中国激光
第 11 卷　第 3 期

激光陀螺拍频公式的修正

邓锡铭　方洪烈　陈泽尊

（中国科学院上海光机所）

提要：运用流体模型方法[1~3]分析一个激光陀螺的拍频频率，得到拍频频率的修正表达式 $\Delta\nu=\frac{4A}{\lambda p}(1-E_G)\Omega$。

Correction to the beat frequency for laser gyroscopes

Deng Ximing, Fang Honglie, Chen Zezun

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: Beat frequency of a laser gyro is analyzed by means of the hydrodynamic model [1~3] of an electromagnetic field, the modified formula of the beat frequency $\Delta\nu=4A/\lambda p$ $(1-E_G)\Omega$ has been obtained.

激光陀螺是一个在惯性坐标系统内转动的环形谐振腔激光器。由于腔本身的转动，导致腔内沿相反方向运动的两个同阶行波模对应的腔长略有不同，引起谐振频率略有差别，这个频率差反映为拍频 $\Delta\nu$

$$\Delta\nu=\frac{4A}{\lambda p}\Omega \tag{1}$$

这就是 Sagnac 公式，其中，A 为环形腔轴线所围的面积；p 为腔周界长；λ 为腔不转动时的激光波长；Ω 为环形腔在惯性坐标系中转动的角速度。在推导这公式时，把腔内光束看作是无限宽匀幅平面波，光束以相速度在腔中走一周的时间是 p/c，c 是光速。其实，这仅是一种理想情况。实际上，腔内谐振模是有一定宽度的，而且在这个宽度内振幅的分布也不是均匀的。因此，以相速度走一周的时间就不严格等于 p/c。这在激光陀螺测量精度不断提高的情况下就有进一步分析的必要。据最近文献报道，测量精度（用作角速度敏感器）已达地球自转转速的 10^{-6}[4]。有的文章指出理论上精度（无源腔）可达地球自转转速的 10^{-10}[5]。因此，对测量中各种可能的误差来源的分析，特别是对拍频公式本身的精确性的分析均具有重要的实际意义。

M. O. Scully 等人首先提出[6]激光陀螺拍频频率与环形腔内的光束宽度有关；稍后方洪烈指出，拍频频率与腔内光束截面的内能（归一化的）有关[7]。随后我们利用光束传输的流体模型[1,2]，分析了静止腔的谐振频率[3]，导出了腔内一个谐振模的等位相波面的惯性中心走一周的时间 T_p[3]

$$T_p=\frac{2L_0}{c}(1-E_G) \tag{2}$$

对于共焦环形腔，腔的周长 $p=2L_0$，E_G 是腔体内的内禀能量[1,2]，即

收稿日期：1983 年 2 月 17 日。

$$E_G=\int_{\text{腔内空间}}\frac{1}{k^2}(\nabla\phi_0)^2d\tau \tag{3}$$

$$\int_{\text{腔内空间}}\phi_0^2\,d\tau=1 \quad (\text{归一化})$$

(3)式结果表明，当腔内谐振光束不是匀幅平面波，$E_G>0$。这样，T_p 一般略小于 p/c。

为了分析方便，今讨论一个半径为 R 的圆环形腔。由于 $T_p<p/c$，导致在圆环形腔中，由于腔转动引起的腔长变化 Δp 显然等于

$$\begin{aligned}\Delta p_{\pm}&=\pm R\Omega\cdot T_p\\&=\pm R\Omega\left[\frac{2\pi R}{c}(1-E_G)\right]\\&=\pm\frac{2A}{c}\Omega(1-E_G)\end{aligned} \tag{4}$$

