

## 激光陀螺的频率修正

王润文

(中国科学院上海光机所)

**提要:** 本文分析了光陀螺中由于有限光束宽度对拍频频率的修正因子。证明了任意正多边形光陀螺都具有同一形式的修正因子。也计算了圆形波导传输的光陀螺中的频率修正因子,并与 Zubairy 等人<sup>[1]</sup>推导的结果作了比较。

## Frequency correction for optical gyros

Wang Runwen

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

**Abstract:** In this paper we analyze the frequency correction caused by a finite beam width in an optical gyro. It has been proved that there exists the same correction factor for any polygonal optical gyro. The frequency correction factor for an optical gyro with its light transmitting along a circular waveguide is calculated and compared with that obtained by Zubairy.

## 一、引言

利用沿闭合回路相反传播方向光线产生的频差来测量微小的转角是激光陀螺的重要应用。这个效应最早由 Sagnac 所发现<sup>[2]</sup>,当时曾用直观的经典方法导出了沿相反方向光传输引起拍频后频差的公式来。事实上应用从惯性坐标系到非惯性坐标系的度规变换,朗道曾十分简洁地讨论了旋转物体上时钟的同时性<sup>[3]</sup>。在旋转物体上沿任何封闭回路来校准时钟并回到出发点便可得到一个时差值为

$$\Delta t = - \oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha = \frac{1}{c^2} \oint \frac{\Omega r^2 d\varphi}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}} \quad (1)$$

式中  $\Omega$  为物体转动角速度,  $r$  为回转半径,  $c$  为光速,  $\varphi$  为转角, 在  $\Omega/r \ll c$  条件下, 由(1)式可求得

$$\Delta t = \pm \frac{2\Omega S}{c^2} \quad (2)$$

$S$  为封闭曲线所围的面积, +、- 号代表沿  $\Omega$  的转向或逆  $\Omega$  转向产生的时差, 时差的出现是由于  $\Omega$  引起的。若封闭曲线的长为  $P$ , 则每周信号多传播的长度为:

$$\Delta P = c\Delta t = \pm \frac{2\Omega S}{c} \quad (3)$$

应用同位相条件<sup>[4]</sup>

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = - \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = - \frac{\Delta P}{P} \quad (4)$$

便得频差为:

收稿日期: 1982年7月8日。

$$\Delta\nu = \pm \frac{2\Omega S}{\lambda P} \quad (5)$$

于是沿正反方向传播的光信号相拍产生的频差为:

$$\Delta f = \Delta\nu^+ - \Delta\nu^- = \frac{4\Omega S}{\lambda P} \quad (6)$$

(6)式即为光陀螺沿用的公式,可用以测定微小的转动角速度 $\Omega$ 。由于以上推理过程都是认为信号沿一条无限窄的封闭曲线传输的结果。但在激光陀螺中,光束是有限宽度,因此它传播的封闭路径也不是无限窄的,考虑到光束内每一条几何光线绕行路程与面积的差异,在均匀分布与高斯分布情况下求出了(6)式的修正系数。

## 二、方形光陀螺频率修正因子计算

如图1所示,方形陀螺由四块全反射镜组成一光线传播的封闭回路 $ABCD$ ,边长为 $l$ ,当光束为有限宽度,沿离轴高度 $y$ 传播的矩形封闭回路 $A'B'C'D'$ 的两条边长为 $l+2y$ 及 $l-2y$ ,若方形面积为 $A$ ,则矩形面积为 $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = A \left(1 - 4 \frac{y^2}{l^2}\right) \quad (7)$$

但周长在两种情况下是相同的记作 $P$ ,代入(6)式便得拍频值为

$$\Delta f = \frac{4A\Omega}{\lambda P} \left(1 - 4 \frac{y^2}{l^2}\right) \quad (8)$$

