中国激光
第10卷 第7期

行波高斯光束 Lamb 理论及考虑径向分布的环形激光输出表达式

李 天 初

(中国计量科学研究院)

提要：导出了行波高斯光束(TEM_{00}模)自洽方程及其三阶解，并将其推广，得到考虑一系列参量的轴向、径向分布的四频环形激光输出表达式，为明确认识高斯光束和各参量的分布及它们之间相对位置对环形激光拍频输出的影响提供了理论基础。

Lamb's theory of traveling-wave Gaussian beams and output expressions of ring lasers considering the radial distribution

Li Tianchu

(National Institute of Metrology)

Abstract: Self-consistent equations for traveling-wave Gaussian beams (TEMoo) and their third-order solutions are given and extended to obtain output expressions of four-frequency ring lasers when axial and radial distributions of beams and a series of parameters are considered, so that the theoretical basis is provided for better understanding of the distributions of Gaussian beams and parameters as well as their relative about effects, on beat output, positions.

一、引 言

近年来，随着对环形激光研究的不断深入，已经出现了一些讨论增益和朗缪尔流的径向分布对拍频输出影响的论文[1~3]。事实上环形腔中行波高斯光束和环形激光所涉及的一系列参量的轴向、径向分布及它们间相对位置的变化，都会对拍频输出产生不同程度的影响。

现有的环形激光理论是在驻波 Lamb 理论的基础上推广得来的。Lamb 理论在推导过程中，忽略了各参量的径向分布，并在轴向完成了积分。

当考虑到径向分布，且限制腔内只存在最低阶横模(TEM_{00})振荡时，须将 Lamb 行波理论加以推广，建立高斯光束 Lamb 行波理论，然后仍然考虑到环形激光的辐射捕获、朗缪尔流、偏频、外磁场塞曼分裂以及差损等效应的贡献，得到计及径向分布的单纵模四频环形激光理论。

收稿日期：1982年6月30日。

二、高斯光束 Lamb 行波理论

由 Maxwell 方程和物质方程，并设：① 磁化功≪极化辐射功；② 损失简化为焦耳热；③ 电场强度 $\boldsymbol{E}$ 为单一偏振态并用标量表示，即得到场方程（略去描述闭锁效应项）：

$$\nabla^2 E=\frac{1}{c^2}\ddot{E}+\frac{4\pi}{c^2}\ddot{P}+\frac{4\pi}{c^2}\sigma\dot{E} \tag{1}$$

在忽略径向分布时，可将 E 按空腔本征行波纵模展开。此时有：

$$\nabla^2\to\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

按与驻波 Lamb 理论相同的步骤，即导出 Lamb 行波理论[5]。当计及场的径向分布时，E 需按空腔纵、横模展开。如果限制腔内只存在 TEM_{00} 模振荡，并认为振幅和相位是时间的慢变化函数，以及将振幅对坐标的依赖关系理解为激活介质对空腔本征模的微小修正，因而也是慢变化函数，可以略去。于是，电场强度 E 可展开为

$$E(r,z,t)=\sum_q\{u_{00}(r)\{A_q(t)\sin(k_qz)+\widetilde{A}_q(t)\cos(k_qz)\}\} \tag{2}$$

$$\begin{cases}A_q(t)=E_{1,q}(t)\cos[\omega_{1,q}t+\varphi_{1,q}(t)]\\ \qquad\quad +E_{2,q}(t)\cos[\omega_{2,q}t+\varphi_{2,q}(t)]\\ \widetilde{A}_q(t)=E_{1,q}(t)\sin[\omega_{1,q}t+\varphi_{1,q}(t)]\\ \qquad\quad -E_{2,q}(t)\sin[\omega_{2,q}t+\varphi_{2,q}(t)]\end{cases} \tag{3}$$

$$u_{00}(r)\cong\frac{1}{w_{(z)}}e^{-\frac{r^2}{\omega(z)^2}-i\frac{k_qr^2}{2R(z)}}$$

