中国激光
第11卷 第2期

统一表述谐振腔共振条件的一个公式

邓锡铭 陈泽尊

（中国科学院上海光机所）

提要：引用流体模型方法[1]，导出了光学谐振腔的谐振频率的统一表达式：$\nu=\frac{qc}{2L_0}\frac{1}{(1-E_G)}$。并用几个实例进行了验证。

A unified expression for oscillation frequency of optical resonance cavities

Deng Ximing, Chen Zezun

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: Using the hydrodynamic model we have derived a unified expression for oscillation frequency of an optical cavity. It is as follows:

$$\nu=\frac{qc}{2L_0}\frac{1}{(1-E_G)},$$

and it has been tested with several examples.

在文献[1]中，我们建立了一个描写光束传输的流体模型。本文企图运用流体模型方法，统一表述一个光学谐振腔的共振条件。讨论的范围先限于稳定开放腔，并且腔长远大于共振波长，即谐振模满足傍轴条件。但导出的结果也适用于波导封闭腔。

在流体模型中，我们已定义了一个场流体的速度（以下称为能速度）$\boldsymbol{v}_c$：

$$\boldsymbol{v}_c\equiv c\nabla L \tag{1}$$

c 是光速，L 是稳态传输光束 $\phi=\phi_0 e^{ikL}$ 的准程函。

一个场流体横截面，按能速度 $\boldsymbol{v}_c$ 沿着光束的衍射光线向前流动，它的惯心的能速度 V_c 等于：

$$V_c\equiv\int\phi_0^2\boldsymbol{v}_c\boldsymbol{e}_3\,ds \tag{2}$$

这里，ϕ_0^2 满足归一化条件，即 $\int\phi_0^2 ds=1$。$\boldsymbol{e}_3$ 是沿传输轴线的单位矢量。原应沿流体的等时间曲面取积分，但对于傍轴光束，如忽略高阶小量，积分可沿相应的横截面（平面）进行。结果得：

$$V_c=\sqrt{1-E_0}\,c \tag{3}$$

E_0 是在 ϕ_0^2 归一化条件下的内能，对于傍轴光束[1]：

收稿日期：1983年1月14日。

$$E_0=\frac{1}{k^2}\int(\nabla\phi_0)^2 ds+\int\phi_0^2\theta^2 ds \tag{4}$$

θ 是衍射光线切线与传输轴的夹角，$k=\frac{2\pi}{\lambda}$。

文献[2]已证明：在真空中传输的傍轴光束，E_0 是一个不变量。即流体等时间曲面的惯性中心一直保持匀速运动。

现在再定义一个场流体的相速度 $\boldsymbol{v}_p$：

$$\boldsymbol{v}_p\equiv\frac{c}{|\nabla L|}\boldsymbol{e} \tag{5}$$

$\boldsymbol{e}$ 是沿 ∇L 方向的单位矢量。

一个傍轴光束的等位相曲面，按相速度 $\boldsymbol{v}_p$ 沿着光束的衍射光线向前运动，自然保持等位相曲面，它的惯性中心的速度(以下称惯心相速度) V_p 等于：

$$V_p\equiv\int\phi_0^2\boldsymbol{v}_p\cdot\boldsymbol{e}_3\,ds \tag{6}$$

原应沿等位相曲面取积分，但在傍轴条件下，如忽略高阶小量，积分可沿相应的横截面(平面)进行。

从(1)、(5)式看出，$\boldsymbol{v}_c\cdot\boldsymbol{v}_p=c^2$。但在一般情况下，$V_c\cdot V_p\neq c^2$。下面推导惯心能速度 V_c 与惯心相速度 V_p 之间的关系。

因为：

$$\boldsymbol{v}_p\cdot\boldsymbol{e}_3=\frac{c}{|\nabla L|}\cos\theta \tag{7}$$

对于傍轴光束，可近似写成：

$$\boldsymbol{v}_p\cdot\boldsymbol{e}_3=\frac{c}{|\nabla L|}\left(1-\frac{1}{2}\theta^2\right) \tag{8}$$

又考虑到准程函 L 与振幅 ϕ_0 满足以下关系[1]：

$$(\nabla L)^2=1+\frac{1}{k^2}\cdot\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0} \tag{9}$$