由(8)式可见由于出现因子 $4 \frac{y^2}{l^2}$ ,显然从光线光学观点沿不同高度 $y$ 之回路,频差产生

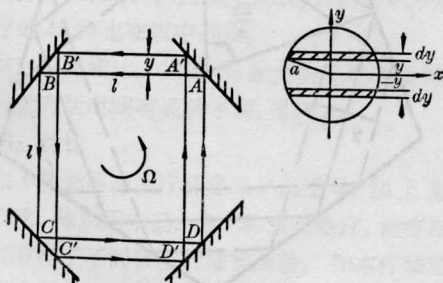


图 1

不同的频移值,若光斑为有限直径,则包括一系列频移值,总的效应是出现频率展宽,而展宽的中心将对应新的拍频中心。

当光斑半径为 $a$ ,并且是均匀的振幅分布亦即光线的密度分布是均匀的,考虑到沿 $x$ 方向的每一窄条所围绕的面积完全相同,因而它们贡献于同一个频移量,若对整个光斑求平均,便得拍频 $\Delta f$ 的最后修正值为:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{4A\Omega}{\lambda P} \cdot \frac{\int_0^a 4 \left(1 - 4 \frac{y^2}{l^2}\right) \sqrt{a^2 - y^2} dy}{\pi a^2} \\ &= \frac{4A\Omega}{\lambda P} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right) \quad (9) \end{aligned}$$

一般的光陀螺都是有源腔,这样激光振荡产生了模的分布,对最低阶模来说,其振幅分布服从高斯分布<sup>[5]</sup>:

$$U = U_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}} = U_0 e^{-\frac{r^2}{w^2}} \quad (10)$$

式中 $U_0$ 为轴上点振幅, $w$ 为光斑半径,考虑到模振幅的高斯分布,为了不失一般性而简化计算略去高斯模在腔内传播光束的截面差别,事实上这个差别引入的面积差是更高阶的修正量,为此(9)式便由下式代替:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{4A\Omega}{\lambda P} \frac{\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{+\sqrt{a^2-y^2}} \left(1 - \frac{4y^2}{l^2}\right) e^{-\frac{r^2}{w^2}} dx dy}{\int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{w^2}} r dr d\theta} \\ &= \frac{4A\Omega}{\lambda P} \\ &\quad \times \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left(1 - \frac{4r^2 \sin^2 \theta}{l^2}\right) e^{-\frac{r^2}{w^2}} r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{w^2}} r dr d\theta} \quad (11) \end{aligned}$$

这儿 $r$ 上限取 $\infty$ 是考虑到镜面很大,高斯光

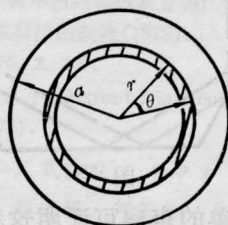


图 2

斑分布可延伸到很远, 但绝大部分光能是集中在光斑半径  $w$  之内, 因而上限取作  $\infty$  是合理的。于是对分子分母积分可得到结果分别是:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{4r^2 \sin^2 \theta}{l^2}\right) e^{-\frac{r^2}{w^2}} r dr d\theta$$

$$= \pi w^2 \left[1 - \frac{2w^2}{l^2}\right]$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{w^2}} r dr d\theta = \pi w^2$$

代入(11)式便得:

$$\Delta f = \frac{4A\Omega}{\lambda P} \left(1 - 2 \frac{w^2}{l^2}\right) \quad (12)$$

设方形腔周长  $P=10^3$  厘米, 则  $l=25$  厘米, 波长  $\lambda=0.6$  微米, TEM<sub>00</sub> 模, 则  $w_0^2=0.954 \times 10^{-3}$  厘米<sup>2</sup> 可得修正因子  $2 \frac{w^2}{l^2}=3.05 \times 10^{-6}$ , 显然修正量很小。下面我们将证明对于正多边形光陀螺, 若  $l$  代表光线围成正多边形一边长, (8)、(9)与(12)诸式是一般地正确的。