$$\cong\frac{1}{w_0}e^{-\frac{r^2}{w_0^2}-i\frac{k_qr^2}{2R}} \tag{4}$$

式中 r、z、φ 为光束柱坐标；q 为纵模序数；1、2分别表示顺、逆时针方向传播的行波；

$$k_q=\frac{2\pi}{\langle L\rangle}q$$

为波数；$w(z)$ 为光束半径（w_0 为腰半径）；$R(z)$ 为波前曲率半径。在光束柱坐标系中，

$$\nabla^2=\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] \tag{5}$$

如果把(2)式直接代入场方程求解，会使问题变得非常复杂。有人曾经试图用(2)、(5)式在驻波情况下直接求解场方程，至今没有得到解析结果，只好求助计算机得到一些数字解[4]。然而，由于受了只考虑 TEM_{00} 模的限制，由式(2)～(4)可以看出：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}=0;\quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\gg\frac{\partial^2}{\partial r^2};\quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\gg\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

因此，仍然有，

$$\nabla^2\to\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

式(1)仍可简化为

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2}E+\frac{4\pi}{c^2}\sigma\dot{E}+\frac{1}{c^2}\ddot{E}=-\frac{4\pi}{c^2}\ddot{P} \tag{6}$$

将(2)～(4)式代入上式并分别对正弦、余弦场求解，按与 Lamb 理论类似的推导，得到（下面推导中未加说明的符号均为常用的 Lamb 理论符号）：

$$\sum_q\left[\frac{d^2}{dt^2}+\frac{w_q}{Q_q}\frac{d}{dt}+\Omega_q^2\right]\times\left\{u_{00}(r)\begin{bmatrix}A_q\sin(k_qz)\\ \widetilde{A}_q\cos(k_qz)\end{bmatrix}\right\}$$

$$=-4\pi\frac{d^2}{dt^2}P \tag{7}$$

上式两边同乘：

$$\frac{2}{L}e^{i\frac{k_nr^2}{2R}}\begin{bmatrix}\sin(k_nz)\\ \cos(k_nz)\end{bmatrix}$$

式中 L 为增益长度；n 为纵模序数。积分并利用正交性，即有：

$$\sum_q\left[\frac{d^2}{dt^2}+\frac{\omega_q}{Q_q}\frac{d}{dt}+\Omega_q^2\right]\times\left\{\int_0^\infty rdr\left[\frac{1}{w_0}e^{-\frac{r^2}{w_0^2}-i\frac{k_qr^2}{2R}}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times e^{i\frac{k_nr^2}{2R}}\delta_{qn}\begin{bmatrix}A_q(t)\\ \widetilde{A}_q(t)\end{bmatrix}\right]\right\}$$

$$=-4\pi\frac{d^2}{dt^2}\left\{\frac{2}{L}\int_0^\infty rdr\int_0^L dz\right.$$

$$\times\left(e^{i\frac{k_n r^2}{2R}}\begin{bmatrix}P\sin(k_n z)\\ P\cos(k_n z)\end{bmatrix}\right)\Bigg\},$$

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}+\frac{\omega_n}{Q_n}\frac{d}{dt}+\Omega_n^2\right]$$

$$\times\int_0^\infty rdr\left\{\left[\frac{1}{w_0}e^{-\frac{r^2}{w_0}}\right]\begin{bmatrix}A_n(t)\\ \widetilde{A}_n(t)\end{bmatrix}\right\}$$

$$=-4\pi\frac{d^2}{dt^2}\begin{bmatrix}P'_n(t)\\ \widetilde{P}'_n(t)\end{bmatrix} \quad (8)$$

实际上，由于激光振荡谱线很窄，可以认为 $P'_n(t)$、$\widetilde{P}'_n(t)$ 是准单色的，因而有：

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{bmatrix}P'_n(t)\\ \widetilde{P}'_n(t)\end{bmatrix}\cong-\omega_n^2\begin{bmatrix}P'_n(t)\\ \widetilde{P}'_n(t)\end{bmatrix}$$

于是(8)式变为：

$$[\quad]\begin{bmatrix}A_n(t)\\ \widetilde{A}_n(t)\end{bmatrix}=4\pi\omega_n^2\begin{bmatrix}P_n(t)\\ \widetilde{P}_n(t)\end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{cases}P_n(t)=\left(\dfrac{2}{w_0}\right)\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^\infty rdr\int_0^L dz\\ \qquad\times[e^{i\frac{k_n r^2}{2R}}P(r,z,t)\sin(k_n z)]\\ \widetilde{P}_n(t)=\left(\dfrac{2}{w_0}\right)\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^\infty rdr\int_0^L dz\\ \qquad\times[e^{i\frac{k_n r^2}{2R}}P(r,z,t)\cos(k_n z)]\end{cases} \quad (10)$$

