中国激光
第11卷　第2期

面沟道粒子的正弦平方势及其带电粒子的库马霍夫辐射

罗诗裕　邵明珠

（中国科学院近代物理所）

提要：提出一种新的正弦平方势来描写面沟道粒子运动行为，并将粒子运动方程化为熟知的摆方程，用 Jacobi 椭圆函数和第一类全椭圆积分严格求解了运动方程和振动周期，讨论了库马霍夫辐射的强度和光谱特征。结果表明，这一辐射颇有希望作为新的 r-光源。

Sine-sqaured potential for planar channeling particles and Kumakhov radiation for charged particles

Luo Shiyu, Shao Mingzhu

(Institute of Mordern Physics, Academia Sinica)

Abstract: The new planar-continuum potential, the sine-squared potential, is introduced to analyse the behaviour of particle motion in a planar channel, and particle motion equation is written by the well known pendulum; particle motion equation and oscillation period are solved exactly by Jacobi elliptic functions and the first kind of complete elliptic integrals; radiation intensity and spectral characteristics of Kumakhov radiation are further analyzed; The results show that it is possible to take Kumakhov radiation as a new γ-ray laser.

一、引　言

人们在研究带电粒子同物质相互作用的过程中，曾发现了沟道效应和阻塞效应，近年来又发现了一种新的效应——带电粒子的沟道辐射，通常又称库马霍夫辐射 (Kumakhov radiation)[1,2]。

由电动力学可知，任何一个作加速运动的带电粒子，都将自发地向周围空间辐射电磁波；在晶体沟道中运动的带电粒子，因其加速度不为零也会发射这种电磁辐射，其中除了由于粒子减速运动而发射韧致辐射外，值得注意的是因在沟道中的周期运动而发射的库马霍夫辐射。库马霍夫辐射是由于带电粒子在沟道中的横向运动引起的，对于10兆电子伏的正电子，库马霍夫辐射的能量可达千

收稿日期：1982年5月10日。

电子伏量级，在超相对论情况下，辐射能量还更高。

目前人们最感兴趣的一个问题是企图利用这种辐射作为新的光源（r-激光[3,4]），这种光源的第一个特点是频率可调，只需适当调节入射粒子的能量，或初始条件即可实现。带电粒子的面沟道辐射是线偏振的；辐射的方向性极好，且大多集中在沿运动方向、角宽 $\Delta\theta \sim r^{-1}$ 的狭窄范围内。

晶体沟道有轴沟道和面沟道两种，电子在轴沟道中的运动是以晶轴为中心的螺旋运动，作这种运动的电子，不仅要发射沟道辐射、韧致辐射，而且还将发射同步辐射。本文只讨论带电粒子在面沟道中的库马霍夫辐射，并以正电子为例计算了这种辐射的辐射强度和光谱特征。常用的粒子-晶体相互作用势有 Lindhard 势和 Moliere 势，鉴于作用势的复杂性，粒子的运动方程是非线性的，通常都只能借助于数值方法求解。本文的目的是企图引入一种新的相互作用势——正弦平方势来代替 Lindhard 势或 Moliere 势，其特点是将粒子的运动方程化为熟知的摆方程，并用 Jacobi 椭圆函数和第一类全椭圆积分严格求解了这个方程和运动周期，同时，在此基础上，进一步解析地处理了库马霍夫辐射的辐射强度和光谱特征。

二、正弦平方势及其摆模型

经验表明，能否正确描述粒子的沟道行为与如何选择粒子-晶体相互作用势有关。常用的两种平面连续势有 Lindhard 势和 Moliere 势[5]，无量纲的 Lindhard 势具有如下形式

$$V(X) = KW_L(X) \tag{1a}$$

其中 $W_L(X) = [(1+X)^2 + 12D^{-2}]^{\frac{1}{2}} + [(1-X)^2 + 12D^{-2}]^{\frac{1}{2}} - 2(1+12D^{-2})^{\frac{1}{2}}$ (1b)