### 三、正多边形光陀螺修正因子

如图3所示, 一个  $n=$  偶数的正多边形, 沿各边中点反射所连成的  $n$  边正多边形光线封闭回路, 图中用实线表示, 对于偏离高度  $y$  的光线回路用虚线表示。

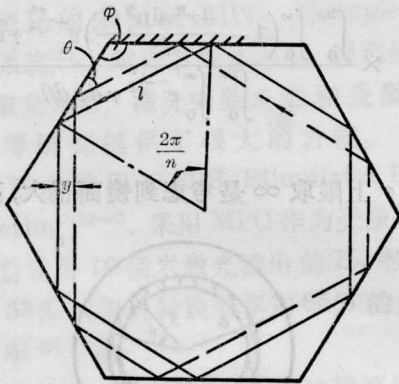


图 3

通过简单的审察可证明这种回路的特征是: (i) 偏离  $y$  值的环形仍然是传播一周自

洽, (ii) 各个回路的周长  $P$  是相同的。容易算得正多边形的光线回路包围的面积是:

$$A = \frac{nl^2}{4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} \quad (13)$$

而虚线回路所包围的面积为:

$$\tilde{A} = A - \frac{1}{2} n(yl) + \frac{n}{2} y \left(l - \frac{2y}{\operatorname{tg} \theta}\right) \quad (14)$$

由几何关系可求得

$$\varphi = \frac{n-2}{n} \pi, \quad \theta = \frac{1}{2} (\pi - \varphi) = \frac{\pi}{n}$$

代入(14)并应用(13)式可得:

$$\tilde{A} = \frac{nl^2}{4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} \left(1 - \frac{4y^2}{l^2}\right)$$

$$= A \left(1 - \frac{4y^2}{l^2}\right) \quad (15)$$

于是光陀螺的频差  $\Delta f$  为:

$$\Delta f = \frac{4A\Omega}{\lambda P} \left(1 - \frac{4y^2}{l^2}\right) \quad (16)$$

与(8)完全相同。

现在我们来考察一个  $n=$  奇数的正多边形构成的光陀螺, 由各边中点反射连成的正多边形光线回路, 令其边长为  $l$ 、偏离量为  $y$  的光线迹线用虚线表示, 这样一类奇数反射次数的光陀螺其特性为: (i) 偏离  $y$  值之回路要传播两周后才自洽, (ii) 传播两周自洽的周长为中轴线正多边形周长之两倍, 若后者周长为  $P$ , 则虚线回路周长为  $2P$ 。

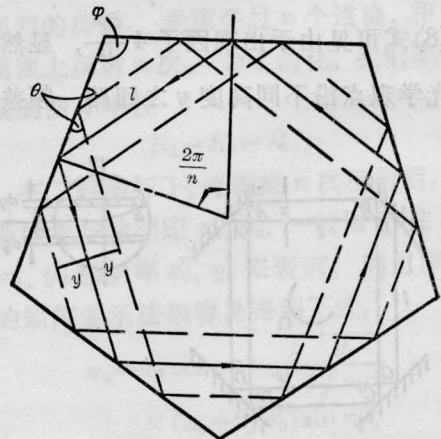


图 4

边长为  $l$  的奇数正多边形所包围的面积是:

$$A = \frac{nl^2}{4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} \quad (17)$$

而虚线光路两次传播所包围的面积为:

$$\tilde{A} = 2 \frac{n \left[ l - 2y \left( \frac{1}{\sin(\pi - \varphi)} - \frac{1}{\operatorname{tg}(\pi - \varphi)} \right) \right]^2}{4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} + n2y \left( l - \frac{2y}{\sin(\pi - \varphi)} \right) \quad (18)$$