依照环形激光理论推导中惯用的方法，将 $P_n(t)$、$\widetilde{P}_n(t)$ 对频率 ω_1 写成同相项和正交项之和：

$$\begin{cases}P_n(t)=S_{1,n}(t)\sin\theta_{1,n}\\ \qquad+C_{1,n}(t)\cos\theta_{1,n}\\ \widetilde{P}_n(t)=\widetilde{S}_{1,n}(t)\sin\theta_{1,n}\\ \qquad+\widetilde{C}_{1,n}(t)\cos\theta_{1,n}\end{cases} \quad (11)$$

$$\theta_{1,n}=\omega_{1,n}t+\varphi_{1,n(t)}$$

将(3)、(11)式代入(9)，经整理得到自洽方程：

$$\begin{cases}\dot{E}_{1,n}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\omega_n}{Q_n}\right)E_{1,n}\\ \quad=-\pi\omega_n(S_{1,n}-\widetilde{C}_{1,n})\\ [\omega_{1,n}+\dot{\varphi}_{1,n}(t)-\Omega_{1,n}]E_{1,n}\\ \quad=-\pi\omega_n(\widetilde{S}_{1,n}+C_{1,n})\end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases}\dot{E}_{2,n}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\omega_n}{Q_n}\right)E_{2,n}\\ \quad=-\pi\omega_n[(S_{1,n}+\widetilde{C}_{1,n})\cos\psi_n\\ \qquad+(C_{1,n}-\widetilde{S}_{1,n})\sin\psi_n]\\ [\omega_{2,n}+\dot{\varphi}_{2,n}(t)-\Omega_{2,n}]E_{2,n}\\ \quad=\pi\omega_n[(S_{1,n}+\widetilde{C}_{1,n})\sin\psi_n\\ \qquad-(C_{1,n}-\widetilde{S}_{1,n})\cos\psi_n]\end{cases} \quad (13)$$

$$\psi_n=(\omega_{2,n}-\omega_{1,n})t+[\varphi_{2,n}(t)-\varphi_{1,n}(t)] \quad (14)$$

至此即得到与不计及径向分布的行波 Lamb 理论在形式上完全一样的自洽方程表达式，区别仅在于 $P_n(t)$、$\widetilde{P}_n(t)$ 中增加了径向分布的贡献：

$$\frac{2}{w_0}\int_0^\infty rdr\left(e^{i\frac{k_n r^2}{2R}}\right)。$$

接着，用与不考虑径向分布的行波理论完全相同的推导步骤[5]，即可求解自洽方程。

(I) 一阶解

计算运动原子一阶极化强度：

$$P^{(1)}(r,z,t)=N\mathscr{P}\sum_{\alpha=a,b}\int_{-\infty}^{\infty}dv[\rho_{ab}^{(1)}(\alpha,r,z,v,t)+C.C] \quad (15)$$

$$\rho_{ab}(\alpha,r,z,v,t)$$
$$=-\frac{i}{\hbar}\mathscr{P}\lambda_a\frac{1}{\gamma_a}\int_{-\infty}^{\infty}dt'F(t,t') \quad (16)$$

$$F(t,t')=E(r,z-(t-t')v,t')e^{-(i\omega_{ab}-\gamma)(t-t')} \quad (17)$$

经计算整理，得到 $P_n^{(1)}(t)$, $\widetilde{P}_n^{(1)}(t)$ 并与(11)式比较求得 $S_{1,n}^{(1)}(t)$, $\widetilde{S}_{1,n}^{(1)}(t)$, $C_{1,n}^{(1)}(t)$, $\widetilde{C}_{1,n}^{(1)}(t)$。在上述运算过程中，出现一次对电场强度 E 的积分，所以这里得到的一阶解中，均含有因子：

$$\left[\left(\frac{2}{w_0}\right)\left(\frac{1}{w_0}e^{-\frac{r^2}{w_0^2}}\right)\right]$$

