中国激光
第11卷　第8期

利用冗余度性质产生多重针孔象

高文琦　叶权书

（南京大学物理系）

提要：根据信息论中增加冗余度可以提高信噪比的概念，本文提出一种制作多重针孔像全息图的新方法，它可以避免制作蝇眼透镜实物的困难；同时计算及绘制计算全息图的工作量不需很大。

Production of fly's-eye holograms by using redundancy

Gao Wenqi　Ye Quanshu

(Department of Physics, Nanjing University)

Abstract: According to the information theory, the ratio of signal and noise can be improved by increasing redundancy. This paper gives a new method of producing fly's-eye holograms, which needs no real fly's-eye lenz, and the labour of computing and plotting hologram can be spared too.

一、引　言

当一函数 $f(x, y)$ 与一 δ 函数阵列卷积时，将获得该函数的阵列重复图象：

$$f(x, y) * \sum_{i,j}\delta(x-i\Delta x, y-j\Delta y) = \sum_{i,j} f(x-i\Delta x, y-j\Delta y) \quad (1)$$

此结果称为阵列定理(Array Theorem)[1]。应用阵列定理以获得多重象，始终是全息技术应用中引人入胜的课题[2~5]。此中关键是作出一能再现高质量多重针孔像（δ 函数阵列）的全息图。用一般光全息方法，需先制作蝇眼透镜实物，然后拍此蝇眼透镜焦点阵的全息图。当多重像所需数字甚大（例如 $10\times10=100$）时，制作蝇眼透镜需要把 100 个小透镜整齐排列，并使它们焦点位于同一平面上，避免产生盲点，这在工艺上是件非常困难的工作。

利用计算全息的方法制作此种全息图，勿需蝇眼透镜实物，这是计算全息方法一大优点。但是当蝇眼透镜数甚大（例如 $10\times10=100$），质量要求较高（例如要求亮点间距离为亮点本身大小的十倍）时，取样点数必须相当大（将为 $10^2\times10^2=10^4$），这样多取样点的计算全息图的计算及绘制也不是件易事。

本文提出一种新的方案，可以减轻以上困难。其根据是信息论中增加冗余度可以提

收稿日期：1983年5月31日。

高信噪比的概念。它的要点是，先制作一能再现均匀方形亮斑的计算全息图，取样点数不多(16×16 或 32×32)，计算及绘制工作量均不大，然后用重复步进照相机将全息图有规则地延拓，就能得到能再现高质量多重针孔象的图(针孔数 $11\times11=121$)。这里延拓实质上就是增加冗余度，按一定规律延拓就可以达到压低背景噪音，突出多重针孔亮度(提高信噪比)的目的。

二、原　理

1. 频谱的计算方法

均匀方形亮斑及其频谱为二维矩函数及 sinc 函数，以下为了简单起见，只讨论一维情况。

$$\mathrm{rect}\left(\frac{x}{D}\right)\supset D\,\mathrm{sinc}(\pi D\xi) \tag{2}$$

式中 $\supset$ 表示傅氏变换，x、ξ 号分别为物及频谱的自变量，D 为矩函数的宽度。在计算全息中物及频谱均取离散值，以 δx、$\delta\xi$、Δx、$\Delta\xi$ 分别表示物、频谱的取样点距和取值范围；N 为取样点总数 $\Delta x=N\delta x$, $\Delta\xi=N\delta\xi$；L 为对应于矩函数宽度 D 的取样点数，$D=L\delta x$；k、p 为取样点序数 $x=k\delta x$, $\xi=p\delta\xi$；依据 D. F. T. 特性，我们有以下关系式：

$$\delta x=\frac{\Delta x}{N}=\frac{1}{\Delta\xi}\quad \delta\xi=\frac{\Delta\xi}{N}=\frac{1}{\Delta x}\quad \delta x\cdot\delta\xi=\frac{1}{N} \tag{3}$$