对于傍轴光束

$$\frac{1}{k^2}\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\ll 1$$

所以，准程函的梯度可近似写成：

$$|\nabla L|=1+\frac{1}{2k^2}\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0} \tag{10}$$

(10)代回(8)并略去高阶小量得：

$$\boldsymbol{v}_p\cdot\boldsymbol{e}_3=c\left(1-\frac{1}{2k^2}\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}\right)\left(1-\frac{1}{2}\theta^2\right)$$

$$=c\left(1-\frac{1}{2k^2}\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}-\frac{1}{2}\theta^2\right)$$

$$\therefore\quad V_p=c\int\phi_0^2\left(1-\frac{1}{2k^2}\frac{\nabla^2\phi_0}{\phi_0}-\frac{1}{2}\theta^2\right)ds$$

$$=c\left(1+\frac{1}{2}E_g-\frac{1}{2}E_t\right) \tag{11}$$

这里，E_g，E_t 分别代表场流体截面的内禀能量和横向能量(即相对于惯心的动能)[1]，即

$$E_0=E_g+E_t \tag{12}$$

$$E_g=\frac{1}{k^2}\int(\nabla\phi_0)^2 ds;\ E_t=\int\phi_0^2\theta^2 ds$$

考虑到，在傍轴条件下 $E_0\ll 1$，$E_g\ll 1$，(12)代入(11)并忽略高阶小量，可得到：

$$V_p=c\left(1-\frac{1}{2}E_0\right)(1+E_g)$$

$$=c\frac{\sqrt{1-E_0}}{1-E_g} \tag{13}$$

把(3)代入(13)式，最后得到：

$$V_p=\frac{V_c}{1-E_g} \tag{14}$$

这就是惯心能速度与惯心相速度的关系式。由于流体截面的内禀能量 E_g 随着截面传输运动而变化，因此，与惯心能速度不同，惯心相速度 V_p 在传输过程中是变化的。

现在讨论谐振腔的共振条件。在一个腔长远大于波长的开放稳定腔内，谐振光束在腔内来回传输，对应于波面惯心以惯心相速度沿 $\overline{MM'}$ 连线来回运动(见图1)。M、M' 分别是腔两端等位相面的惯性中心[1]。这样，腔的共振条件就可表述为：波面惯心以相速度 V_p 沿 $\overline{MM'}$ 走一个周期的时间 T_p，必须等于光振动周期的整数倍，即：

$$T_p=\left(\frac{1}{\nu}\right)q \tag{15}$$

这里 q 是正整数，ν 是光的频率。现着手计算时间 T_p。按以上表述的共振条件，

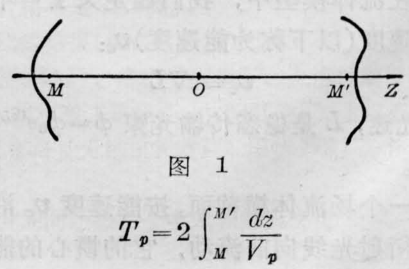

图 1

$$T_p=2\int_M^{M'}\frac{dz}{V_p} \tag{16}$$

这里 z 轴为腔轴，应用(14)式得:

$$T_p=\frac{2}{V_c}\int_M^{M'}(1-E_g)\,dz \qquad (17)$$

注意到 E_g 是腔内谐振模截面的内禀能量，并且满足对截面的归一化条件 $\int\phi_0^2 ds=1$。若转换成对腔体的归一化，即:

$$\int_{\substack{\text{腔内}\\\text{体积}}}(N\phi_0)^2\,d\tau=1 \qquad (18)$$

N 是归一化因子。并用 E_G 代表整个腔体内谐振模的内禀能量，则有:

$$E_G=\frac{1}{k^2}\int_{\substack{\text{腔内}\\\text{体积}}}N^2(\nabla\phi_0)^2\,d\tau \qquad (19)$$