上式中第一项代表图 4 中部由虚线围成的正多边形的 2 倍, 第二项为外面  $n$  个梯形的面积。容易求得  $\pi - \varphi = \frac{2\pi}{n}$ , 将它代入(18)式通过运算可化简为:

$$\begin{aligned} \tilde{A} = & \frac{2nl^2}{4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} \left\{ 1 - 4 \frac{y}{l} \right. \\ & \times \left( \frac{1 - \cos \frac{2\pi}{n}}{\sin \frac{2\pi}{n}} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right) \\ & + 4 \frac{y^2}{l^2} \left[ \left( \frac{1 - \cos \frac{2\pi}{n}}{\sin \frac{2\pi}{n}} \right)^2 \right. \\ & \left. \left. - \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{2\pi}{n}} \right] \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

容易证明下面两个三角恒等式:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} - \operatorname{tg} \alpha &= 0 \\ \left( \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \right)^2 - \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\sin 2\alpha} &= -1 \end{aligned}$$

再应用(17)式关系, 注意到回路长  $2P$ , 会同(19)式便得频差的公式为:

$$\Delta f = \frac{4A\Omega}{\lambda P} \left( 1 - 4 \frac{y^2}{l^2} \right) \quad (20)$$

(20)式与(16)式是完全一致的, 因此均匀分布与高斯分布下的修正公式(9)及(12)对任意正多边形的光陀螺是完全适用的。

值得注意的是这些公式不适用于  $n \rightarrow \infty$  的情况, 因为这时镜面宽度不存在了, 同时  $l \rightarrow 0$ , 有限宽度的光束无法保持平面波的等位相面。这表明沿着圆形镜面传播的光回路只能是无限窄的光线, 当然修正因子就不存在了。然而当光线沿圆形封闭的光纤传输时, 有限宽度的光束传输是可能存在的, 下一节我们来讨论这一情况。

#### 四、圆形光路的光陀螺

Zubairy 与 Scully 曾讨论过这一问题, 他们设想光传播速度与半径成正比, 这样可以保持径向的同位相面, 他们是从解度规变换方程获得频率的修正因子的<sup>[1]</sup>, 这儿我们仍然从面积与周长的计算来获得这一问题的解。其实光沿这种圆形介质中传播, 要求速度满足与半径成比例的条件就要求沿径向介质的折射率与半径成反比的关系; 即使在这样介质中传输也不会使光束永远留在一定的圆形轨道上, 它要从光疏介质向光密介质逃逸, 满足不了激光振荡的条件。现在我们设想图 5 的圆形光路由各层圆形薄的平波导所组成, 各层介质波导的折射率遵从上述的考虑, 使其折射率与波导层的半径成反比, 即  $n_2/n_1 = r_1/r_2$ 。故光沿圆形轨迹的传播角速度是:

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{v_2}{r_2} = \frac{c}{r_2 n_2} \\ \omega_1 &= \frac{v_1}{r_1} = \frac{c}{r_1 n_1} = \frac{c}{r_2 n_2} = \omega_2 \quad (21) \end{aligned}$$

这就保证了平行半径方向等位相平面得以保持。同时也保证了光沿各个波导层的一周的光程长是相同的  $P$  值。至于各个波导所围的面积为  $\pi r^2$ , 设中层的平均半径为  $R_0$ , 偏离径向  $S$  值的圆形面积为

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \pi (R_0 + S)^2 = A \left( 1 + 2 \frac{S}{R_0} + \frac{S^2}{R_0^2} \right) \quad (22) \\ A &= \pi R_0^2 \end{aligned}$$

这一圆环产生的拍频差为:

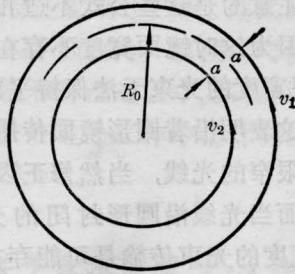


图 5

$$\Delta f = \frac{4A\Omega}{\lambda P} \left( 1 + 2 \frac{S}{R_0} + \frac{S^2}{R_0^2} \right) \quad (23)$$

