激光斑纹场中的偏振统计学

P. F. Steeger and T. Asakura

(日本北海道大学应用电学研究所)

斑纹强度的一阶统计学已被应用于许多物理测量问题，诸如速度或粗糙度的测量。为了处理更加广泛的问题，我们研究了激光斑纹场中斯托克斯参量的统计学。这些斯托克斯参量(I, M, C, S)由如下方程的六个强度确定任何光束的偏振态：

$$I=I(0,\ 0)+I\left(\frac{2}{\pi},0\right)=a^2+b^2$$

$$M=I(0,\ 0)-I\left(\frac{2}{\pi},0\right)=a^2-b^2$$

$$C=I\left(\frac{\pi}{4},0\right)-I\left(\frac{3\pi}{4},0\right)=2ab\cos(\phi)$$

$$S=I\left(\frac{\pi}{4},0\right)-I\left(\frac{3\pi}{4},0\right)=2ab\sin(\phi)$$

$I(\theta,\ \varepsilon)$表示光的强度，其电矢量方向与X轴成θ角，而其电矢量的Y分量相对于X分量有一延迟ε。ϕ为所考虑的光束的线偏振分量之间的相位差。

我们研究了斑纹场的斯托克斯参量的几率密度函数及它们的最初三个矩，该斑纹场具有如下统计性质：

(i) $I(0,0)$和$I(\frac{\pi}{2},\ 0)$具有依赖于μ_1和μ_2的负指数分布。

(ii) $a=I(0,\ 0)$和$b=I\ (\frac{\pi}{2},\ 0)$在统计上彼此相关，相关系数为ρ。

(iii) ϕ在统计上与a和b无关。

第一斯托克斯参量是总强度，在上述假设下，可以证明，电场的幅值遵从瑞利分布。对这个分布进行各种处置，我们找到了I的几率密度函数：

$$P(I)=\frac{\exp\left(-I\frac{\mu_1+\mu_2}{2\mu_1\mu_2(1-\rho^2)}\right)}{\sqrt{(\mu_1-\mu_2)^2+4\mu_1\mu_2\rho^2}}\left[\exp\left\{\frac{I\sqrt{(\mu_1-\mu_2)^2+4\mu_1\mu_2\rho^2}}{2\mu_1\mu_2(1-\rho^2)}\right\}-\exp\left\{\frac{-I\sqrt{(\mu_1-\mu_2)^2+4\mu_1\mu_2\rho^2}}{2\mu_1\mu_2(1-\rho^2)}\right\}\right]$$

和I的矩：$\langle I\rangle=\mu_1+\mu_2$

$$\langle I^2\rangle=2(\mu_1+\mu_2{}^2+\mu_1\mu_2(1-\rho^2))$$

当$\rho=1$, $P(I)$化为负指数分布，这将得到一个重要结果，即，对于服从假设(i)、(ii)、(iii)的斑纹图样，为了建立一个充分展开的斑纹图样，只需电场幅值是完全相关的。换言之，在某些情况下充分展开了部分偏振的斑纹图样。

通过类似的计算，可以求得第二斯托克斯参量的几率密度函数和矩：

$$P(M)=\frac{1}{\sqrt{(\mu_1+\mu_2)^2+4\mu_1\mu_2\rho^2}}\exp\left[\frac{-M[(\mu_2-\mu_1)+\sqrt{(\mu_1+\mu_2)^2+4\rho^2\mu_1\mu_2}]}{2\mu_1\mu_2(1-\rho^2)}\right]\quad M\geqslant 0$$

$$P(M)=\frac{1}{\sqrt{(\mu_1+\mu_2)^2-4\rho^2\mu_1\mu_2}}\exp\left[\frac{M[(\mu_1-\mu_2)+\sqrt{(\mu_1+\mu_2)^2+4\rho^2\mu_1\mu_2}]}{2\mu_1\mu_2(1-\rho^2)}\right]\quad M\leqslant 0$$

因为第三斯托克斯参量即 C 如同第二斯托克斯参量一样是由两个强度之差来定义的，所以有可能利用(4)式及 $I(\frac{\pi}{4}, 0)$ 和 $I(\frac{3\pi}{4}, 0)$ 的强度相关系数来计算 C 的几率密度函数，相关系数为：

$$\gamma = \frac{(\mu_1-\mu_2)^2+\frac{1}{2}\rho^2\mu_1\mu_2(1-2\langle\cos^2\phi\rangle)+\frac{\rho^2\pi}{4}\mu_1\mu_2\langle\cos\phi\rangle^2}{(\mu_1+\mu_2)^2-\frac{\rho^2\pi}{4}\mu_1\mu_2\langle\cos\phi\rangle^2}$$

值得注意的是，当 ϕ 相等地分布时，γ 值不依赖于 a 和 b 的相关系数。这时，第三和第四斯托克斯参量的几率密度函数变为对称的拉普拉斯分布。第三斯托克斯参量的几率分布函数和矩为：

$$P(c)=\frac{1}{2\sqrt{\mu_1\mu_2}}\exp\left[-\frac{|c|}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\right]$$

这些量提供了研究散射过程中的双折射效应的可能性，因为这些效应导至 p(C) 和 p(S) 的不对称性。

在斯托克斯参量统计学的某些应用中，如研究折射紊流，当入射光束未被完全散射时，高斯斑纹场与一个相干的椭圆偏振的背景相叠加。在这种情况下，当满足 (i)-(iii) 假设的斑纹场上叠加一个相干背景时，知道斯托克斯参量的几率密数函数是有益的，应用两个部分相关的斑纹图样叠加的相干矩阵表示，得到了第一斯托克斯参量的几率密度函数的最终积分公式：

$$P(I)=\frac{1}{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}\int_0^I \exp\left[-\frac{I_1+\tilde{I}_{s1}}{\tilde{\mu}_1}-\frac{(I-I_1)+I_{s2}}{\tilde{\mu}_2}\right] I_0\left(\frac{\sqrt{I_1\tilde{I}_{s1}}}{\tilde{\mu}_1}\right) I_0\left(\frac{\sqrt{(I-\tilde{I}_{s2})}}{\tilde{\mu}_2}\right) dI_1$$

由于第二、第三和第四斯托克斯参量的几率密度函数强烈地依赖于定义它们时所选取的坐标系，因而我们必须由复振幅的四阶联合几率密度函数来计算这些斯托克斯参量的几率密度函数。我们推导出 $P(M)$ 的如下表示式：

$$P(M)=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{\exp\left[\frac{-A(I_1,\ M,\ \theta_2,\ I_{s1},\ I_{s2})}{(1-\rho^2)}\right]}{2\pi\mu_1\mu_2(1-\rho^2)} I_0\left(\sqrt{I_1\left(\frac{a(I_{s1},I_{s2},\rho)}{(1-\rho^2)^2}\right)+\frac{4\rho^2(I_1-M)}{\mu_1\mu_2(1-\rho^2)^2}+\frac{\sqrt{(I_1-M)I_1}}{(1-\rho^2)^2}b(I_{s1},I_{s2},\rho,\theta_2)}\right) d\theta_2\, dI_1$$

对 $P(M)$ 和 $P(I)$ 的积分已进行数值计算。(6)式代入不同的 ρ 和 μ 值，可以得到第三和第四斯托克斯参量的几率密度函数。