(2)式可以写作

$$\mathrm{rect}\left(\frac{k}{L}\right)\supset\frac{N\delta x}{p\pi}\sin\left(\pi\frac{L}{N}p\right)$$

$$k,\ p=-\frac{N}{2},\ -\frac{N}{2}+1,\ \cdots 0,\ 1,\ \cdots,\ \frac{N}{2}-1 \tag{4}$$

以下计算频谱均用(4)式。不用通用的 F. F. T. 方法而用本法是为了避免 Aliasing 误差[6]。频谱延拓的方法有两种：大延拓及小延拓，分别介绍于下。

2. 大延拓

以 $A(\xi)$ 表示物函数 $a(x)$ 的频谱，为了简单起见，不考虑频谱与计算全息图的区别(计算全息图为频谱的模拟)，可认为 $A(\xi)$ 即计算全息图。所谓大延拓即将整个全息图向右延拓 $T-1$ 次，简称为一翻 T(如为二维则为一翻 $T\times T$)，所得图形为 $A_T(\xi)$，

$$\begin{aligned}A_T(\xi)&=A(\xi)*\sum_{t=0}^{T-1}\delta(\xi-t\Delta\xi)\\&=\sum_{t=0}^{T-1}A(\xi-t\Delta\xi)\end{aligned} \tag{5}$$

式中 $\Delta\xi$ 为延拓前计算全息图的宽度(即计算得的频谱带宽)，延拓后宽度增大 T 倍，整个全息图面积增大 T^2 倍。大延拓后对再现象 $a_T(x)$ 的影响可分析如下：

$$\begin{aligned}A_T(\xi)&\subset a_T(x)\\&=a(x)\sum_{t=0}^{T-1}e^{-j2\pi t\Delta\xi x}\\&=a(x)\sum_{t=0}^{T-1}e^{-j2\pi tx/\delta x}\\&=a(x)\frac{1-e^{-j2\pi Tx/\delta x}}{1-e^{-j2\pi x/\delta x}}\\&=\begin{cases}Ta(x) & \text{当 } x=0,\ \pm\delta x,\ \pm2\delta x,\cdots\\0 & \text{当 } x=\pm\dfrac{\delta x}{T},\\ & \quad\pm2\dfrac{\delta x}{T},\cdots\end{cases}\end{aligned} \tag{6}$$

大延拓使再现象附加一调制因子，它让再现象中原取样点振幅加大 T 倍，强度加强 T^2 倍，在相邻两加强点之间则插入 $T-1$ 个零。因此当 T 甚大时，此作用有如光栅，使原来均匀亮斑内出现整齐排列的亮点点阵，这就是我们所需要的多重针孔再现象。多重针孔象的范围即原均匀方形亮斑的范围，它不受大延拓次数的影响。针孔数(亮点数)等于原亮斑内取样点数，也与大延拓次数无关。

实际上计算全息图由离散点组成，离散点距为 $\delta\xi$，所以再现象以 $\Delta x=\dfrac{1}{\delta\xi}$ 为周期向左右延拓。

3. 小延拓

大延拓是整个全息图的延拓(宏观延

拓），小延拓则是全息图各离散值就近延拓（微观延拓），可用图1说明。图1(b)中$A_S(\xi)$是全息图$A(\xi)$原有的离散值：

$$A_S(\xi)=\sum_{i=-N/2}^{N/2-1}A(i\delta\xi)\delta(\xi-i\delta\xi)$$
$$=A(\xi)\sum_{i=-N/2}^{N/2-1}\delta(\xi-i\delta\xi)$$
$$=\mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{N\delta\xi}\right)A(\xi)\times\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(\xi-i\delta\xi) \qquad (7)$$

$a_S(x)$为其再现象：

$$A_S(\xi)\subset a_S(x)=N\delta\xi\,\mathrm{sinc}(\pi N\delta\xi x)*a(x)*\left[\frac{1}{\delta\xi}\times\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta\left(x-\frac{i}{\delta\xi}\right)\right] \qquad (8)$$

当N甚大时：

$$N\,\mathrm{sinc}(\pi N\delta\xi x)\longrightarrow\frac{1}{\delta\xi}\delta(x)=\Delta x\delta(x)$$