而无量纲的 Moliere 势则为

$$V(X) = KW_M(X) \tag{2a}$$

其中

$$W_M(X) = \frac{0.2}{3D} e^{-3D}[ch(3XD) - 1] + \frac{1.1}{0.6D} e^{0.6D}[\mathrm{ch}(0.6XD) - 1] + \frac{0.7}{0.15D} e^{0.15D}[\mathrm{ch}(0.15XD) - 1] \tag{2b}$$

$$X = 2x/d_p,\ D = d_P/a_T,\ K = \pi z_1 z_2 e^2 N d_P \tag{3}$$

x 是粒子偏离沟道中心平面的距离，d_P 是晶面间距，a_T 是托马斯-费米屏蔽距离，z_1、z_2 是入射粒子和晶体的原子序数，e 是电子电荷，Nd_P 是晶体原子的面密度。式(1)和(2)表明，归一化的相互作用势 $W(X)$ 只与无量纲的晶面间距 D 有关。

考虑到带电粒子的库马霍夫辐射是粒子在沟道中的横向运动引起的，而粒子的横向速度又比纵向低得多，因此，粒子的横向运动行为可用经典方法处理。事实表明，在超相对论情况下，经典方法同量子力学方法符合得很好。本文就试图在经典力学的框架内，对粒子横向运动引起的库马霍夫辐射作一解析描述。

在经典范围内，由式(1)和(2)可得无量纲的横向运动方程

$$\frac{d^2X}{ds^2} + \frac{1}{2}\epsilon^2 W'(X) = 0 \tag{4}$$

其中

$$W'(X) = \frac{\partial W(X)}{\partial X},\quad s = \frac{2v}{d_p}t,\quad \epsilon = \left(\frac{K}{E}\right)^{1/2} \tag{5}$$

而 E 是入射粒子的能量，v 是它的纵向速度。

将方程(4)改写为

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= \epsilon Y \\ \frac{dY}{ds} &= -\frac{1}{2}\epsilon W'(X) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

或
$$\frac{dY}{dX}=-\frac{W'(X)}{Y} \tag{7}$$
分离变数，完成一次积分可得
$$Y^2+W(X)=e_{\perp 0} \tag{8}$$
其中
$$e_{\perp 0}=Y_0^2+W(X_0) \tag{9}$$
是粒子的初始横向能量。式(8)给出了相平面(X、Y)上的一簇积分曲线，其形状如图1所示。

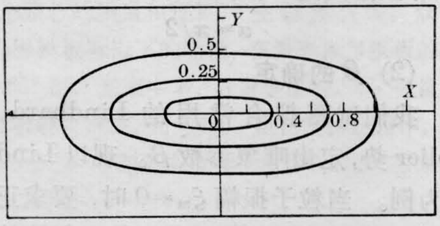

图1　系统的相平面特征

从物理考虑和方程(4)的非线性特征出发，对式(1)、(2)和(8)进行分析，发现Lindhard势和Moliere势似乎存在下面不足之处：

① 式(1)和(2)是发散的，即当$X\to\infty$时，式(1)和(2)也趋无穷，这是与实际情形不符合的；为了避免这个困难，他们只好人为地把势截断在$X=\pm 1$处，遗憾的是这又破坏了理论本身的完整性和统一性。

② 从式(7)可以看出，在相平面上，系统只有一个中心型奇点(即相平面原点(0,0))，如图1所示；由于系统不存在不稳定奇点，围绕原点的所有轨道都是稳定的。这表明具有任意初值的入射粒子都应该是沟道粒子，这也是与实际不符合的；

③ 由式(1)和(2)可知，方程(4)是一个复杂的二阶非线性微分方程，不存在严格解析解，而数值解也十分复杂。

由于上述原因，我们从唯象分析出发，提出了一种新的相互作用势——正弦平方势来描写面沟道粒子的运动行为，结果似乎确有我们希望的一系列特征。

我们从唯象考虑出发，选择归一化的正弦平方势$W_S(X)$为
$$W_S(X)=\eta\sin^2\alpha X \tag{10}$$
其中α、η是模型参数。将式(10)代入方程(4)，可得：
$$\frac{d^2\xi}{ds^2}+\delta\sin\xi=0 \tag{11}$$
其中
$$\xi=2\alpha X,\ \delta=\epsilon^2\alpha^2\eta。 \tag{12}$$
方程(11)是熟知的摆方程。令
$$V_\perp=d\xi/ds \tag{13}$$
由方程(11)可得系统的积分曲线
$$V_\perp^2=2\delta\cos\xi+h \tag{14}$$
其中h是与横向运动有关的能量常数。当粒子的无量纲振幅为ξ_m时，由能量守恒条件可得$h=-2\delta\cos\xi_m$，于是式(14)化为
$$V_\perp^2=2\delta(\cos\xi-\cos\xi_m)。 \tag{15}$$
令
$$\sin\frac{\xi}{2}=\tau\sin\frac{\xi_m}{2}, \tag{16}$$
注意到$\frac{d\xi}{ds}=V_\perp$，可将式(15)化为
$$\sqrt{\delta}\,s=\int_0^\tau\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}\cdot\sqrt{1-k^2\tau^2}}=F(\tau,k) \tag{17}$$
其中
$$k^2=\sin^2\frac{\xi_m}{2} \tag{18}$$
是椭圆函数的模，而$F(\tau,k)$称为第一类椭圆积分。

