

干涉型计算机全息图检测非球面

安培建 刘淑珍 桂怀谷 李勤学

(西安应用光学研究所)

提要: 本文从离轴参考束全息图的基本方程出发, 介绍了干涉型计算全息图。分析了宽条纹和窄条纹干涉型全息图的特点并给出了检验结果。指出了波差近似计算公式的适用范围。给出了三组实际检验结果。实验表明, $(-1, 0)$ 和 $(0, +1)$ 级波面的干涉图是相同的, 并给出了解释。

Testing aspheric surfaces with interference type computer-generated holograms

An Peijian, Liu Shuzhen, Gui Huaigu, Li Qinxue

(Xian Institute of Applied Optics)

Abstract: Starting from the basic equation of off-axial reference beam holograms, this paper describes the interference type computer-generated holograms and discusses their features in terms of both wide and narrow fringes and gives the test results. Besides, the authors pointed out the reasonable range of the approximate calculation of the wave aberration and gave three sets of practical test results. It has been shown experimentally that the interferogram of the wavefronts of $(-1, 0)$ orders is the same as that of $(0, +1)$. The explanation for it is given as well.

一、两元干涉型计算全息图

计算机全息图 (CGH) 能够产生原先不存在而只需预知其数学形式的波面, 这个特点为非球面干涉检验提供了一种有效手段。1972年 Birch 首先提出了一种干涉型 CGH^[1], 后来, Wai-Hon Lee 发展了这种全息图^[2]。

众所周知, 由参考平面波 $R \exp[j2\pi\nu x]$ 和物波 $A(x, y) \exp[j\phi(x, y)]$ 所形成的离

轴参考束全息图的振幅透射率正比于:

$$\begin{aligned} t(x, y) &= |R e^{j2\pi\nu x} \\ &\quad + A(x, y) e^{j\phi(x, y)}|^2 \\ &= R^2 + A^2(x, y) \\ &\quad + 2RA(x, y) \cos[2\pi\nu x \\ &\quad - \phi(x, y)], \end{aligned} \quad (1)$$

其中第一项表示由参考波产生的均匀“偏置”透射率, 第二项对重现物波没有贡献, 而且还会增大全息图沿 x 方向的带宽要求。实际所记录的波面仅具有位相变化, 并将波面记录

收稿日期: 1983年2月17日。

成象全息图, 这类似于干涉图形。干涉型全息图的振幅透射率函数可表示为:

$$h(x, y) = 0.5 + 0.5 \cos[2\pi\nu x - \phi(x, y)] \quad (2)$$

如果把 $\cos[2\pi\nu x - \phi(x, y)]$ 硬限幅, 即令余弦函数的非负值和负值分别等于 1 和 0, 就得到两元全息图:

$$h(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \cos[2\pi\nu x - \phi(x, y)] \geq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (3)$$

若用偏置函数 $\cos \pi q(x, y)$ 代替零作为硬限幅的阈值, 即(3)式的全息图函数为:

$$h(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \cos[2\pi\nu x - \phi(x, y)] \geq \cos \pi q(x, y) \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (4)$$

上式可用傅里叶级数表示为:

$$h(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi m q(x, y)}{\pi m} \times e^{jm[2\pi\nu x - \phi(x, y)]} \quad (5)$$

当选择偏置函数使 $q(x, y) = \sin^{-1} A(x, y)/\pi$, 可记录波面振幅, 上式的 $m = -1$ 项即重现的原物波面 $A(x, y) \exp[j\phi(x, y)]$ 。对仅有位相变化的波面, 可用 q 确定全息图的衍射效率。由(5)式可见, 当 $q = 1/2$ 时, 所有偶次项(除 $m = 0$ 外)均消失。一级衍射波具有 10% 的最高衍射效率, 经漂白处理后, 衍射效率可达 40%。