显然，以下 E_G 和 E_g 的关系式成立:

$$E_G=\frac{1}{\overline{MM'}}\int_M^{M'}E_g\,dz \qquad (20)$$

另外定义一个等效腔长 L_0,

$$L_0\equiv\frac{\overline{MM'}}{V_c}c \qquad (21)$$

L_0 的物理意义是：用惯心能速度 V_c 从 M 走到 M' 这段时间内以光速 c 走的距离，它有光程的含意。这样，(21)、(20)式代回(17)式得:

$$T_p=\frac{2}{V_c}(\overline{MM'})(1-E_G)$$

$$=\frac{2L_0}{c}(1-E_G) \qquad (22)$$

把(15)代回(22)式，得到腔的共振频率和波长分别等于:

$$\nu=\frac{qc}{2L_0}\cdot\frac{1}{(1-E_G)} \qquad (23)$$

$$\lambda=\frac{2L_0}{q}(1-E_G) \qquad (24)$$

这就是我们所追求的谐振腔共振条件的统一表达式。通常表达式中的横模阶数已包含在内禀能量 E_G 之中。在整个推导过程中，曾多次采用了傍轴条件。因此，这个统一表达式只适用于腔长 $\gg\lambda$ 的开放腔。但对于波导封闭腔，由于 ∇L 处处与传输轴平行，在这种情况下，这个统一表达式仍旧适用。

下面举几个例子进行验证。

1．二维共焦腔

腔长为 L' 的一个对称共焦腔(见图 2)，谐振模的 ϕ_0 可表示为:

$$\phi_0=\frac{a_{mn}}{\sigma}\,e^{\frac{-(x^2+y^2)}{\sigma^2}}H_m\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{\sigma}\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}\,y}{\sigma}\right) \qquad (25)$$

这里，a_{mn} 是归一化系数，H_m、H_n 是厄米多项式，σ 是光束半径:

$$\sigma=\frac{1}{k\sigma_0}\sqrt{k^2\sigma_0^4+4z^2}\qquad \sigma_0\text{: 光腰半径}$$

考虑到腔长 L' 与 σ_0 的关系式:

$$Z_0\equiv\frac{1}{2}L'=\frac{1}{2}k\sigma_0^2 \qquad (26)$$

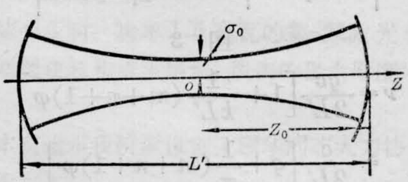

图 2

将(25)代入(12)，考虑到$(\nabla\phi_0)$的 Z 方向分量 $\frac{\partial\phi_0}{\partial z}$ 与 $\frac{\partial\phi_0}{\partial x}$、$\frac{\partial\phi_0}{\partial y}$ 相比是高级小量，可以忽略，并应用(26)式得:

$$E_0=\frac{2(m+n+1)}{k^2\sigma_0^2}$$

$$E_g=\frac{2(m+n+1)}{k^2\sigma^2}$$

$$E_G=\frac{\pi}{2}\left(\frac{m+n+1}{k^2\sigma_0^2}\right)=\frac{\lambda}{4L'}(m+n+1)$$

$$V_c=\left(1-\frac{1}{2}E_0\right)c=\left[1-\frac{(m+n+1)}{k^2\sigma_0^2}\right]c$$

而[1] $\overline{MM'}=\left[1-\frac{(m+n+1)}{k^2\sigma_0^2}\right]L'$

所以 $L'=L_0$

代回(23)式得:

$$\nu=\frac{qc}{2L_0}\left[1+\frac{\lambda}{4L'}(m+n+1)\right]$$

因方括弧内第二项 $\ll1$，如忽略高阶小量，q 乘第二项时可用 $\frac{2L'}{\lambda}$ 取代 q。这样，最后得出谐振频率:

$$\nu=\frac{c}{2L'}\left[q+\frac{1}{2}(m+n+1)\right]$$

与通常得到的结果相一致。

2．二维非对称共焦腔

见图 3，$L'=L_1+L_2$。类似于前例的计

算得:

$$E_G=\frac{1}{kL'}(m+n+1)\varphi$$

这里 $\quad \varphi=\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2L_1}{k\sigma_0^2}\right)+\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2L_2}{k\sigma_0^2}\right)$

$$L'=L_0$$

代回(23)式得出谐振频率:

