

# 静态三维象的全息屏幕投影系统的参数及其象差

徐 昆 贤

(上海市激光技术研究所)

**提要:** 分析和计算了我们所研制的静态三维全息投影系统的结构参数及其象差, 以期达到对全息投影系统计算原理的系统化和按不同应用要求确定最佳系统结构的目的。

## Parameters and aberrations of holographic screen projection system for static three dimensional images

Xu Kunxian

(Shanghai Institute of Laser Technology)

**Abstract:** The parameters and aberrations of holographic projection system for static three-dimensional images are analysed to achieve the systematization of computation principle on holographic projection system and optimum structure of projection system according to different operation.

### 一、引 言

在三维全息投影系统中, 全息屏幕的性质决定着投影系统的主要特性。为了记录全息屏幕, 可采用会聚光束或发散光束的记录系统<sup>[1,2]</sup>。我们研制的全息屏幕象是用发散光束记录, 由于记录和再现时的光路变化, 因此有比较大的象差, 减小投影象的分辨率和视觉区域, 并会限制三维象的景深。

本文研究了在给定屏幕象的视觉特性的要求下, 如何计算主要由投影物镜和全息屏幕所组成的全息投影系统的参数、全息屏幕

的象差、屏幕满足近轴工作的条件以及有象差全息屏幕所成三维象的最大景深等问题。

### 二、投影系统的参数计算

该投影系统的光路如图1所示。在全息片  $H$  附近的再现全息实象由投影物镜  $L$  把它们投射在全息屏幕  $S$  上; 然后屏幕把已放大的三维象转移到供观察的视觉区域  $d_v$ 。

根据视觉区域是定义为投影物镜出瞳经全息屏幕所成的象, 视觉区域  $d_v$  可由屏幕焦距  $f_2'$  及投影物镜瞳孔  $d_1$ 、焦距  $f_1'$  和放

收稿日期: 1982年8月5日。

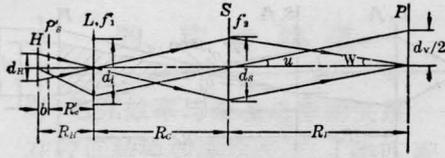


图1 物镜-全息屏幕投影系统的光路

大率  $\beta$  确定:

$$d_v = d_l \frac{f_2'}{f_1'(1+\beta) - f_2'} \quad (1)$$

式中  $\beta = \frac{d_s}{d_H}$ ;  $d_s$  是全息屏幕的尺寸,  $d_H$  是全息图的尺寸。由几何关系,  $d_v$  亦可表示为:

$$d_v = d_l \frac{R_l}{R_c} \quad (2)$$

$R_c$  为投影物镜出瞳到屏幕的距离,  $R_l$  为视觉区域到屏幕的距离。

通常全息图平面  $H$  不与基准平面  $P'_s$  ( $P'_s$  为全息屏幕经投影物镜所成的象的平面)重合,所以在  $P'_s$  上的屏幕尺寸  $d'_s$  不应大于全息图的尺寸  $d_H$ , 即  $d'_s \leq d_H$ 。所以:

$$d'_s \leq \frac{d_s}{\beta} = d_H \quad (3)$$

投影系统的放大率  $\beta$  只是对与基准平面  $P'_s$  相重合的全息图在屏幕上的象的放大率。若  $H$  平面与  $P'_s$  平面的偏离量为  $b$ , 则在  $b \ll f_1'$  的条件下, 这时经投影物镜放大的象的横向放大率变为:

$$\beta' = \beta \pm \left( \frac{\beta^2 b}{f_1'} \right) \quad (4)$$

$P'_s$  在  $H$  右边取 (+) 号, 在左边取 (-) 号。

通常屏幕上所投影的三维象的参数, 如  $d_v$ 、 $R_l$ 、 $R_c$  和  $\beta$  等是按使用要求预先给定的。根据图 1 的几何关系可知投影物镜口径和焦距为:

$$d_l = d_v \frac{R_c}{R_l} \quad (5)$$

$$f_1' = \frac{R_c}{(1+\beta)} \quad (6)$$

因此投影物镜的相对孔径为:

$$A = \frac{d_l}{f_1'} = \frac{d_v(1+\beta)}{R_l} \quad (7)$$

观察的视场角为:

$$\text{tg } W = \frac{d_s A}{2d_v(1+\beta)} \quad (8)$$

(8) 式表明当给定屏幕尺寸  $d_s$  和投影物镜的  $A$ 、 $\beta$  值时, 增大视场角  $W$  唯一办法是减小视觉区域  $d_v$ 。因此视觉区域越大则视场角越小。