(II) 三阶解

与一阶解的推导相似，可求得 $S_{1,n}^{(3)}(t)$, $\widetilde{S}_{1,n}^{(3)}(t)$, $C_{1,n}^{(3)}(t)$, $\widetilde{C}_{1,n}^{(3)}(t)$。运算过程中，三次出现对 E 的积分，所以解得三阶解中均含有因子：

$$\left[\left(\frac{2}{w_0}\right)\left(\frac{1}{w_0}e^{-\frac{r^2}{w_0^2}}\right)^3\right]$$

(III) 基本方程

设无量纲光强：

$$I_{j0}=(\mathscr{P}^2E_j^2(t))/(2\hbar\gamma_a\gamma_b) \tag{18}$$

将一、三阶解代入自洽方程(12), (13)得基本方程:

$$\begin{cases}\dot{I}_1=\dfrac{c}{\langle L\rangle}(\alpha_1-\beta_1I_1-\theta_{12}I_2)I_1\\ \dot{I}_2=\dfrac{c}{\langle L\rangle}(\alpha_2-\beta_2I_2-\theta_{21}I_1)I_2\end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases}\omega_1+\dot{\varphi}_1(t)=\Omega_1+\sigma_1+\rho_1I_1+\tau_{12}I_2\\ \omega_2+\dot{\varphi}_2(t)=\Omega_2+\sigma_2+\rho_2I_2+\tau_{21}I_1\end{cases} \tag{20}$$

式中符号的意义均为经过以下三点修改的 Lamb 理论引用的符号:

(1) 各系数中增益 G 均改为增益系数 $g(r, z, t)$;

(2) 所有的光强项理解为:

$$I=I_0\left(\frac{1}{w_0}e^{-\frac{r^2}{w_0^2}}\right)^2; \tag{21}$$

(3) 对所有含 Lamb 系数的项都进行如下运算:

$$\left(\frac{2}{w_0^2}\right)\left[\int_0^\infty rdr\int_0^L dz\left(e^{-\frac{r^2}{w_0^2}}\right)\right] \tag{22}$$

也就是说，将一阶解的高斯因子和三阶解中的一次高斯因子统一放在积分核前。由于三阶解描述推斥效应和光强成正比，因此，将三阶解余下的二次高斯因子归入光强项，理解为光强在径向按高斯分布的平方分布。显然，这个解析解的物理意义是合理的。

三、计及径向分布的单纵模四频环形激光理论

四频环形激光可以看作两旋独立振荡的双频行波模(两种圆偏振态)在同一个腔中运转，其中每种旋向的模式都可以用(19)、(20)式的基本方程表示。从(19)、(20)式出发可求一旋行波模的拍频:

$$\begin{aligned}\Delta\omega_{1,2}&=[\omega_2+\dot{\varphi}_2(t)]-[\omega_1+\dot{\varphi}_1(t)]\\&=(\Omega_2-\Omega_1)+(\sigma_2-\sigma_1)\\&\quad+(\tau_{21}-\rho_1)I_1-(\tau_{12}-\rho_2)I_2\end{aligned} \tag{23}$$

考虑到辐射捕获效应，有与不计及径向分布时相同的代换[6,7]可得到:

$$\begin{aligned}\Delta\omega_{1,2}=&(\Omega_2-\Omega_1)+(\sigma_2-\sigma_1)\\&+2(\rho-\tau)i\\&+[(\tau_{21}-\tau_{12})+(\rho_2-\rho_1)\\&-\frac{2R}{g(r,z)}(\sigma_2\beta_2-\sigma_1\beta_1)]I\end{aligned} \tag{24}$$

式中

$$\begin{cases}\rho=\dfrac{1}{2}(\rho_1+\rho_2)\\ \tau=\dfrac{1}{2}(\tau_{12}+\tau_{21})\end{cases};$$

$$\begin{cases}I=\dfrac{1}{2}(I_1+I_2)\\ i=\dfrac{1}{2}(I_2-I_1)。\end{cases}$$

当增益管中 Ne^{20}、Ne^{22} 以 1:1 充气，式(24)中的项又可写作:

$$\begin{cases}\sigma_2-\sigma_1=\sigma'(\xi_2-\xi_1)\\ \rho_2-\rho_1=\rho'(\xi_2-\xi_1)\\ \sigma_2\beta_2-\sigma_1\beta_1=(\sigma'\beta+\sigma\beta')(\xi_2-\xi_1)\\ \tau_{21}-\tau_{12}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{c}{2\langle L\rangle}g(r,z)\\ \quad\times\left[\dfrac{\eta}{\xi_{1,2}}\dfrac{Z'_{i1,2}}{Z_i(0)}+\dfrac{\tilde{\eta}}{\tilde{\xi}_{1,2}}\dfrac{\tilde{Z}'_{i1,2}}{\tilde{Z}_i(0)}\right]\\ \quad\times(\xi_2-\xi_1)\end{cases} \tag{25}$$