故得：

$$A_S(\xi)\subset a_S(x)$$
$$=a(x)*\Delta x\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(x-i\Delta x)$$
$$=\Delta x\sum_{i=-\infty}^{\infty}a(x-i\Delta x) \qquad (9)$$

以下为了小延拓，必须先将原有的离散点拉开。假定拉宽M倍，全息图由$A(\xi)$变为$A\left(\frac{\xi}{M}\right)$，再现象由$a(x)$变为$Ma(Mx)$，如图1(c)。再取离散值，离散点距$M\delta\xi$，全息图变为$A_S\left(\frac{\xi}{M}\right)$：

$$A_S\left(\frac{\xi}{M}\right)=A\left(\frac{\xi}{M}\right)\sum_{i=-N/2}^{N/2-1}\delta(\xi-iM\delta\xi)$$
$$=\sum_{i=-N/2}^{N/2-1}A(i\delta\xi)\delta(\xi-iM\delta\xi) \qquad (10)$$

相应地它的再现象变为$Ma_S(Mx)$：

$$Ma_S(Mx)=M\Delta x\sum_{i=-\infty}^{\infty}a(Mx-i\Delta x) \qquad (11)$$

它们的图象如图1(d)。注意全息图宽度展宽M倍，面积增大M^2倍，再现象位置不变，宽度由Δx缩为$\frac{\Delta x}{M}$，振幅由Δx增为$M\Delta x$。

全息图宽度展宽M倍后，离散点距也拉大M倍，将各离散值依次就近向右延拓$M-1$次，以填补拉开的距离，所得图形为$A_{SM}(\xi)$。

$$A_{SM}(\xi)=A_S\left(\frac{\xi}{M}\right)*\sum_{m=0}^{M-1}\delta(\xi-m\delta\xi)$$
$$=\sum_{m=0}^{M-1}A_S\left(\frac{\xi-m\delta\xi}{M}\right) \qquad (12)$$

它的再现象为$a_{SM}(x)$。

$$A_{SM}(\xi)\subset a_{SM}(x)$$
$$=Ma_S(Mx)\sum_{m=0}^{M-1}e^{-j2\pi m\delta\xi x}$$
$$=Ma_S(Mx)\sum_{m=0}^{M-1}e^{-j2\pi mx/\Delta x}$$
$$=Ma_S(Mx)\frac{1-e^{-j2\pi Mx/\Delta x}}{1-e^{-j2\pi x/\Delta x}}$$
$$=\begin{cases}M^2a_S(Mx)=M^2\Delta x\sum_{i=-\infty}^{\infty}a(Mx-i\Delta x) & \text{当 } x=0,\ \pm\Delta x,\ \pm2\Delta x,\ \cdots\\ 0 & \text{当 } x=\pm\frac{\Delta x}{M},\ \pm\frac{2\Delta x}{M},\cdots\end{cases} \qquad (13)$$

图1(e)右边是再现象$a_{SM}(x)$的振幅$|a_{SM}(x)|$，与图1(d)相比可见小延拓使$Ma_s(Mx)$再受一附加因子调制，它使$x=0,\pm\Delta x,\pm2\Delta x$，…处再现象振幅再增强$M$倍（连前共增强$M^2$倍，强度增强$M^4$倍），而在

$$x=\pm\frac{\Delta x}{M},\ \pm\frac{2\Delta x}{M},\ \cdots$$

处插零，将这附近的象压低。正是由于这种有选择地增强，才能在全息图面积增大M^2倍的条件下，使所需要地方的再现象强度增强M^4倍，从而显著提高信噪比。

以上是全息图面积随小延拓而增大M^2倍时的情况。如果小延拓后让全息图面积再缩小$\frac{1}{M^2}$倍，使与未延拓前相等，经过计算可以发现，由于小延拓有选择的加强作用，所需地方的再现象强度仍可比未延拓前增强M^2倍，而离零级的相对距离增大M倍，减低