当光斑均匀、半径为  $a$  时, 类似上节的处理可得平均拍频差为

$$\Delta f = \frac{4A\Omega}{\lambda P} \frac{\int_{-a}^a 4 \left( 1 + 2 \frac{S}{R_0} + \frac{S^2}{R_0^2} \right) \sqrt{a^2 - S^2} dS}{\pi a^2} \quad (24)$$

$$= \frac{4A\Omega}{\lambda P} \left( 1 + 0.5 \frac{a^2}{R_0^2} \right)$$

在光斑大小为  $w$  的高斯光束时同样可得频差为

$$\Delta f = \frac{4A\Omega}{\lambda P} \left( 1 + 0.5 \frac{w^2}{R_0^2} \right) \quad (25)$$

(上接第 376 页)

分的电压相消为零。这种做法要求 Blumlein 线足够长, 保证后面那个负脉冲在调 Q 激光过去以后再传到普克尔盒, 不起削波作用。

这里用 25 欧电缆做成 Blumlein 线, 利用上述两种方法获得不同宽度的光脉冲, 见图 5。从照片上直接观察到被削出来的光脉冲前沿为 2 毫微秒, 强流光电管和示波器的标称上升时间分别为 0.3 毫微秒和 0.7 毫微秒。根据平方和公式可推算出光波形的实际上升时间为  $\sqrt{2^2 - 0.7^2 - 0.3^2}$ , 即 1.8 毫微秒, 而从图 4(C) 中量出普克尔盒上电脉冲的上升时间为 2 毫微秒, 两者之间的差别正被电光开关的透过率公式

$$I_0/I_i = \sin^2[(\pi/2)V/V_\pi]$$

所反应。式中  $I_i$  和  $I_0$  分别为入射和透射光强;  $V_\pi$  为半波电压;  $V$  是加在晶体上的电

当  $w$  代表腰斑大小时, 并取圆周长为振荡腔长, 由激光物理熟知的关系式得<sup>[5]</sup>

$$w^2 = w_0^2 = \frac{\lambda(2\pi R_0)}{2\pi}$$

所以 
$$\frac{w}{R} = \frac{\lambda}{w} \quad (26)$$

(25) 式便过渡到

$$\Delta f = \frac{4A\Omega}{\lambda P} \left( 1 + 0.5 \frac{\lambda^2}{w^2} \right) \quad (27)$$

与文献[1]的结果比较修正系数小一倍, 而且这儿结果是频率蓝移。

### 参 考 文 献

- [1] M. S. Zubairy *et al.*, *Opt. Commun.*, 1981, **36**, 175.
- [2] E. J. Past; *Rev. of Modern Phys.*, 1967, **39**, 475.
- [3] Л. Д. 朗道, E. M. 栗弗席兹著; “场论”, 311 页, 1962 年, 人民教育出版社
- [4] W. M. Maced *et al.*; “Proceedings of the Symposium on Optical Maser”, New York (1963), p. 199.
- [5] 激光物理编写组; “激光物理学”, 120 页, 1975 年, 上海人民出版社。

压。如果用 75 欧电缆作 Blumlein 线, 并缩小普克尔盒的电极电容, 可望获得前沿更陡的光脉冲。实验中观察到的削波位置大约有 10 毫微秒的抖动, 这主要是由于激光器输出功率的起伏而造成的。冷阴极管本身的抖动不大于 2 毫微秒。当然这和预燃电流的大小直接有关, 预燃电流为 100 微安时, 抖动增加到 10 毫微秒, 延时约 50 毫微秒, 电流为 70 微安时, 抖动达 20 毫微秒, 延时将超过 60 毫微秒。

在本实验的准备阶段, 曾得到莽燕萍、李永春的帮助, 在此表示感谢。

### 参 考 文 献

- [1] 吉田国雄; «クライトロンスイッチ应用物理», 1979, **48**, No. 9, 38~43.
- [2] Lasermetrics INC, “Modol 8601C High voltage pulse generator”, Manual, 1981.