行波谐振光束与腔转动同向取"+"号，反向取"−"号。A 是腔轴线包围的面积。

由腔长变化 $\Delta p_{\pm}$ 引起的谐振率的变化 $\Delta\nu_{\pm}$ 满足

$$\frac{\Delta\nu_{\pm}}{\nu}=-\frac{\Delta p_{\pm}}{p} \tag{5}$$

这里 ν 是腔静止时的激光输出频率。把(4)式代入(5)式，就得到由于有限束宽引起的拍频修正公式

$$\Delta\nu=\Delta\nu_{-}-\Delta\nu_{+}=\frac{4A}{\lambda p}\,\Omega(1-E_G) \tag{6}$$

现在计算腔体内的内禀能量 E_G。共焦环形腔内的场分布近似为厄米-高斯函数，即

$$\phi_0=\frac{N}{\sigma}\,e^{-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}}\,H_m\!\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{\sigma}\right)H_n\!\left(\frac{\sqrt{2}\,y}{\sigma}\right) \tag{7}$$

这里 ϕ_0^2 代表归一化的时间平均的场能量密度，N 是归一化常数，满足

$$\int_{\text{腔内体积}}\phi_0^2\,d\tau=\int_{\text{腔内体积}}\frac{N^2}{\sigma^2}\,e^{\frac{-2(x^2+y^2)}{\sigma^2}}\times\left[H_m\!\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{\sigma}\right)H_n\!\left(\frac{\sqrt{2}\,y}{\sigma}\right)\right]^2d\tau=1 \tag{8}$$

σ_0 为光腰半径；

σ 为光束半径，$\sigma=\frac{1}{k\sigma_0}\sqrt{k^2\sigma_0^4+4z^2}$。

考虑到环形腔周长 $p\gg\lambda$，故 ϕ_0 是空间坐标 z 的缓变函数，故

$$\begin{aligned}E_G&=\int_{\text{腔内体积}}\frac{1}{k^2}(\nabla\phi_0)^2d\tau\\&\approx\int_{\text{腔内体积}}\frac{1}{k^2}\left[\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial y}\right)^2\right]d\tau\end{aligned} \tag{9}$$

(7)式代入(9)式得

$$E_G=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2(m+n+1)}{k^2\sigma_0^2} \tag{10}$$

这就是腔内单个横模能量归一化条件下的内禀能量。m、n 是横模阶数。因此，拍频修正公式可表述为：

$$\Delta\nu=\frac{4A}{\lambda p}\,\Omega\left[1-\frac{\pi}{2}\,\frac{(m+n+1)}{k^2\sigma_0^2}\right] \tag{11}$$

对于基模，$m=n=0$，所以

$$\Delta\nu_{\text{基模}}=\frac{4A}{\lambda p}\,\Omega\left(1-\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{k^2\sigma_0^2}\right) \tag{12}$$

如 $\lambda=1\times10^{-4}$ 厘米，$\sigma_0=0.1$ 厘米，则

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{k^2\sigma_0^2}\approx4\times10^{-8}$$

由此可见，在实验室尺度下，修正项是一个很小的量。光腰半径 σ_0 愈小，修正值愈大；横模的阶数愈高，修正值也愈大。

(12)式所得的结果与 M. O. Scully[6] 等人引用广义相对论度规理论分析得到的光束宽度对拍频公式的修正值相比，除系数略有不同外，结果相同。系数的差别主要由于他们为了计算简便，用平行光束取代真实的略为发散的光束。而我们引用流体模型方法不仅不需要用这种近似，还可以很方便地同时导出了高阶模的拍频修正项。若引用度规理论推导高阶模的拍频修正项则会遇到十分困难的计算问题。

M. O. Scully 等人的修正公式还包括了另一更高级的修正项，对应于横向多普勒效应，与光束宽度无关。

用实验直接验证基模拍频修正项的存在是相当困难的。因为 A、p、λ、Ω 以及 $\Delta\nu$ 等量的相对测量精度均要求达到 10^{-9}，其中除 $\Delta\nu$ 以外，这样高精度的测量是不容易实现的。但我们导出了高阶模的拍频修正公式

(下转第 134 页)