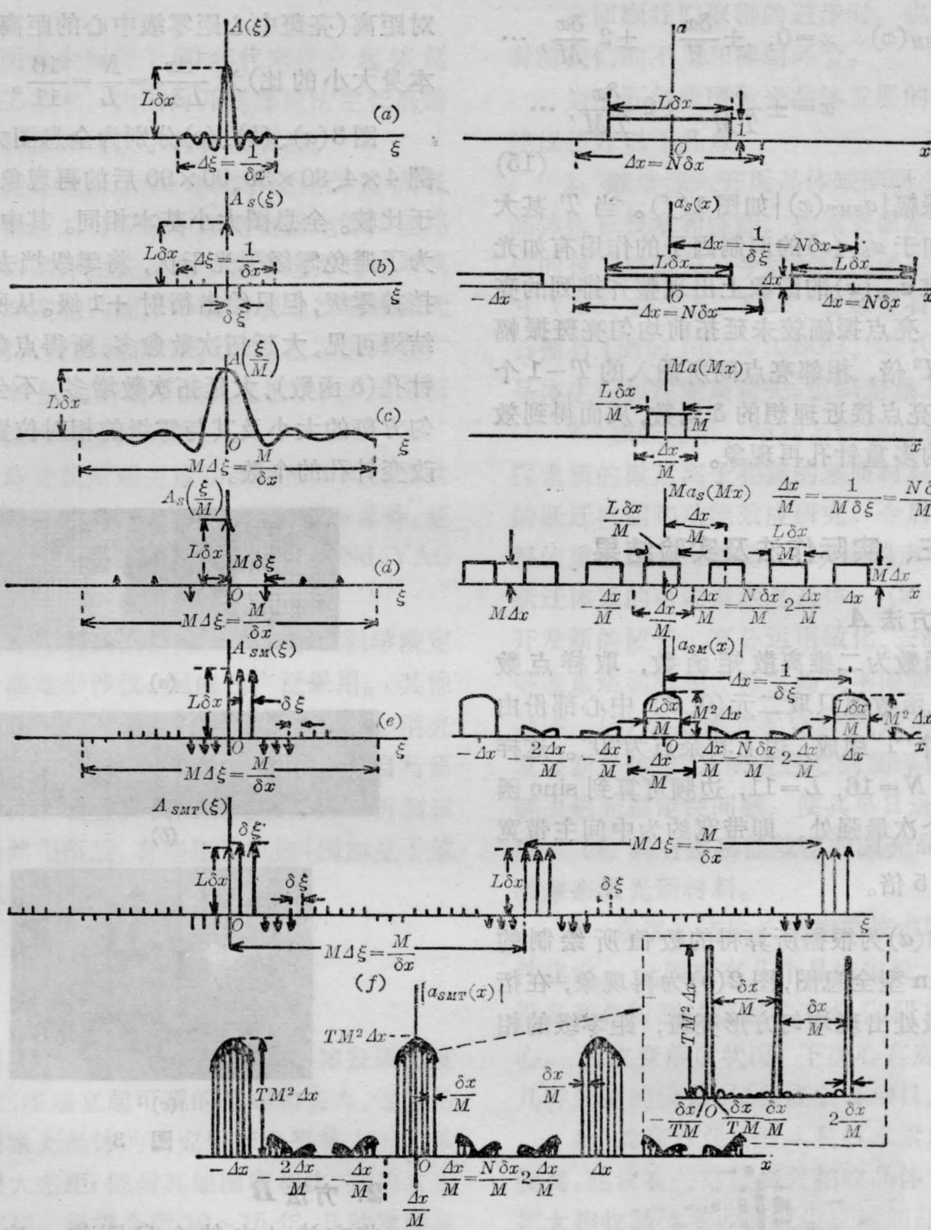


图 1

零级强光的干扰，同样能显著提高再现象的信噪比。

只进行小延拓不能产生多重针孔再现象，还必须大延拓。设小延拓后再大延拓 $T-1$ 次，全息图由 $A_{SM}(\xi)$ 变为 $A_{SMT}(\xi)$。

$$A_{SMT}(\xi)=A_{SM}(\xi)*\sum_{t=0}^{T-1}\delta(\xi-tM\Delta\xi)$$

$$=\sum_{t=0}^{T-1}A_{SM}(\xi-tM\Delta\xi) \qquad (14)$$

类似地，再现象 $a_{SMT}(x)$ 可写为

$$A_{SMT}(\xi)\subset a_{SMT}(x)$$

$$=a_{SM}(x)\sum_{t=0}^{T-1}e^{-j2\pi tM\Delta\xi x}$$

$$=a_{SM}(x)\sum_{t=0}^{T-1}e^{-j2\pi tMx/\Delta x}$$

$$=a_{SM}(x)\frac{1-e^{-j2\pi TMx/\Delta x}}{1-e^{-j2\pi Mx/\Delta x}}$$

$$
=\begin{cases} Ta_{SM}(x) & x=0,\ \pm\dfrac{\delta x}{M},\ \ \pm 2\,\dfrac{\delta x}{M},\ \cdots \\ 0 & x=\pm\dfrac{\delta x}{TM},\ \pm 2\,\dfrac{\delta x}{TM},\ \cdots \end{cases} \tag{15}