式中

$$\xi_j=\frac{\omega_j-\omega_0}{ku},\quad \xi_{j,k}=\frac{1}{2}(\xi_j+\xi_k); \tag{26}$$

$$\begin{cases}\eta=\dfrac{\gamma_{ab}}{ku};\\ \gamma_{ab}=2\pi(57p+10)\times10^6;\end{cases}$$

ω_0 为 Ne^{20} 增益曲线中心圆频率; $\dfrac{ku}{2\pi}=\Delta\nu_D$ 为增益曲线多普勒宽度。式中上标～表示对 Ne^{22} 增益曲线中心的相应量。定义:

$$\begin{aligned}sfc(r,z)&\\ &\equiv\left(\frac{2}{w_0^2}e^{-\frac{r^2}{w_0^2}}\right)\\ &\quad\times\left[\frac{g(r,z)}{ku}\frac{c}{2\langle L\rangle}s(r,z)\right]\end{aligned} \tag{27}$$

$$s(r,z)\equiv s_\sigma+s_R+s_\rho+s_\tau+s_i \tag{28}$$

依次为描述牵引、辐射捕获、自推斥、互推斥、光强差的非互逆效应的系数;

$$SFC \equiv \int_0^\infty rdr\int_0^L dz[sfc(r,z)]; \tag{29}$$

$$\begin{cases} s_\sigma \equiv \dfrac{2\langle L\rangle}{cg(r,z)}\sigma'; \\ s_R \equiv -\dfrac{2\langle L\rangle}{cg(r,z)}\dfrac{2R}{g(r,z)}(\sigma'\beta+\sigma\beta')I; \\ s_\rho \equiv \dfrac{2\langle L\rangle}{cg(r,z)}\rho' I; \\ s_\tau \equiv \dfrac{2\langle L\rangle}{cg(r,z)}(\tau_{21}-\tau_{12})\dfrac{1}{\xi_2-\xi_1}I; \\ s_i \equiv \dfrac{2\langle L\rangle}{cg(r,z)}\dfrac{\rho-\tau}{\beta-\theta}\left(\alpha'-\dfrac{\beta}{\Gamma}I\right) \end{cases} \tag{30}$$

$$f_{1,2} \equiv \frac{2\langle L\rangle}{c}\frac{\rho-\tau}{\beta-\theta} \tag{31}$$

$$D(r) \equiv \frac{2}{w_0^2}e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} \tag{32}$$

式中 $R=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\Gamma}-1\right)$, Γ 为与碰撞有关的参量。并有:

$$\xi_2-\xi_1=\frac{\omega_2-\omega_1}{ku}\cong\frac{\Omega_2-\Omega_1}{ku} \tag{33}$$

$$\Delta\Omega_{1,2}=(\Omega_2-\Omega_1)=-\Delta\omega'_\Omega-\Delta\omega'_E+\Delta\omega_H(r) \tag{34}$$

式中 $\Delta\omega'_\Omega$、$\Delta\omega'_E$ 分别为输入角速率和地球自转产生的拍频输出。于是(24)式可表示为:

$$\begin{aligned}\Delta\omega_{1,2} &= \int_0^\infty rdr\int_0^L dz\{[D(r)+sfc_{1,2}(r,z)]\Delta\Omega_{1,2}\} \\ &\quad -\int_0^\infty rdr\int_0^L dz \\ &\quad \times\left\{D(r)\left[\frac{c}{2\langle L\rangle}f_{1,2}(\gamma_2-\gamma_1)\right]\right\} \\ &= (1+SFC_{1,2})(-\Delta\omega'_\Omega-\Delta\omega'_E) \\ &\quad +\int_0^\infty rdr\int_0^L dz \\ &\quad \times\{[D(r)+sfc_{1,2}(r,z)]\Delta\omega_H(r)\} \\ &\quad -\int_0^\infty rdr\int_0^L dz\left\{(Dr)\left[\frac{c}{2\langle L\rangle}f_{1,2}(\gamma_2-\gamma_1)\right]\right\}\end{aligned} \tag{35}$$