投影物镜的孔径为:

$$\text{tg } u = \frac{A}{2(1+\beta)} \quad (9)$$

从 (1) 和 (7) 式可得全息屏幕的焦距  $f_2'$ :

$$f_2' = R_l / \left( 1 + \frac{d_v}{A f_1'} \right) \quad (10)$$

一般为了能有效地观察屏幕上的三维象和减小视觉区域象差, 须使  $R_l \leq 5d_s$ ,  $\frac{d_s}{f_2'} < 1$ 。因此由 (5)、(7) 和 (10) 式可得:

$$\begin{aligned} d_v &> 0.25 d_v \\ R_c &> 0.25 R_l \end{aligned} \quad (11)$$

(11) 式为投影物镜孔径及物镜距屏幕的距离的最小限额值。

由 (8) 式我们可得:

$$d_v = \frac{d_s A}{2(1+\beta)} \text{ctg } W \quad (12)$$

当

$$\beta_{\max} \geq \left( \frac{d_s A}{2b_e} \right) \text{ctg } W - 1 \quad (13)$$

时, (12) 式变为:

$$d_v \leq b_e \quad (14)$$

式中  $b_e$  为人眼的双目距, 一般为 65 毫米。为了满足双目视觉的要求, 必须使  $d_v > b_e$ , (14) 式的情况不满足双目视觉的要求。因此 (13) 式的放大率  $\beta$  为投影物镜放大率的上限, 而全息图尺寸  $d_H$  的下限应为

$$d_H \geq d_s / \beta_{\max} \quad (15)$$

### 三、全息屏幕的象差

全息屏幕有相当大的相对孔径, 加之它是由发散光束记录的, 所以再现条件势必与记录条件不同。于是再现时就会引起相当大的几何象差(见图 2), 象差斑尺寸为:

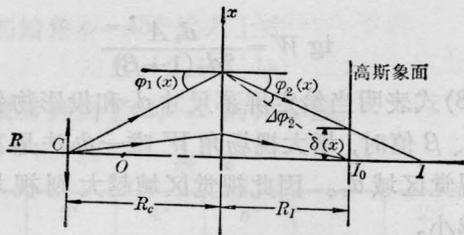


图2 全息屏幕再现时产生的弥散斑

$$\delta(x) = x - R_l \operatorname{tg} \varphi_2(x) \quad (16)$$

式中  $x$  为屏幕的座标;  $\varphi_2(x)$  为以  $\varphi_1(x)$  入射的光线经屏幕后光线的衍射角。全息屏幕系由点源记录的非涅尔波带板全息图, 因此根据光栅定律有:

$$\frac{[\sin \varphi_1(x) + \sin \varphi_2(x)]}{\lambda_2} = \frac{1}{d(x)} \quad (17)$$

式中  $\frac{1}{d(x)}$  是在  $x$  点处屏幕的衍射分辨率;  $\lambda_2$  是再现波长。

若在记录和再现时的分辨率保持不变, 由几何学(见图3)有下面关系:

$$\frac{[\sin \varphi_0(x) - \sin \varphi_r(x)]}{\lambda_1} = \frac{1}{d(x)} \quad (18)$$

式中  $\lambda_1$  是全息屏幕的记录波长;  $\varphi_0(x)$ 、 $\varphi_r(x)$  分别为物光束和参考光束在屏幕  $x$  点处的入射角。由(17)和(18)式得:

$$\sin \varphi_2(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} [\sin \varphi_0(x) - \sin \varphi_r(x)] - \sin \varphi_1(x) \quad (19)$$

把(19)式代入(16)式则可求象差斑尺寸  $\delta(x)$ 。

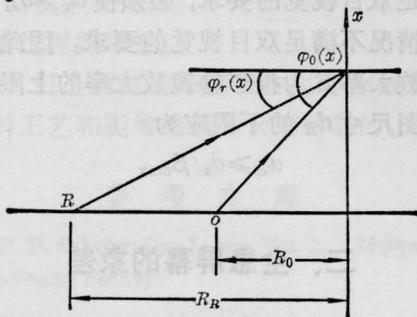


图3 全息屏幕的记录几何学

如图4所示, 当透镜-屏幕系统无象差时, 物点  $O$  成象在  $O'_A$ ; 当系统有象差时则成

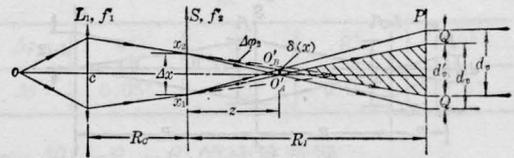


图4 投影系统满足傍轴近似工作的示意图

象在  $O'_B$ 。因此在高斯象面上的距离  $O'_A O'_B$  即为弥散斑  $\delta(x)$  的度量。图中  $\Delta x = x_1 x_2$  为全息屏幕的成象范围。如果希望屏幕在傍轴近似下工作, 则要求:

$$\Delta x \leq \Delta x_{\max} \ll R_0 \quad (20)$$

式中  $R_0$  为用发散光束记录屏幕时, 物点到屏幕的距离。

由图4的几何关系和(20)式有:

$$\frac{\Delta x_{\max}}{Z_{\max}} \geq \frac{d_v}{(R_l \mp Z_{\max})} \quad (21)$$

考虑到(2)式, 则由上式可得  $O'_A$  到全息屏幕的最大距离:

$$Z_{\max} \leq \frac{\Delta X_{\max} R_l R_c}{R_l d_l - [\mp \Delta X_{\max} R_c]} \quad (22)$$