$$

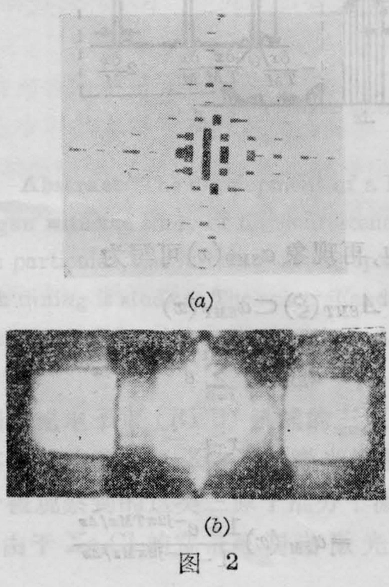
再现象振幅 $|a_{SMT}(x)|$ 如图 1(f)。当 T 甚大时，附加于 $a_{SM}(x)$ 的调制因子的作用有如光栅。它使 $a_{SM}(x)$ 的图象上出现整齐排列的亮点点阵，亮点振幅较未延拓前均匀亮斑振幅增强 TM^2 倍，相邻亮点间所插入的 $T-1$ 个零，将使亮点接近理想的 δ 函数，从而得到效果良好的多重针孔再现象。

三、实际作法及实验结果

1. 方法 A

物函数为二维离散矩函数，取样点数 16×16，函数值只取二元(0, 1)，中心部份由 11×11 个"1"组成，边上其余点为"0"。这样(4)式中 $N=16$, $L=11$，边频可算到 sinc 函数第二个次最强处，即带宽约为中间主带宽 $\left(\dfrac{2}{D}\right)$ 的 5 倍。

图 2(a)为根据所算得的数值所绘制的 Lohmann 型全息图，图 2(b)为再现象，在衍射 ± 1 级处出现均匀方形亮斑，距零级的相对距离(亮斑中心距零级中心的距离与亮斑本身大小的比)为 $\dfrac{\Delta x}{L\delta x}=\dfrac{N}{L}=\dfrac{16}{11}$。

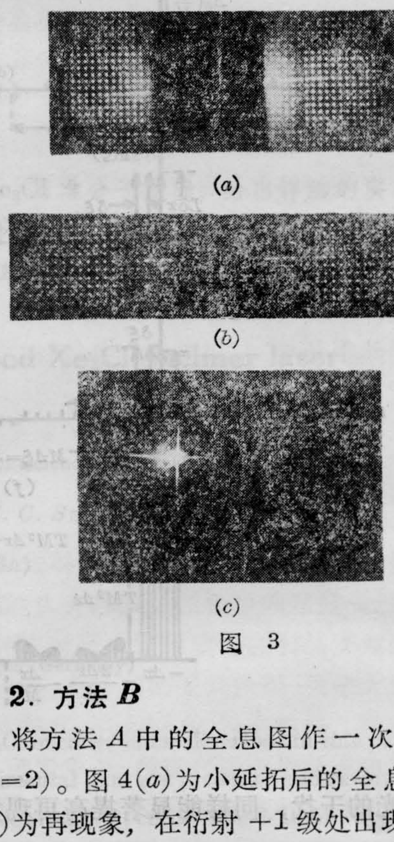


(a)