由(4)式可得, 宽条纹($q = 1/2$)干涉型 CGH 确定条纹位置的方程:

$$2\pi\nu x - \phi(x, y) = 2\pi n + \pi q \quad (6)$$

当 $q = 0$ 时, 由上式即可得确定窄条纹位置的方程。(6)式右端的负号和正号分别表示确定宽条纹的前沿和后沿位置, 以波长为单位且用波差代替位相差表示(6)式, 可得:

$$\nu_c x - w(x, y) = n\lambda/q/2 \quad (7)$$

式中, $\nu_c = 1/T$ 是载频, T 为沿 x 方向的抽样周期, n 是整数。为完善地重现原物波, 根据抽样定理, 载频应满足条件:

$$\nu_c > B_x \quad (8)$$

其中, B_x 是沿 x 方向波面函数的频带宽度:

$$B_x = 2 \left(\left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| \right)_{\max} \quad (9)$$

对 $q = 0$ 的窄条纹, 为使一级衍射波和二级衍射不重叠, 载频应满足条件:

$$\nu_c = \frac{3}{2} B_x \quad (10)$$

实用时, 为使一、二级衍射波有足够的分离, 常取 $\nu_c = 2B_x$ 。对 $q = 1/2$ 的宽条纹, 为使一级衍射波和三级衍射不重叠, 载频应满足:

$$\nu_c > B_x \quad (11)$$

实际制作时取 $\nu_c = 1.5B_x$ 。

二、检测原理

用 CGH 干涉检测非球面的典型光路如图 1 所示, 这是一个修正型的 Twyman-Green 干涉仪。

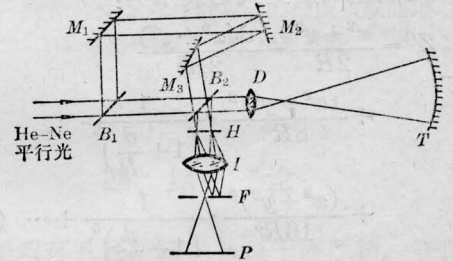


图1 检验非球面的 CGH 干涉仪

M_1, M_2, M_3 —平面反射镜; B_1, B_2 —分束镜; D —发散透镜; H —干涉型 CGH; T —被检非球面镜; I —成象透镜; F —滤波狭缝; P —干涉平面

He-Ne 激光平行光束经分束镜 B_1 后, 分为参考和测试两条光路。CGH 置于图 1 所示位置, 因两光路均通过 H , 可抵消全息图厚度变化所引入的位相误差。 H 定位于被检反射镜的象平面上, 滤波狭缝仅通过参考平面波使 CGH 重现的一级衍射波(样板波面)和测试光路的零级波面(携带有加工误差的实际波面), 且消除其他衍射级的干扰。样板波面和实际波面在干涉平面 P 上给出零差检验的干涉条纹。通过对干涉图条纹的分析得到非球面加工误差的信息。

轴对称波面的波差多项式为:

$$w(x, y) = A_2(x^2 + y^2) + A_4(x^2 + y^2)^2 + A_6(x^2 + y^2)^3 + \dots \quad (12)$$

式中 A_2 是离焦系数, A_4 和 A_6 分别为初级和二级球差系数。旋转二次曲面方程为:

$$x^2 + y^2 = 2RZ - eZ^2 \quad (13)$$

式中 R 是曲面顶点的等价球面半径; e 是表示非球面程度的参数, $e=1$ 为球面, $e=0$ 为抛物面。(13)式可写为另一种形式:

$$Z = \frac{1}{2R}(x^2 + y^2) + \frac{e}{8R^3}(x^2 + y^2)^2 + \frac{e^2}{16R^5}(x^2 + y^2)^3 + \dots \quad (14)$$

对具有相同顶点半径 R 的参考球面方程为:

$$Z' = \frac{1}{2R}(x^2 + y^2) + \frac{1}{8R^3}(x^2 + y^2)^2 + \frac{1}{16R^5}(x^2 + y^2)^3 + \dots \quad (15)$$

引入离焦量 d 后上式可表示为:

$$Z'' = \frac{x^2 + y^2}{2R} - \frac{d(x^2 + y^2)}{2R^2} + \frac{(x^2 + y^2)^2}{8R^3} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{d}{R}\right)^3} + \frac{(x^2 + y^2)^3}{16R^5} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{d}{R}\right)^5} + \dots \quad (16)$$