根据椭圆函数的定义，将式(17)中的τ用Jacobi椭圆函数表示为[6]
$$\tau=\mathrm{sn}(\sqrt{\delta}\,s)。 \tag{19}$$
由式(16)、(19)和(12)，可将方程(11)的解表示为
$$X=\frac{1}{\alpha}\arcsin\left[\sin\frac{\xi_m}{2}\,\mathrm{sn}(\sqrt{\delta}\,s)\right], \tag{20}$$
而横向"速度"则为
$$V_\perp=\frac{dX}{ds}=\frac{K\sqrt{\delta}}{\alpha}\,\mathrm{cn}(\sqrt{\delta}\,s)。 \tag{21}$$
式(20)和(21)完全确定了粒子的运动行为及系统的相平面特征，如图2所示。

如果再令

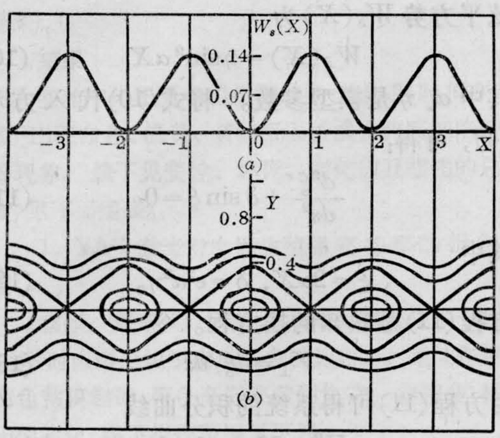

图 2

(a) 正弦平方势；(b) 系统的相平面特征

$$\tau=\sin\varphi \tag{22}$$

且当 $\varphi=\pi/2$ 时，由式(17)可得第一类全椭圆积分

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{23}$$

粒子的振动周期 T 则可用 $K(k)$严格表示为

$$T=\frac{4}{\sqrt{\delta}}K(k)=\frac{4}{\sqrt{\delta}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{24}$$

从式(18)和(24)可以看出，粒子振动周期是振幅 ξ_m 的函数，这正反映了系统的非线性特征。

三、参数选择

原则上正弦平方势中的两个参数可由实验确定，下面即可看到真正独立的参数只有一个 η，而 α 在本模型中则是完全确定的。虽然参数 η 可由实验确定，但我们不打算这样做。下面就直接从物理考虑出发，拟合常用的 Lindhard 势或 Moliere 势来确定它。

(1) α 的确定

由式(15)可以看出，在相平面$[\xi, V_\perp]$上，系统存在 n 个稳定的中心型奇点

$$V_\perp=0,\ \xi=2n\pi\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots), \tag{25}$$

和 n 个不稳定的鞍点型奇点(如图2(b)所示)

$$V_\perp=0,\ \xi=(2n+1)\pi$$
$$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots), \tag{26}$$

由式(12)，上式可化为

$$Y=0,\ X=\frac{(2n+1)\pi}{2\alpha}$$
$$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots) \tag{27}$$

从物理考虑出发，当 $X=2n+1$ 时，表示的是一系列彼此平行的晶面，在这些地方，粒子的运动是不稳定的，这正好对应于系统的一组鞍点；注意到这一点，由式(27)直接可得

$$\alpha=\pi/2 \tag{27}$$

(2) β 的确定

我们试图拟合常用的 Lindhard 势或 Molier 势，定出唯象参数 β。现以 Lindhard 势为例。当粒子振幅 $\xi_m=0$ 时，要求正弦平方势给出的振动周期与 Lindhard 势给出的结果相等，即