(b)

图 2

图 3(a)、(b)、(c)分别为全息图大延拓一翻 4×4、30×30、90×90 后的再现象，为了便于比较。全息图大小基本相同。其中(a)、(b)为了避免零级强光干扰，将零级挡去，(c)未挡掉零级，但只给出衍射 $+1$ 级。从所得实验结果可见，大延拓次数愈多，所得点象愈接近针孔(δ 函数)，大延拓次数增多，不会改变均匀方斑的大小及其与零级的相对位置，也不改变针孔的个数。



(a)

(b)

(c)

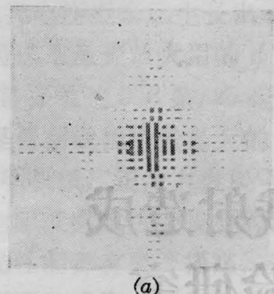
图 3

2. 方法 B

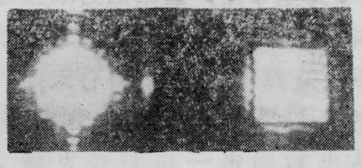
将方法 A 中的全息图作一次小延拓($M=2$)。图 4(a)为小延拓后的全息图，图 4(b)为再现象，在衍射 $+1$ 级处出现均匀方形亮斑，距零级的相对距离(亮斑中心距零级中心的距离与亮斑本身大小的比)为

$$
\Delta x\bigg/\frac{L\delta x}{M}=\frac{MN}{L}=\frac{2\times 16}{11},
$$

为 A 法的两倍，远离零级的干扰，是本法优点。图 5 为小延拓后再大延拓一翻 90×90 后的再现象，大延拓后出现针孔，针孔个数仍



(a)



(b)

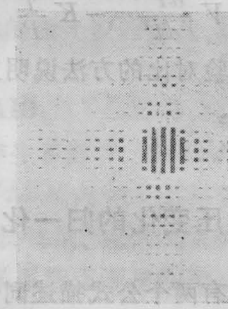
图 4

图 5

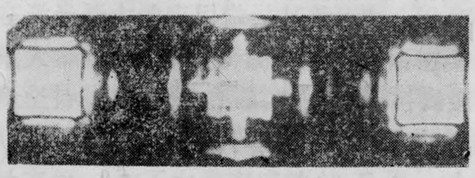
为 11×11。

3. 方法 *C*

将 A 法中的物函数取样点数增大到 32×32，中心部份仍由 11×11 个“1”组成，其余点为“0”。这样(4)式中 $N=32$, $L=11$，边频仍然可算到 sinc 函数第二个次最强处，即



(a)



(b)

图 6

带宽与 A 法相同。但是由于取样点增多，所算得频谱的精细程度增高，计算及绘制全息图的工作量均相应增大。图 6(a) 为 Lohmann 型全息图，图 6(b) 为再现象。均匀方斑距零级的相对距离为

$$\frac{\Delta x}{L\delta x}=\frac{N}{L}=\frac{32}{11},$$

与 B 法同，为 A 法的二倍，远离零级的干扰。由于取样点增多，均匀方斑的象质亦较 A 法显著改善。图 7 为全息图大延拓一翻 90×90 后的再现象。大延拓后出现针孔，针孔个数仍为 11×11。

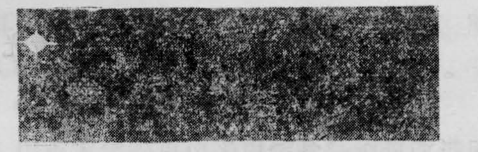


图 7

四、小　结

计算全息再现象的质量随取样点数增多而改善。但取样点数增多，计算频谱及绘制全息图的时间也随之增多，工作量或成本随之加大。延拓是一种简单的增多取样点数的方法，它可以大大增多取样点数，从而提高再现象象质，但增加的工作量却有限，因而是一种值得注意的方法[7]。