用矢高差 $\Delta Z = Z'' - Z$ 近似表示波差, 即

$$w(\rho) = 2 \left(\frac{\Delta Z}{\lambda} \right)$$

得到如下波差近似公式:

$$w(\rho) = 2(A_2\rho^2 + A_4\rho^4 + A_6\rho^6 + \dots) \quad (17)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= -\frac{dr_0^2}{2R^2\lambda}, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}/r_0 = r/r_0 \\ A_4 &= \frac{(K_4 - e)r_0^4}{8R^3\lambda}, K_4 = \frac{1}{\left(1 + \frac{d}{R}\right)^3} \\ A_6 &= \frac{(K_6 - e^2)r_0^6}{16R^5\lambda}, K_6 = \frac{1}{\left(1 + \frac{d}{R}\right)^5} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中 r_0 是被检镜面 T 的半孔径。

为了考察近似公式(17)的适用范围, 对几种抛物面计算了近似公式所引入的波面误

差, 并在表1中给出数值比较。由表可见:

(1) 不离焦时波面误差随相对孔径增大基本上是单调增加; (2) 由于离焦使波差的变化平缓均称, 因而波面误差随相对孔径变化的斜率有所减小, 而且误差的变化比较均匀; 由于 (d/R) 很小, K_4 和 K_6 对 A_4 和 A_6 的影响可以忽略; (3) 为了保证近似计算所引入的波面误差足够小于 $\lambda/10$, 把相对孔径限定在 $1/5$ 以下是完全可靠的^[3]。

用离焦象差补偿以便得到象差的适当平衡, 可以减小波面象差及其变化率, 并减少全息图的条纹数^[4]。对于大相对孔径或非球面度大的被检镜, 仅靠离焦补偿已满足不了要求, 采用光学补偿是十分必要的。此时把光学补偿和 CGH 结合起来的混合补偿是十分有效的, 测试系统的误差也可用 CGH 加以补偿。我们采用波差计算程序 (CGH-1 程序) 对测试系统 ($D+T$) 追迹光线, 算出记录平面上的波差, 并采用切比雪夫曲线拟合法由 (12) 式求得波差系数 (用 CGH-2 程序)。显而易见, 这比解线性方程组计算波差系数的精度要高。由于我们采用了以上两个程序使混合补偿法得以有效实现。

用方程 (7) 确定条纹位置时, 由于 $w(x, y)$ 中含有高次项, 要用迭代法求解。我们采用最佳步长法直接求解方程 (7), 计算绘图程序 (CGH-3 程序) 利用了条纹对 x 轴对称的特点减少了一半计算量。用最小二乘曲线拟合计算边界点, 既避免了在边界外多算抽样点, 也保证了边界点的计算精度。该程序具有三种功能: (1) 窄条纹计算绘图, (2) 窄条纹计算位移刻图, (3) 宽条纹计算刻图。

宽条纹刻图制作 CGH 的优点: (1) 全息图和干涉图的条纹清晰、对比度好 (图 3 和图 5), (2) 衍射效率高达 10%, (3) 条纹数减少了 25% 左右。例如对 $\phi 160$ 毫米、 $f/1.8$ 的抛物面用混合补偿制作 CGH, 采用宽条纹只需 79 根条纹, 用窄条纹要 105 根条纹。由 (10) 和 (11) 式可知, 宽条纹所需载频是窄条

表 1 近似计算所引入的波面误差 $\Delta w(\lambda)$

ϕ (毫米)	R (毫米)	d (毫米)	$\left(\frac{2r}{f}\right)$						
			$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3.5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4.5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
160	600	$d=0$	0.20	0.15	0.11	0.07	0.04	0.02	0.008
200	1000	$d=0$	0.50	0.08	0.06	0.05	0.04	0.02	0.005
100	600	$d=0$	0.19	-0.08	-0.04	-0.02	-0.01	-0.004	-0.002
		$d=-1.56$ $K_4=1, K_6=1$	0.06	-0.01	-0.02	-0.02	-0.02	-0.01	-0.001
		$d=-1.56$ $K_4=0.992, K_6=0.987$	-0.03	-0.04	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	-0.001