象在屏幕后取(+)号, 在屏幕前取(-)号。

(22)式为三维象投影时象在屏幕前(或后)空间离开量的限制条件。若(22)式不满足, 则该屏幕不能按傍轴近似条件成象, 因而不可能获得清晰象。由图4亦可知, 全息屏幕存在象差还会减小视觉区域  $d_v$ 。这是由于全息屏幕部分所形成的物镜瞳孔象的位置在空间上不重叠。在  $X_1$  处, 物镜瞳孔向右移动  $Q$  值, 而在  $X_2$  处则向左移动  $Q$  值, 其有效视觉区域  $d_v$  为:

$$d_v = d_l \frac{R_l}{R_c} - Q, \quad (23)$$

一般  $Q \approx \delta(x)$ , 因此要增大视觉区域, 要求减小全息屏幕的象差。

#### 四、全息屏幕所成三维象的景深

为了能在视觉区域内看到清晰象, 要求屏幕最大象差斑对人眼的张角等于(或小于)人眼的分辨率  $D_{\max}(1 \sim 3)'$  [3]。

由图4的几何关系有:

$$\frac{\delta(x)}{R_l \mp Z_{\max}} \leq D_{\max} \quad (24)$$

要有高的成象清晰度就要求有良好的系统分辨率,因此全息屏幕的球差是我们所关心的。点全息图的球差<sup>[4,5]</sup>为:

$$\delta(x) = \gamma x^4 \quad (25)$$

式中

$$\gamma = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_c^3} + \frac{1}{R_l^3} + \frac{1}{R_o^3} - \frac{1}{R_r^3} \right) \quad (26)$$

把(25)式代入(24)式即得不同座标 $x$ 处的象距屏幕的离开量 $Z_{\max}$

$$Z_{\max} = \frac{R_l}{1 \pm \sqrt{\frac{3\gamma d_v}{2D_{\max}} \left( x^2 + \sqrt{x^4 + \frac{D_{\max} d_v}{9\gamma}} \right)}} \quad (27)$$

当 $x=0$ 时,

$$Z_{\max} = \frac{R_l}{1 + \sqrt{\frac{\gamma d_v^3}{4D_{\max}}}} \quad (28)$$

当

$$x_{\infty} = \sqrt{\frac{D_{\max}}{3\gamma d_v} - \frac{d_v^2}{12}} \quad (29)$$

$$Z_{\max} = \infty$$

我们研制的三维全息投影系统中的全息屏幕参数为:

$$R_o = 0.71 \text{ 米}, R_r = 2.0 \text{ 米},$$

$$R_c = 1.64 \text{ 米}, R_l = 3.31 \text{ 米}.$$

$$d_l = 0.109 \text{ 米}, d_v = 0.219 \text{ 米}.$$

因此有:  $\gamma = 1.4602 \text{ 米}^{-3}$ ,

$$D_{\max} = 3' \approx 10^{-3} \text{ 弧度},$$

所以,  $\delta(x) = 0.01288 \text{ 毫米}.$

对角线尺寸为400毫米的屏幕的不同座

标 $x$ 与最大象景深 $Z_{\max}$ 的关系见表1和图5。

表1 全息屏幕的不同部分的三维象的景深

$x$ (米)	0	$0.05 \pm (x_{\infty})$	0.1	0.2	0.3	0.4
$Z_{\max}$	1.38	1.16	0.79	0.46	0.32	0.25
(米)	$-\infty$	$-\infty$	-1.53	-0.64	-0.40	-0.30

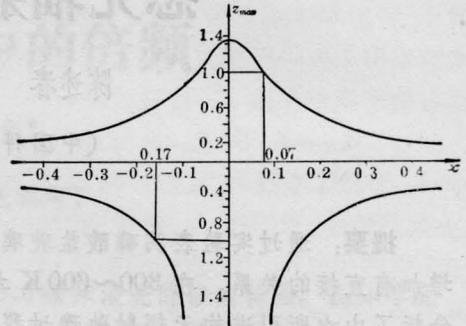


图5 全息屏幕座标 $x$ 与三维象景深 $Z_{\max}$ 的关系

由图5可知:如果象成在屏幕前空间,则屏幕在其0.07米范围内可成1米景深三维象。在屏幕后空间成象时,则可在0.17米范围内成1米景深的三维象。对我们制造的 $d_s/2=200$ 毫米的全息屏幕来说,不论在屏幕前,后空间成象均有半米的景深。

### 参 考 文 献

- [1] Robert J. Collier et al.; "Optical Holography" (Academic Press New York and London 1971), pp. 377~379.
- [2] Комар В. Г. и др.; *Техника кино и телевидения*, 1978, №1, 15.
- [3] 徐昆贤;《激光》, 1981, 8, No. 12, 26.
- [4] Champagne E. B.; *JOSA*, 1967, 57, 51.
- [5] D. H. Close; *Optical Engineering*, 1975, 14, No. 5, 408.