中国激光
第10卷 第6期

一种改进型的茹科夫斯基电极

张福泉

（哈尔滨工业大学）

提要：介绍一种能得到均匀场电极剖面的计算公式，它对茹科夫斯基电极形状的改进将起到一定的作用。

An improved type of W. Rogowski electrodes

Zhang Fuquan

(Harbin Institute of Polytechnology)

Abstract: A new formula for obtaining the electrodes with uniform field profile is presented. It is useful in designing a desired profile of W. Rogowski electrodes.

一、引　　言

随着横向激励气体激光器的发展，对产生均匀大体积脉冲放电的要求日益迫切。为了能达到上述要求，目前从两方面进行工作：提高预电离能力，如紫外预电离、双放电预电离、电子束预电离、X光预电离和放射性预电离等；另一项工作是采用表面电场分布非常均匀特殊形状的电极（这种电极称作均匀场电极），比如茹科夫斯基电极。由于这种电极设计比较粗糙[2]，而且是近似的均匀场电极，因此还需改进。我们对茹科夫斯基电极放电情况进行观察时，发现电极的曲线部分基本上不参加放电，当电极宽度 $b=100$ 毫米、平板部分宽度 $b_0=40$ 毫米、极间距离 $a=30$ 毫米时，其放电空间断面只有 $30\times(41\sim42)$ 毫米^2。这说明茹科夫斯基电极电场分布不均匀，电极剖面的有效利用率太低，有必要对这种电极进行改进。

一般在探讨电极形状时均是从解麦克斯韦尔电磁波方程出发，由于解方程的方法不同和利用边界条件的差异而有不同的结果[1,2]。本文试图用正则复变函数和保角变换求出电极剖面的计算公式和电极的不均匀度公式。茹科夫斯基电极公式只是这一新公式的一种特殊状态，用得到的新公式设计电极就能克服茹科夫斯基电极不紧凑的缺点，可以设计出不均匀度很小的紧凑的茹科夫斯基电极，这对电极设计是非常有益的，这是一个值得重视的一个新电极。

二、公式推导

由正则复变函数及保角变换的性质知道，可以把获得均匀场电极剖面问题变为正

收稿日期：1982年6月25日。

则复变函数的选取问题。

取 $\quad Z=K_1W+Ke^W$,

式中：K_1——电极不均匀度计算参量，$K_1>0$；K——电极剖面计算参量，$K>0$；$Z=x+iy$；$W=u+iv$。把 Z 和 W 的表示式代入上式，则得

$$x+iy=K_1u+iK_1v+Ke^u(\cos v+i\sin v),$$

所以，
$$\left.\begin{aligned}x&=K_1u+Ke^u\cos v,\\ y&=K_1v+Ke^u\sin v。\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

当 $K_1=K=\dfrac{a}{\pi}$ 时（a 为电极间距），则

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{a}{\pi}(u+e^u\cos v),\\ y&=\frac{a}{\pi}(v+e^u\sin v)。\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

它和茹科夫斯基电极的公式一致[2,5]，故(1)式是包括了茹科夫斯基电极在内的电极剖面计算公式。

由电动力学知，如以 v 表示电位时，则在 Z 面上场强标量值 E 可写成下式[6]：

$$E=C\left|\frac{dv}{dZ}\right|=C\left|\frac{dW}{dZ}\cdot\frac{dv}{dW}\right|=C\left|\frac{dW}{dZ}\right|,\tag{3}$$

式中：C——常数，它和电压成正比。

$$\frac{dZ}{dW}=K_1+Ke^u(\cos v+i\sin v),$$

所以，
$$E=\frac{C}{\sqrt{K_1^2+2K_1Ke^u\cos v+K^2e^{2u}}}\tag{4}$$

由(4)式知，电场强度与 u 有关，就是说，在任一等位面上各点的场强都不相同。其中电场强度的最大位置可利用求极值的方法导出。

由 $\dfrac{\partial E}{\partial u}=0$，得 $\quad 2Ke^u(K_1\cos v+Ke^u)=0$，

所以，
$$u=u_d=\ln\left[-\frac{K_1\cos v}{K}\right],$$

$\left.\dfrac{\partial^2E}{\partial u^2}\right|_{u_d}<0$，故 $u=u_d$ 时 E 为极大值，代入(4)式，则