纹载频的 $3/4$ 倍, 因而宽条纹数为窄条纹数的 0.75 倍。当然, 采用宽条纹全息图由于每根条纹要解两次方程, 使计算量增加一倍, 考虑到条纹数减少, 综合计算时间略有增加。由于窄条纹描绘时为加深条纹黑度, 通常要重复描绘两遍, 所以采用宽条纹时绘图时间一般并不增加。为克服宽条纹刻图的这一缺点, 可采用一种折衷办法, 窄条纹计算位移刻图, 就可在不增加计算量的同时, 得到比较清晰、对比度好的 CGH。

于图 5。抛物面的最大波差 75λ , 单正透镜补偿了 93% 的波差。当波象差多项式 (12)

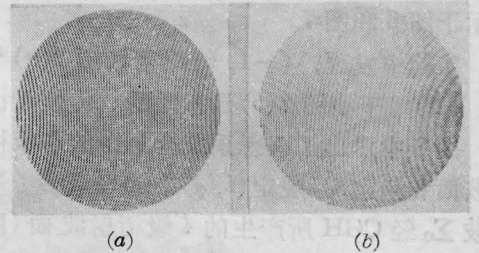


图 3 干涉型 CGH
(a) 宽条纹; (b) 窄条纹

三、实验结果

CGH 重现波面的精度可用如图 2 所示的马赫-陈德尔干涉仪进行检验, 图 4 给出重现波面与平面波的干涉图及其分析结果。分析表明, 我们所制作的 CGH 重现波面的精度小于 $\lambda/10$ 。

对 $\phi 160$ 毫米、 $f/1.8$ 的抛物面反射镜, 用混合补偿法作了干涉检验。所得干涉图示

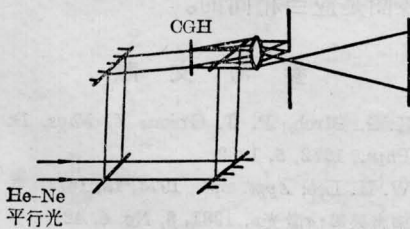
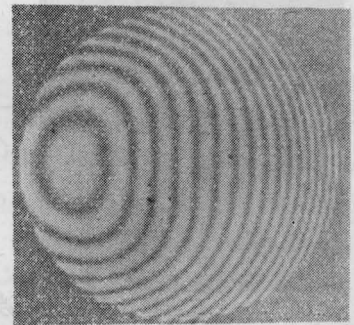
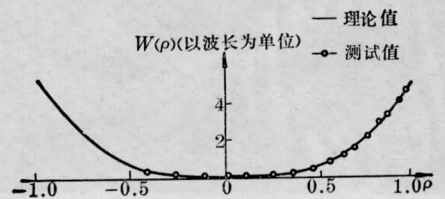


图 2 CGH 重现波面精度检验装置



(a) 重现波面与平面波的干涉图



(b) 重现波面测试值与理想波面的比较

图 4

取到二级球差项时最大偏差为 0.005λ 。全息图直径为 26.62 毫米。

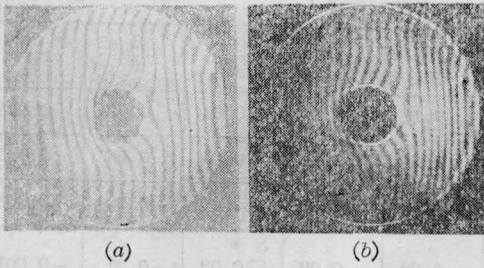


图 5 $\phi 160, f/1.8$ 抛物面检验干涉图
(a) 宽条纹全息图检验结果;
(b) 窄条纹全息图检验结果

我们还对 $\phi 160$ 毫米, $f'=1.5$ 米和 $\phi 60$ 毫米, $f/5$ 两个抛物面作了实际检验。用矢高差近似公式计算波差系数。所得干涉图分别示于图 6 和图 7。