如果再考虑到放电管中激活介质的定向流动, 则(35)式中应增加描述朗缪尔流零漂的项[6,7]。当进一步考虑磁场的塞曼效应时, 在激活介质只受轴向磁场的前提下 (这可以从磁屏蔽等措施的设计上加以保证), 沿用 Lamb 标量理论近似处理仍有相当好的精度[8]。这样(35)式写作:

$$\begin{aligned}\Delta\omega_{1,2} &= (1+SFC_{1,2})(-\Delta\omega'_\Omega-\Delta\omega'_E) \\ &\quad +\int_0^\infty rdr\int_0^L dz \\ &\quad \times\{[D(r)+sfc_{1,2}(r,z)]\Delta\omega_H(r)\} \\ &\quad +\int_0^\infty rdr\int_0^L dz[sfc_{1,2}(r,z)\Delta\omega_Z(r,z)] \\ &\quad +2k\int_0^\infty rdr\int_0^L dz[sfc_{1,2}(r,z)V(r,z)] \\ &\quad -\int_0^\infty rdr\int_0^L dz \\ &\quad \times\left[D(r)\frac{c}{2\langle L\rangle}f_{1,2}(\gamma_2-\gamma_1)\right]\end{aligned} \tag{36}$$

式中 $\Delta\omega_{Z(r,z)}$ 为磁场塞曼效应引起的增益曲线频率分裂。式(36)即为考虑径向、轴向分布时一旋行波模 1, 2 的拍频表达式。

按上述步骤, 从(19)、(20)式出发, 同样可导出另一旋模 3, 4 的拍频表达式:

$$\begin{aligned}\Delta\omega_{3,4} &= (1+SFC_{3,4})(\Delta\omega'_\Omega+\Delta\omega'_E) \\ &\quad +\int_0^\infty rdr\int_0^L dz\{[D(r)+sfc_{3,4}(r,z)]\Delta\omega_H(r)\} \\ &\quad +\int_0^\infty rdr\int_0^L dz[sfc_{3,4}(r,z)\Delta\omega_Z(r,z)] \\ &\quad -2k\int_0^\infty rdr\int_0^L dz[sfc_{3,4}(r,z)V(r,z)] \\ &\quad +\int_0^\infty rdr\int_0^L dz \\ &\quad \times\left[D(r)-\frac{c}{2\langle L\rangle}f_{3,4}(\gamma_3-\gamma_4)\right]\end{aligned} \tag{37}$$

差动结果

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= \Delta\omega_{3,4}-\Delta\omega_{1,2} \\ &= (1+SFC)(\Delta\omega_\Omega+\Delta\omega_E) \\ &\quad +\int_0^\infty rdr\int_0^L dz\{[sfc_{3,4}(r,z)-sfc_{1,2}(r,z)] \\ &\quad \times[\Delta\omega_H(r)+\Delta\omega_Z(r,z)]\} \\ &\quad -4k\int_0^\infty rdr\int_0^L dz[sfc(r,z)V(r,z)] \\ &\quad +\frac{c}{\langle L\rangle}\int_0^\infty rdr\int_0^L dz[D(r)f(\gamma_2-\gamma_1)]\end{aligned} \tag{38}$$

式中

$$sfc(r, z)=\frac{1}{2}[sfc_{1,2}(r,z)+sfc_{3,4}(r,z)] \quad (39)$$

$$\Delta\omega_{\Omega}=2\Delta\omega'_{\Omega}=\frac{8A}{\lambda\langle L\rangle}\Omega \quad (40)$$

$$\Delta\omega_{E}=2\Delta\omega'_{E}=\frac{8A}{\lambda\langle L\rangle}\Omega_{E} \quad (41)$$