$$T_S(0)=T_L(0) \tag{28}$$

其中

$$T_S(0)=\frac{4}{\sqrt{\delta}}K(0) \tag{29}$$

$$T_L(0)=\frac{4\pi}{\epsilon}[2W''_L(0)]^{-\frac{1}{2}} \tag{30}$$

由式(12)、(28~30)可得

$$\eta=\frac{2K^2(0)W''_L(0)}{\alpha^2\pi^2}, \tag{31}$$

其中 α 由式(27)给出。上式表明，参数 η 只与无量纲的晶体参数 D 有关。

四、辐射强度

沟道粒子的辐射强度与它的轨道特征有关，下面我们分两种情况讨论。

1. 瞬时辐射强度

对于超相对论带电粒子，它的瞬时辐射强度 $I_{in}(t)$可表示为[7]

$$I_{in}(t)=\frac{2(z_1e)^4\varepsilon^2\gamma^2}{3m^2c^3} \tag{32}$$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \beta=\frac{v}{c} \tag{33}$$

其中 ε 是横向电场强度，$z_1e\varepsilon$ 是作用在沟道

粒子上的力，它的大小与粒子的轨道特征有关，因而与运动方程的解有关。根据定义可将它表示为

$$z_1e\varepsilon=-\frac{\partial V(x)}{\partial x} \tag{34}$$

其中 $V(x)$ 是粒子-晶体相互作用势。由式(10)和(5)可将上式化为

$$z_1e\varepsilon=-2A\alpha\eta\sin\alpha X\cos\alpha z \tag{35}$$

其中 $A=K/d_P$，而 X 是无量纲的横向位移，且由式(3)给出。将式(33)代入式(32)，并注意到式(13)，可进一步将瞬时强度(32)用 Jacobi 椭圆函数表示为

$$I_{in}(t)=I_0k^2Sn^2(pt)dn^2(pt) \tag{36}$$

其中

$$p=\frac{2\sqrt{\delta}\ V_\perp}{d_P},I_0=\frac{8(z_1e)^2A^2\alpha^2\eta^2r^2}{3m^2c^3}, \tag{37}$$

而 k 由式(18)给出。从式(35)可以看出，$z_1e\varepsilon$（即瞬时辐射强度 $I_{in}(t)$）与运动方程(4)的解直接有关，可见只要求出运动方程(4)的解，则瞬时辐射强度就完全确定。事实表明，引入归一化的正弦平方势(10)以后，库马霍夫辐射的瞬时辐射强度(36)则可用 Jacobi 椭圆函数严格地表示出来。

2. 平均辐射强度

瞬时辐射强度描述了带电粒子辐射的瞬态特征，而实验上的可观测量却是平均辐射强度；平均辐射强度 I 定义为瞬时辐射强度在一个周期内的平均值，即

$$I=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}I_{in}(t)dt \tag{38}$$

将式(36)代入上式，完成积分后可得

$$I=\frac{I_0}{3}k'^2 \tag{39}$$

其中

$$k'=\sqrt{1-k^2} \tag{40}$$

称为 Jacobi 椭圆函数的补模。从式(39)、(40)和(18)可以看出，库马霍夫辐射的平均强度与粒子的运动振幅有关。考虑到晶体内部的电场强度可高达 $10^{11\sim12}$ 电子伏/厘米，库马霍夫的平均强度比现有的电子同步加速器高 6～9 个量级。

五、辐射谱特征

在超相对论情况下，库马霍夫辐射分布角宽 $\Delta\theta$ 可近似地表示为[7]

$$\Delta\theta=r^{-1}。 \tag{41}$$

要了解库马霍夫辐射的谱分布，有必要知道辐射角宽 $\Delta\theta$ 与粒子在沟道中的最大偏转角 ψ 之间的关系。ψ 定义为粒子的横向动量与纵向动量之比，即

$$\psi=\left\{\left|\frac{dx}{dt}\right|\Big/c\right\}_{\max}, \tag{42}$$

由正弦平方势(10)可直接求出

$$\psi=\left(\frac{Ad_P\eta}{mc^2r}\right)^{\frac{1}{2}}。 \tag{43}$$

定义 $\zeta=\psi/\Delta\theta$，由式(41)、(42)可得：

$$\zeta=\frac{\psi}{\Delta\theta}=\left(\frac{Ad_P\eta r}{mc^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{44}$$