实验中发现, $(-1, 0)$ 级干涉图 7(a) 与 $(0, +1)$ 级干涉图 7(b) 是相同的。为便于说明, 图 8 中示出了理想系统全息图的各级衍射波面和频谱, 且规定 (i, j) 中 i 表示参考平面波 Σ_0 经 CGH 所产生的 i 级衍射波面 (图 8(a)), j 表示由被检镜面返回的波面 Σ'_0 通过 CGH 所产生的 j 级衍射波面 (图 8(b))。

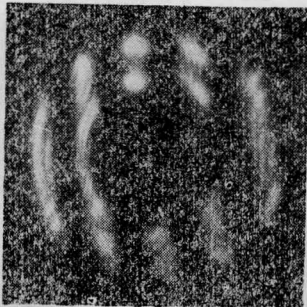


图 6 $\phi 160, f'=1.5$ 米抛物面检验干涉图

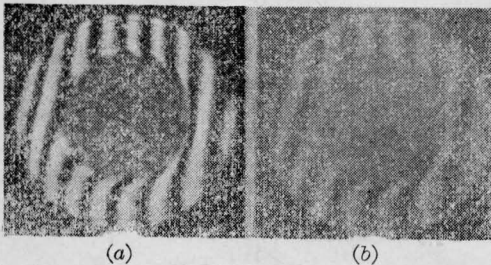


图 7 $\phi 60, f/5$ 抛物面检验干涉图
(a) $(-1, 0)$ 级干涉图; (b) $(0, +1)$ 级干涉图

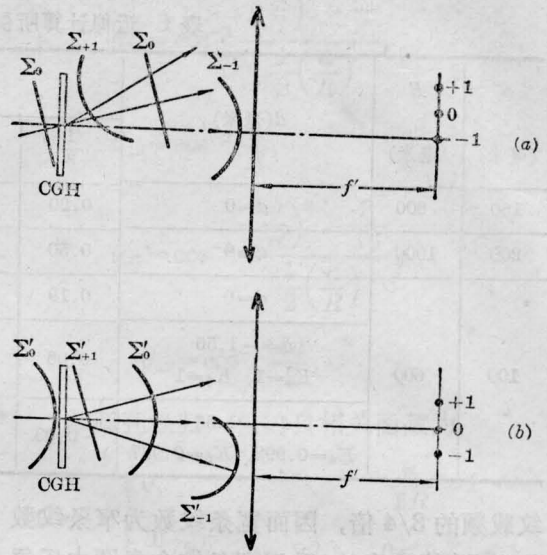


图 8 各衍射级波面和频谱示意图

(a) 倾斜参考平面波 Σ_0 经 CGH 所产生的衍射波;
(b) 被检验波面 Σ'_0 经 CGH 所产生的衍射波

$(-1, 0)$ 级干涉图是仅由参考波面 Σ_{-1} 和被检波面 Σ'_0 通过滤波狭缝所得到的干涉图。这就是我们在第二节中所说的零差检验, 而 $(0, +1)$ 级干涉图是参考波面 Σ_0 和被检波面 Σ'_{+1} 形成的。 Σ_0 是参考平面波用作样板波面。若被检非球面和全息图都是完善的, 则被检波面 Σ'_0 通过全息图所产生的 $+1$ 级波面 Σ'_{+1} 应当是一个完善的平面波。全息图在此起着传统的零透镜作用, 这时应得到直条纹干涉图。由于全息图重现波面的误差小于 $\lambda/10$, 所以 CGH 可认为是完善的, 通常被检镜面并不是完善的。干涉条纹与直条纹的偏差就反映了被测面形的误差。这也是一种零差检验, 不过标准波面是一个参考平面波。显而易见, 对同一面形两种零差检验的干涉图是应当相同的。

参 考 文 献

- [1] K. G. Birch, F. J. Green; *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1972, 5, 1982.
- [2] W. H. Lee; *Appl. Opt.*, 1974, 13, 1677.
- [3] 施志果等;《激光》, 1981, 8, No. 6, 42.
- [4] Toyohiko Yatagai et al.; *Appl. Opt.*, 1978, 17, 558.