$$E_{v,M}=\frac{C}{K_1\sin v}。\tag{5}$$

当把 $v=\dfrac{\pi}{2}$ 代入时，则得到在所有极大场强中的最低者为 $E_M=\dfrac{C}{K_1}$。

在此条件下得

$$y=\frac{\pi K_1}{2}+Ke^{x/K_1}\tag{6}$$

$$E=\frac{C}{\sqrt{K_1^2+K^2\exp\dfrac{2x}{K_1}}}。\tag{7}$$

当 $K=K_1=\dfrac{a}{\pi}$ 时，即为茹科夫斯基电极[2]，此时

$$y=\frac{a}{2}+\frac{a}{\pi}\exp\left[\frac{\pi x}{a}\right]。\tag{8}$$

由图1可知，为了确定电极剖面，首先要求出坐标轴的参考点，即 A 点至 y 轴的距离。在 A 点处：

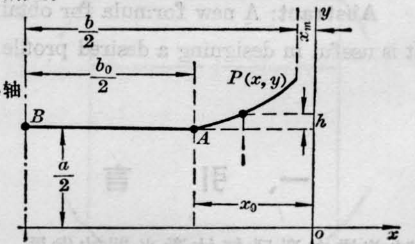

图1 新型电极剖面示意图

$$y_0=\frac{a}{2}+h_0=\frac{\pi K_1}{2}+Ke^{x_0/K_1}$$

所以，
$$x_0=K_1\ln\left(\frac{h_0}{K}+\frac{a}{2K}-\frac{\pi K_1}{2K}\right)\tag{9}$$

式中：h_0 为最大允许误差，它根据加工公差、安装允许误差等条件而定，通常取 $h_0=0.1$ 毫米[2]或更小。

在设计电极时，为了达到均匀放电所要求的指标，先定义一个参量 δ_m，它是在电极临界面积边缘处场强的最大相对变化。由定义知

$$\delta_m=1-\frac{E(x_m)}{E_M},$$

由图1知

$$2x_m=2x_0+(b-b_0)=(b-b_0)$$
$$+2K_1\ln\left(\frac{h_0}{K}+\frac{a}{2K}-\frac{\pi K_1}{2K}\right),$$

故得

$$\delta_m=1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{K_1^2}\left(h_0+\frac{a}{2}-\frac{\pi K_1}{2}\right)^2\exp\left(\frac{b-b_0}{K_1}\right)}} \tag{10}$$

当 δ_m 给定后由(10)式求出 K_1 值的大小。

现在研究一下 K_1 为何值时 δ_m 为最小。

由 $\frac{\partial\delta_m}{\partial K_1}=0$ 得 $K_1=\frac{a}{\pi}+\frac{2h_0}{\pi}$

由于 $\left.\frac{\partial^2\delta_m}{\partial K_1^2}\right|_{K_1=\frac{a}{\pi}+\frac{2h_0}{\pi}}>0$, 故此时 δ_m 为极小值，即 $\delta_m=0$。但此时要求 $x_0\to\infty$, 故通常取

$$\frac{a}{\pi}\leqslant K_1<\frac{1}{\pi}(a+2h_0)。 \tag{11}$$

只要满足(11)式就能设计出紧凑的电极来。

当 $K_1=K=\frac{a}{\pi}$ 时即为茹科夫斯基电极，此时

$$x_0=\frac{a}{\pi}\ln\frac{\pi h_0}{a},$$

所以，

$$\delta_m=1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{h_0^2\pi^2}{a^2}\exp\left[\frac{\pi(b-b_0)}{a}\right]}}。 \tag{12}$$

三、 茹科夫斯基电极的设计

茹科夫斯基电极设计在文献 [2] 中比较粗糙，只能用图解法。本节是用公式设计电极，为了便于和文献[2]的结果进行比较，故选取的结构参数相同，即 $b_0=50$ 毫米，$a=10$ 毫米、$h_0=0.1$ 毫米，$h_m=2.5$ 毫米。

设计程序如下：

1．定参考点位置

$$x_0=\frac{a}{\pi}\ln\frac{\pi h_0}{a}=-11.0149 \text{ 毫米。}$$

2．定边缘点位置

$$x_m=\frac{a}{\pi}\ln\frac{\pi h_m}{a}=-0.7689 \text{ 毫米。}$$

3．求电极宽度 b

$$b=b_0+2|x_0-x_m|=70.492 \text{ 毫米。}$$

4．求不同的 h 值下电极剖面上各点的位置。

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{a}{\pi}\ln\frac{\pi h}{a},\\ y&=\frac{a}{2}+h。\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

($h_0<h<h_m$, 取点越多越精确)

5．根据(13)式求得的结果，绘制图 2 中的 a 线。

6．求不均匀度 δ_m

$$\delta_m=1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\pi^2h_0^2}{a^2}\exp\left[\frac{\pi(b-b_0)}{a}\right]}}$$
$$=0.21356。$$

另外也可用 Stoerk 所给出的列线图进行计算[2]，因为是图解法只能是近似的[见图 3]。

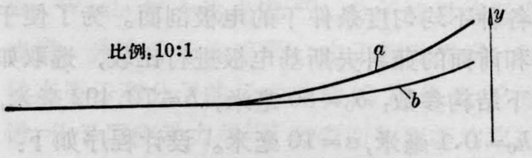

图 2 两种茹科夫斯基电极剖面的比较

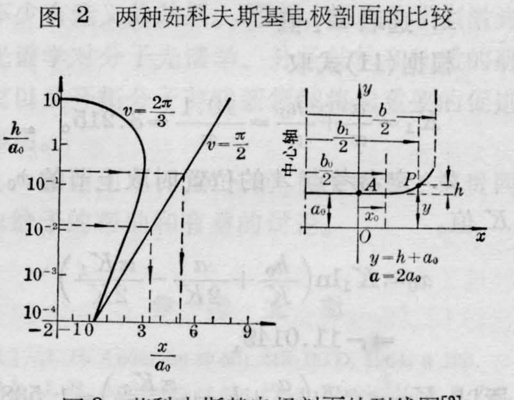

图 3 茹科夫斯基电极剖面的列线图[2]