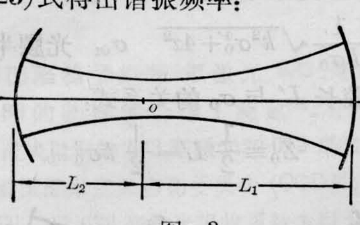

图 3

$$\nu=\frac{qc}{2L'}\left[1+\frac{1}{kL'}(m+n+1)\varphi\right]$$

$$=\frac{c}{2L'}\left[q+\frac{1}{\pi}(m+n+1)\varphi\right]$$

若忽略高阶小量,当 $L_1=L_2=\frac{1}{2}L'$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, 其结果与例1相同。

3. 波导封闭谐振腔

以矩形波导腔为例,见图4。

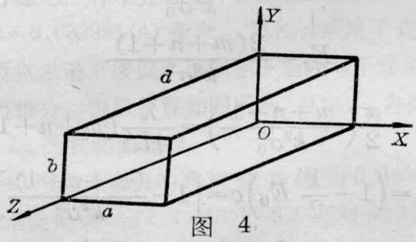

图 4

(腔体积为: $a\times b\times d$)

光束在波导腔内传输,由对称性可断定,波面为垂直于传输轴的平面。因此 ∇L 处处平行于传输轴线, 即横向能量 $E_t=0$, 所以 $E_0=E_g$。又因每个波面具有相同的 E_g, 故有:

$$E_G=E_g=E_0$$

考虑到波面是平面, 波面的惯性中心必落在波面平面上,故有 $\overline{MM'}=d$,引用(21)式得:

$$L_0=\frac{\overline{MM'}}{V_c}c=\frac{d}{\sqrt{1-E_0}}=\frac{d}{\sqrt{1-E_G}}$$

代回(23)得到谐振频率:

$$\nu=\frac{qc}{2d}\frac{1}{\sqrt{1-E_G}}$$

或写成: $\quad \left(\frac{q\lambda}{2d}\right)^2+E_G=1$

波导腔内归一化的场分量 ϕ_0 可表示为(取电分量或磁分量计算所得结果相同的):

$$\phi_0=\frac{2}{\sqrt{ab}}\cos(k_x x)\sin(k_y y)$$

其中, $\quad k_x=\frac{m\pi}{a},\ \ k_y=\frac{n\pi}{b}$

$$\therefore E_G=E_g=\frac{1}{k^2}\int(\nabla\phi_0)^2ds$$

$$=\frac{4}{abk^2}\left[\int_0^a\int_0^b k_x^2\sin^2(k_x x)\times\sin^2(k_y y)\,dx\,dy+\int_0^a\int_0^b k_y^2\cos^2(k_x x)\cos^2(k_y y)\,dx\,dy\right]$$

$$=\frac{1}{k^2}(k_x^2+k_y^2)=\left(\frac{m\lambda}{2a}\right)^2+\left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2$$

由此得:

$$\left(\frac{m\lambda}{2a}\right)^2+\left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2+\left(\frac{q\lambda}{2d}\right)^2=1$$

即: $\nu=c\left[\left(\frac{m}{2a}\right)^2+\left(\frac{n}{2b}\right)^2+\left(\frac{q}{2d}\right)^2\right]^{1/2}$

与通常结果一致。

通过上述几例验证了腔谐振频率(波长)统一表述式的正确性。存在这样一个表达式本身是有意义的,它把腔的谐振频率同某种能量联系起来了,用能量来描述在许多场合下会是方便的。纯粹从形式上看,从归一化总能量中扣除掉内禀能量,相当于腔长变短了。就是说,只要给出了腔体内的内禀能量 E_G, 就可以把一结构复杂的腔简化(等效)为一个 F-P 干涉仪。这种方法可用于一些不规则腔的谐振频率的分析。

最后指出, 这种概括的统一表述方法有助于对腔的一些整体特性的分析。例如,谐振光束在腔内的束宽对谐振频率的关系。这对分析激光陀螺的拍频频率的修正是至关重要的,将另文讨论。

参 考 文 献

[1] 邓锡铭,方洪烈;《激光》, 1980, **7**, No.2, 14.

[2] 邓锡铭,陈泽尊;《光学学报》, 1983, **3**, No. 5, 385.