就制作多重针孔全息图而言，从以上理论分析及实验结果均可见，大延拓和小延拓均能显著提高再现象的信噪比。B 法的取样点数(16×16)比 C 法(32×32)少，但 B 法的延拓方法(兼有大、小延拓)比 C 法(只有大延拓)复杂，再现象质基本上可与 C 法相比。

延拓在信息论看来即增加冗余度，增加冗余度所付的代价有限，却能显著提高信噪比。在原来物函数的编码中 11×11 个“1”即所需针孔，也就是我们所需要的有用信息。频谱方面的大延拓和小延拓的实质，即在物方 11×11 个“1”的当中和两边不断地插

(下转第 502 页)

表 1

P_0 (托)	气压变化量 ΔP(托)	气体清除率之比	P_0 四次方之比
3.0	0.12	1:3.7	3.5
2.2	0.45		

入 He、Ne 气体，电流密度达 3.3 毫安/厘米^2。溅射气体清除异常明显，清除速率与初始气压值关系异常密切，20 分钟内的平均气体清除速率如表 1 所示。

由表 1 可知，在反常辉光放电条件下，公式(8)中的 n 值在 4～5 之间。

四、讨　论

(1) 正常辉光和反常辉光放电下的气体清除规律是不相同的。不同的原因在于阴极位降随电流和气压的变化规律不同。图 5 表示二种情况下的伏安特性曲线。由图可知反常辉光放电区阴极位降增大很多，且随电流和气压的改变而激烈变化。而铝阴极的位降变化很平缓。

(2) 在文献[4]中曾报道了合金铝阴极氦-氖激光管中气压变化规律遵循下述的规

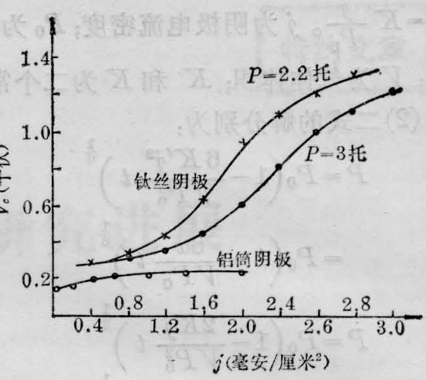


图 5　钛阴极放电管的伏安特性

律：

$$\frac{P}{P_0}=\left(1-\frac{t}{18000}\right)^{\frac{1}{2.5}}$$

把上式与公式(8)相对照，可知在他们的实验条件下 n 值为 1.5，说明二者的实验结果基本一致。

参　考　文　献

[1] 赫光生，雷仕湛；《激光器设计基础》，上海科学技术出版社(1979)。

[2] 刘志国；《应用激光联刊》，1982, **2**, No.1, 50～52。

[3] 刘志国；《激光》，1981, **8**, No.3, 53～54。

[4] U. Hochuli *et al.*, *IEEE J. Quant. Electr.*, 1967, **QE-3**, No.11, 612～614.

(上接第 499 页)

零，而在 11×11 个“1”的所在则不断地补“1”。插零的目的在于压低噪音，补“1”的目的在于提高信息，因而延拓能达到提高信噪比的目的。

本文实验工作曾得到我系李德宽、石明同志帮助，特此致谢。

参　考　文　献

[1] G. B. Parrent, B. J. Thompson; Physical Optical Notebook Published by The S. P. I. E., 1969.

[2] G. Groh; *Appl. Opt.*, 1969, **8**, 967.

[3] H. W. Hemstveet *et al.*; *JOSA*, 1969, **59**, 1544A.

[4] H. Damann, K. Görtler; *Opt. Commun.*, 1971, **3**, 312.

[5] A. Kalestynski; *Appl. Opt.*, 1975, **14**, 2343.

[6] 高文琦，叶权书；《激光》，1978, **5**, No. 5～6, 39.

[7] 高文琦，叶权书；《南京大学学报》(物理学专刊)，1980, p. 57.