图中 a_0 是无限平板和有限平板间距离，x 是无限平板上的坐标，h 是有限平板在它的平面部分上的高度。平面部分的电极宽度为 b_0, b 为电极总宽度。在 $v=\frac{\pi}{2}$, $a_0=\frac{a}{2}=5$ 毫

米，$b_0=50$ 毫米，$h_0=0.1$ 毫米条件下，对应于 $h_0/a_0=0.2\times10^{-1}$，由曲线给出 $x_0/a_0=3.4$，即 $x_0=17$ 毫米，此时它对应于 b_0，这即是所有 x 值的参考点。这个参考点 A 与中心线的距离是 $\frac{b_0}{2}-x_0=8$ 毫米，对电极边缘点 $h_m=h_1=2.5$ 毫米，$h_1/a_0=0.5$，查图得 $x/a_0=5.43$，即 $x_m=x_1=27.15$ 毫米，与此对应的电极宽度 $b=b_0+2(x_m-x_0)=70.3$ 毫米。和前面用公式计算的结果只差 0.27%，这说明公式计算的结果可靠。

从 $\delta_m=0.21356$ 可以看出茹科夫斯基电极不均匀度太大，致使曲线部分基本上不参于放电，这已为放电实验所证实。为了降低不均匀度可用下节所列的设计程序设计出新型的茹科夫斯基电极。

四、新型的茹科夫斯基电极设计

用第二节的公式就可以根据需要设计出各种不均匀度条件下的电极剖面。为了便于和前面的茹科夫斯基电极进行比较，选取如下结构参数：$b_0=50$ 毫米，$b=70.492$ 毫米，$h_0=0.1$ 毫米，$a=10$ 毫米。设计程序如下：

1. 选取 K_1 值

根据(11)式取

$$K_1=\frac{a}{\pi}+\frac{h_0}{\pi}=\frac{10.1}{\pi}=3.215。$$

2. 定参考点 A 的位置时取上节的 x_0 定 K 值。

$$x_0=K_1\ln\left(\frac{h_0}{K}+\frac{a}{2K}-\frac{\pi K_1}{2K}\right)$$

$$=-11.0149,$$

所以，$K=e^{-x_0/K_1}\left(\frac{a}{2}+h_0-\frac{\pi K_1}{2}\right)=1.538$。

3. 故可用下式求出电极剖面

$$y=5.05+1.538\exp\left[\frac{x}{3.215}\right],$$

其电极剖面见图 2 中的 b 线。

4. 不均匀度

$$\delta_m=1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{K_1^2}\left(h_0+\frac{a}{2}-\frac{\pi K_1}{2}\right)^2\exp\left[\frac{b-b_0}{K_1}\right]}}$$

$$=0.064$$

由图 2 可以看出，通常的茹科夫斯基电极的 δ_m 较大，曲线较陡。新型的茹科夫斯基电极的 δ_m 较小，曲线较平缓。δ_m 减小，增大了放电空间，δ_m 越小电极就越紧凑，为实现大体积空间放电电极设计提供了可靠数据。

前面的计算程序为验算设计，在实际工作中设计程序如下：

1. 根据对脉冲能量的要求和参考通常的比功率的数据确定放电体积的大小，由此定出断面积的几何尺寸：a、b_0、b、L。

2. 根据加工公差和安装误差选取 h_0 为某一定值。常取 $h_0=0.1\sim0.05$ 毫米或更小。

3. 用下列二式求出 K 和 K_1 的大小。

$$x_0=K_1\ln\left(\frac{h_0}{K}+\frac{a}{2K}-\frac{\pi K_1}{2K}\right)$$

$=$选定参考点。

$$\delta_m=1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{K_1^2}\left(h_0+\frac{a}{2}-\frac{\pi K_1}{2}\right)^2\exp\left[\frac{b-b_0}{K_1}\right]}}$$

$=$给定。

4. 用下式确定电极剖面

$$y=\frac{\pi K_1}{2}+Ke^{x/K_1}$$

参 考 文 献

[1] T. Y. Chang; *Rev.Sci. Instrum.*, 1973, **44**, No. 4, 405～407.

[2] J. D. Cobine, Gaseous Conductors (Dover, New York 1958).

[3] F. M. Bruce; *J. Inst. Electr. Eng.*, 1947, **94**, 138.

[4] J. D. 克劳斯著，安绍萱译；《电磁学》，1979 年版，20～25.

[5] H. J. Seguin; *Rev. sci. Instrum.*, 1972, **43**, No. 8, 1134～1139.

[6] 赫光生，雷仕湛编著；《激光器设计基础》，1979 年 6 月版，p. 186.

[7] L. G. Denes, O. Ferish; *Electr. Lett.*, 1971, **7**, 337.