级两个衍射分量位相差为π, $g(x_3\pm\nu_1\lambda f, y_3)$和$g(x_3\pm\nu_3\lambda f, y_3)$的重合部分振幅相减，形成暗区，而两个边缘部分形成明亮的轮廓线。这样，一级光强分布如下：

$$U^{(1)}(x_3, y_3)\cdot U^{(1)*}(x_3, y_3)$$
$$=[T_1 g(x_3\pm\nu_1\lambda f, y_3)$$
$$-T_1 g(x_3\pm\nu_2\lambda f, y_3)]^2 \quad (12)$$

可以看出(12)式括号内的表示式与(1)式相同，其中$\Delta\nu\lambda f=\Delta$, Δ是轮廓线的宽度，因而在非线性记录的情况下，复合光栅的一级衍射仍可以做一阶光学微分。

用$U^{(2)}(x_3, y_3)$表示二级衍射的振幅分布：

$$U^{(2)}(x_3, y_3)=T_2 g(x_3\pm 2\nu_1\lambda f, y_3)e^{\pm i4\pi\nu_1 a_1}$$
$$+T_2 g(x_3\pm 2\nu_1\lambda f, y_3)e^{\pm i4\pi\nu_2 a_2}$$
$$+T_{12} g[x_3\pm(\nu_1+\nu_2)\lambda f, y_3]$$
$$\times e^{\pm i2\pi(\nu_1 a_1+\nu_2 a_2)}$$

光强分布为：(当$2\pi(a_1\nu_1-a_2\nu_2)=\pi$时)

$$U^{(2)}(x_3, y_3)\cdot U^{(2)*}(x_3, y_3)$$
$$=[T_2 g(x_3\pm 2\nu_1 f\lambda, y_3)$$
$$-\frac{T_{12}}{2}g[x_3\pm(\nu_1+\nu_2)\lambda f, y_3]$$
$$+T_2 g(x_3\pm 2\nu_2\lambda f, y_3)$$
$$-\frac{T_{12}}{2}g[x_3\pm(\nu_1+\nu_2)\lambda f, y_3)]^2 \quad (13)$$

由(13)式可以看出与(2)式相似，其中$\Delta=\Delta\nu\lambda f$，那么，(13)式所表示的光强分布是图象$g(x_1, y_1)$的二阶微分。由于相干光照明的情况下边缘的直边衍射，从而形成了两个分立的轮廓线。因而，我们可以得出如下结论，用非线性记录复合光栅进行光学微分时，可用一级衍射进行一阶光学微分，二阶衍射进行二阶光学微分。这样，可同时进行一、二阶光学微分。

参 考 文 献

[1] S. K. Yao, S. H. Lee; *JOSA*, 1971, **61**, No. 4, 474~477.

[2] R. J. Collier; Optical Holography, Academic New York, 1971, 338, eq(12.1).

[3] 冯郁芬；《光学与光谱技术》, 1981, No. 3.

[4] L. M. Soroko; "Holography and Coherent Optics", §6.12, Plenum Press, New York, 1980.

(上接第130页)

(11)，利用这个式子，只要精确测出不同阶模的拍频值，并扣除介质增益等因素带来的影响，这些拍频值之间的差数就反映了修正值，而无需对A、p、λ、Ω作高精度测量，仅要求具备高稳定度的实验条件即可。这样，似可降低实验验证的难度。

参 考 文 献

[1] 邓锡铭，方洪烈；《激光》, 1980, **7**, No. 2, 14。

[2] 邓锡铭，方洪烈；《激光》, 1979, **6**, No. 11, 1。

[3] 邓锡铭，陈泽尊；《中国激光》, 1983, **10**, No. 2, 65.

[4] M. O. Scully *et al.*; *Phys. Rev. A*, 1981, **24**, No. 4, 2009.

[5] S. Ezekiel *et al.*; *SPIE*, 1978, **157**, 68.

[6] M. S. Zubairy *et al.*; *Opt. Commun.*, 1981, **36**, No. 3, 175.

[7] 方洪烈；(私人通信, 1981.4)。