式(36)、(37)、(38)即为考虑径向分布的单纵模四频环形激光拍频输出理论表达式。

四、讨论

(38)式清楚表明，在光束坐标系中高斯光束光强的径向分布 $I(r)$ 以及在放电管坐标系中的增益系数 $g(r^*, z^*)$、气压 $p(r^*, z^*)$、朗缪尔流 $V(r^*, z^*)$、偏频 $\Delta\omega_H(r^*, \varphi^*)$ 及磁场塞曼效应 $\Delta\omega_Z(r^*, z^*, \varphi^*)$ 的轴向、径向分布，它们与光束的相对位置变化等都会导致拍频输出的变化。如果忽略所有的轴向、径向分布，并对(36)、(37)、(38)式完成积分，就直接得出：

$$\left\{\begin{aligned}\Delta\omega_{1,2}&=(1+SFC_{1,2})(-\Delta\omega'_{\Omega}-\Delta\omega'_{E}+\Delta\omega_{H})\\&\quad+SFC_{1,2}\Delta\omega_{Z}+2kSFC_{1,2}V\\&\quad-\frac{c}{2\langle L\rangle}f_{1,2}(\gamma_2-\gamma_1)\\\Delta\omega_{3,4}&=(1+SFC_{3,4})(\Delta\omega'_{\Omega}+\Delta\omega'_{E}+\Delta\omega_{H})\\&\quad+SFC_{3,4}\Delta\omega_{Z}-2kSFC_{3,4}V\\&\quad+\frac{c}{2\langle L\rangle}f_{3,4}(\gamma_3-\gamma_4)\end{aligned}\right. \quad (42)$$

$$\begin{aligned}\Delta\omega=&(1+SFC)(\Delta\omega_{\Omega}+\Delta\omega_{E})\\&+(SFC_{3,4}-SFC_{1,2})(\Delta\omega_{H}+\Delta\omega_{Z})\\&-4kSFC\cdot V+\frac{c}{\langle L\rangle}f\cdot(\gamma_2-\gamma_1)\end{aligned} \quad (43)$$

(42)、(43)式除增加了描述塞曼效应引入的项之外，与[6, 7]所得到的结果完全相同。可见通常引用的不计及径向、轴向分布的单臂放电四频环形激光输出表达式是(36)、(37)、(38)式的简化结果。

值得注意的是双臂平衡放电器件的工作情况。当忽略轴向、径向分布，但考虑到两放电臂的不对称时，从(38)式可得到简化的输出朗缪尔流零漂表达式：

$$(\Delta\nu_s)_{LA}=-\frac{4}{\lambda}(SFC_L V_L-SFC_R V_R) \quad (44)$$

式中下标 L、R 表示左、右放电臂。

如果再忽略除 G、V 外的两放电臂参数不对称并选取常用参数：$p\cong3$ 托，$\eta=0.2$，$G_m/\gamma=1.03$，$\xi_{1,2}=0.32$，$\xi_{3,4}=0.56$，则可求得(42)式的近似表达式：

$$(\Delta\nu_s)_{LA}\cong-0.23(G_L V_L-G_R V_R) \quad (45)$$

最后，设两臂完全对称，有：

$$SFC_L=SFC_R=\frac{1}{2}SFC$$

$$\begin{aligned}(\Delta\nu_s)_{LA}&=-\frac{4}{\lambda}\left(\frac{1}{2}SFC\right)(V_L-V_R)\\&=-\frac{2}{\lambda}SFC\,\Delta V。\end{aligned} \quad (46)$$

作者对北京大学甘子钊老师、计量院廖复中老师的指导和帮助表示诚挚的感谢。

参考文献

[1] 廖复中;《激光》, 1979, **6**, No.12, 1.

[2] 姜亚南;《清华大学学报》, 1980, **20**, No.4, 1.

[3] 高伯龙, 姜亚南;《国防科技大学学报》, 1980, No.3, 33.

[4] Maeda H. Koichi. S; *J. Appl. Phys.*, 1976, **46**, No. 3, 1235.

[5] Aronowitz F.; Laser Application, Vol. 1, 1971.

[6] Aronowitz F.; *Appl. Opt.*, 1972, **11**, 2146.

[7] Aronowitz F. *et al.*; *IEEE J. Quant. Electr.*, 1974, **QE-10**, 201.

[8] 李天初; "塞曼效应偏频的四频环形激光", (未发表).