下面就两种情况进行讨论。

(1) $\zeta\gg1$

当 $\zeta\gg1$ 时，粒子在沟道内的偏转角 ψ 比 $\Delta\theta$ 大得多，这时我们可以认为某个方向上的辐射，主要是与这个方向平行的那部分轨道贡献的。在超相对论情况下，对向前辐射有贡献的那部分轨道大多位于 $dx/ds=0$ 附近，我们假设粒子在这部分轨道上所经受的外场是不变的，则情况与同步辐射完全类似。由[7]可知，大部分辐射都集中在频率

$$\omega_1\approx\left|\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right|_{\max}(mc)^{-1}r^2 \tag{45}$$

附近，由式(10)和上式可得

$$\omega_1\approx\frac{2A\alpha rkk'r^2}{mc} \tag{46}$$

其中 k' 由式(40)给出。

(2) $\zeta\ll1$

当 $\zeta\ll1$ 时，粒子在沟道中的偏转角 ψ 比 $\Delta\theta$ 小得多，整个轨道上的辐射都集中在粒子运动方向上。换句话说，在 $\Delta\theta$ 内任何一点的

辐射强度，几乎整个轨道都有贡献，由[7]可知，辐射的主要部分都集中在频率

$$\omega_2 \approx \frac{v_\perp r^2}{x_m} \tag{47}$$

附近，其中 x_m 是粒子的最大横向位移，$x_m/v_\perp$ 表示粒子到达最大横向位移所需要的时间，且近似地有

$$x_m/v_\perp = T_0/4 \tag{48}$$

其中

$$T_0 = \frac{d_P T}{2v} = \frac{2d_P K}{c\sqrt{\delta}} \tag{49}$$

是以"时间"为单位的粒子振动周期，将式(49)代入式(47)，可得

$$\omega_2 = \frac{2\sqrt{\delta}\,cr^2}{d_P K(k)} \tag{50}$$

其中 $K(k)$ 由式(23)给出。

六、应　　用

我们以正电子为例，具体分析一下它在晶体沟道中的库马霍夫辐射强度和最大频率。选择与晶体有关的参数 $z_2=6$, $N=1.1\times10^{23}$ 厘米$^{-3}$, $d_P=3.57\times10^{-8}$ 厘米；与入射粒子有关的参数 $z_1=1$, $k=\sin\dfrac{\xi_m}{2}=\dfrac{1}{2}$，由此可求得 $A=\dfrac{2K}{d_P}=3.04\times10^{-2}$ 尔格/厘米。

由第3节描述的方法可定出唯象参数 $\eta=0.14$。对于不同能量的正电子，由式(39)、(45)、(47)和式(44)可分别求得库马霍夫辐射的平均强度 I，最大辐射频率 ω_1、ω_2 以及无量纲的偏转角 ζ，如表1所示。

表1　正电子的平均辐射强度和最大辐射频率

r	ω_1 (秒$^{-1}$)	ω_2 (秒$^{-1}$)	I (兆电子伏/秒)	ζ
10^2	2.4×10^{18}	1.6×10^{19}	7.9×10^{8}	0.14
10^3	2.4×10^{20}	4.8×10^{20}	7.9×10^{10}	0.46
10^4	2.4×10^{22}	1.6×10^{22}	7.9×10^{12}	1.44
4×10^4	3.8×10^{23}	1.3×10^{23}	1.3×10^{14}	2.88

对于能量为50兆电子伏的正电子，它的相对论因子 r 大约为 10^2，由表1可以看出，相应的 $\omega_1=2.4\times10^{18}$ 赫；根据公式 $\varepsilon=h\omega$（h 是普朗克常数）可求得库马霍夫辐射的能量 ε 为10千电子伏，显然这个能量已进入 r 能区。

本文从唯象分析出发，提出了归一化的正弦平方势，并解析地处理了带电粒子的库马霍夫辐射的辐射强度和光谱特征，其结果同[3]符合得很好。

参 考 文 献

[1] Kumakhov M. A.; *Phys. Lett.*, 1976, **57A**, No. 1, 17.

[2] Кумахов M. A.; *ЖЭТФ*, 1977, **72**, № 4, 1489.

[3] Kheifets S., Knight T.; *J. Appl. Phys.*, 1979, **50**, No. 9, 5937.

[4] 罗诗裕;《物理》; 1983, **12**, No. 1, 6.

[5] Ellison J. A.; *Phys. Rev. B*, 1978, **18**, No. 11, 5948.

[6] Byrd P. E. *et al.*; Handbook of Elliptic Integerals for Engineers and Scientists, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[7] Landau L. D., Lifoshits E. M.; The Classical Theory of Fields, Pergamon Press, Oxford, 1975.