$

$$\times\left[-1+\int_{-\infty}^{y}q\overline{\psi}e^{-i\delta y'}\,dy'\right]dy$$

$$=\frac{-1}{2i\delta}r+O\left(\frac{1}{\delta^2}\right) \tag{A4}$$

由(14)式

$$\overline{\varphi}=\frac{1}{i\delta}\overline{g}_1(x,\ x)e^{i\delta x}+O\left(\frac{1}{\delta^2}\right) \tag{A5}$$

比较(A4)、(A5)得:

$$r=-2\overline{g}_1(x,\ x) \tag{A6}$$

iii. 将$g\to-L$, $\overline{g}\to-\overline{L}$, $F\to G$, $\overline{F}\to-\overline{G}$, (13)～(16)式便过渡到文献[4]中的(4.36)、(4.37)、(4.39a)、(4.39b)诸式。

参　考　文　献

[1] G. L. Lamb; *Re v. Mod. Phys.*, 1971, **43**, 99.

[2] H. A. Haus; *Rev. Mod. Phys.*, 1979, **51**, 331.

[3] 《固体激光导论》，上海人民出版社，1974年.

[4] M. J. Ablowitz *et al.*; *Studies in Appl. Math.*, 1974, **53**, 249.

[5] D. J. Kaup; *Studies in Appl. Math.*, 1976, **55**, 9.

[6] A. C. Scott *et al.*; *Proc. IEEE*, 1973, **61**, 1443.

(上接第531页)

结果可见：适当提高气流温度，适当增加H_2的含量和适当减少束流速度，对提高激光功率有利。但这些仅是从极有限的计算数据中得到的，实际结论尚需系统计算(系统变化各种初始条件例如温度、压力、浓度、流速等)。

参　考　文　献

[1] H. Mirele *et al.*; *AIAA Paper*, 1972, No. 72～145.

[2] W. S. King *et al.*; *AIAA J.*, 1972, **10**, No. 12, 1647.

[3] A. P. Kothari *et al.*; *AIAA Paper*, 1979, No. 79～0009.

[4] H. Mirels; *AIAA J.*, 1976, **14**, No. 7, 930.

[5] F. A. Williams; 《燃烧理论》，第十二章，p. 291～331，科学出版社，1976.

[6] R. C. Lock; *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 1951, **4**, 42.

[7] S. N. Suchard *et al.*; *J. Chem. Phys.*, 1972, **57**, No. 12, 5065.

[8] 陈锡荣等；《中国激光》，1983, **10**, No. 3, 129.

[9] S. I. Pai; Fluid Dynamics of Jets, p. 212 and p. 79, D. Van Nostrand Co., Princeton (1954).