中国激光
第10卷 第6期

应用Sagnac效应验证度规理论时的光束宽度修正

谭维翰 宋小珏* 顾之翀*

（中国科学院上海光机所）

提要：讨论应用Sagnac效应验证广义相对论度规理论时，由于激光光束宽度带来的修正，这问题最初由Scully提出[1,3]。但他的推导有毛病，故我们重新分析了这一问题，得出在考虑光束宽度情况下，正方形环行腔的Sagnac效应修正公式。

Verification of metric theory of gravitation using beam width correction for Sagnac effect

Tan Weihan, Song Xiaojue, Gu Zhichong

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mcohenics, Academia Sinica)

Abstract: The effect of finite beam width on the Sagnac frequency shift has been calculated by Zhbairy and Scully. However, their analysis is somewhat incorrect. In the present paper, we point out the questions included in their article and give a new analysis on this subject and the corrected equations for Sagnac effect for square ring lasers.

一、应用Sagnac效应验证广义相对论[1~3]

广义相对论断言，惯性系与非惯性系均可作为描述物理定律的参照系[3]。Maxwell方程在惯性系中成立，在以匀角速转动的非惯性系中也同样成立，这二参照系的坐标由广义相对论的度规变换[4]联系起来：

$$dt=dt'\Big/\sqrt{1-\left(\frac{\Omega r}{c}\right)^2},\ dr=dr'。$$
$$dz=dz',\ d\varphi=d\varphi'+\frac{\Omega dt'}{\sqrt{1-(\Omega r/c)^2}} \tag{1}$$

当$\Omega r\ll c$时，便得出

$$dt\approx dt',\ d\varphi\approx d\varphi'+\Omega dt'$$

于是在惯性系中的Maxwell方程

收稿日期：1982年7月28日。

* 上海科学技术大学1982年应届毕业生。

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]A_z=0 \tag{2}$$

在以匀角速转动的非惯性系中便写为:

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Omega\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2\right]A_z=0 \tag{3}$$

这就是 Scully 所讨论的方程[1]。他由此得出环形干涉仪的相位差 $\Delta\varphi$ 及环形激光的频率差 $\Delta\omega$ 分别为:

$$\Delta\varphi=\frac{4A\Omega}{\lambda C}$$

$$\Delta\omega=\frac{4A\Omega}{\lambda P}\left[1-\left(\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right)\right] \tag{4}$$

$\Delta\phi$、$\Delta\omega$ 表式的第一项, 即为 Sagnac 效应, 故转动的非惯性系必然导致 Sagnac 效应。$\Delta\omega$ 表式的第二项为光束的有限宽度 σ 引起的修正, 与广义相对论的其他修正项相比[2], 不是可以忽略的。

在 Scully 的推导中, 光束作环行传播, 且沿 z 方向偏振。将矢势 A_z 取为如下形式:

$$A^{\pm}=A_0^{\pm}\exp\{i(\omega t\pm k_{\pm}R\varphi)-W\},$$

$$W=\frac{(r-R)^2}{2\sigma^2} \tag{5}$$

式中 σ 为高斯光束的均方根宽度; R 为环行平均半径; $\pm$ 分别表示顺、逆时针方向。但我们知道高斯光束并非平面波, 也不是环行的。(5)式实际上不是(3)式的解, 将(5)代入(3)式便得:

$$(\Omega^2-c^2/r^2)k_{\pm}^2R^2\mp 2\omega_{\pm}\Omega k_{\pm}R+\omega_{\pm}^2+\frac{c^2}{r^2}[(rW')^2-r(rW')']\neq 0 \tag{6}$$

上式是一不恒为零的 r 的函数。于是 Scully 采取变量 r 对强度分布求平均, 使上式为零, 这些就是很勉强的了。

二、正方形环行腔 Sagnac 效应的光束宽度修正

我们采用的方法是先求环行腔的共振模式与焦散曲线, 将光束视作无数条焦散曲线围成的光管所构成。流经每一光管的光能为恒定, 故也可理解为能流管或能流曲线。

1. 环行腔共振模式的推导

我们讨论由四个曲率为 R 的球面镜组成的环行腔如图 1。为计算光程, 先以倾斜 45° 的平面代替球面镜(图 2), 两镜面上任意两点 (m, m') 间的距离 $\rho_{mm'}$ 为

$$\rho_{mm'}=\sqrt{(l-z-z')^2+(x-x')^2+(y-y')^2}$$

$$\simeq l-z-z'+\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{2l}$$

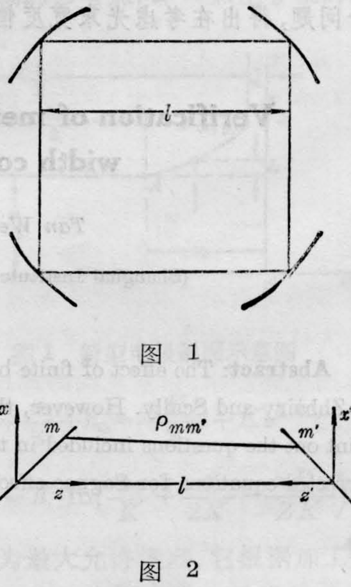

图 1

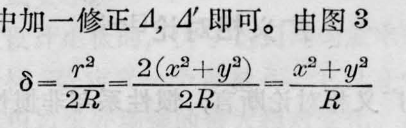

图 2

如将平面镜换成曲率为 R 的球面镜, 则需在 z, z' 中加一修正 Δ, Δ' 即可。由图 3

$$\delta=\frac{r^2}{2R}=\frac{2(x^2+y^2)}{2R}=\frac{x^2+y^2}{R}$$

$$\Delta=\sqrt{2}\,\delta=\sqrt{2}\,\frac{x^2+y^2}{R}$$

因此, 两倾斜的球面镜上任意二点 (n, n') 之间的距离

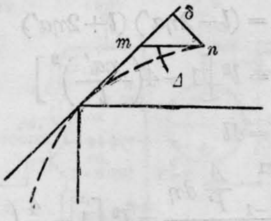

图 3

$$\rho_{nn'}=\sqrt{(l-z-z'-\Delta-\Delta')^2+(x-x')^2+(y-y')^2}$$

$$\simeq(l-z-z')\left[1+\frac{1}{2l^2}\left(1-\frac{2\sqrt{2}\,l}{R}\right)\times(x^2+x'^2+y^2+y'^2)-\frac{xx'+yy'}{l^2}\right]$$

当 $R=2\sqrt{2}\,l$

$$\rho_{nn'}=l-z-z'-\frac{xx'+yy'}{l} \quad (7)$$

但倾斜的镜面不是等位相面。等位相面如图4中的实线所表示的面，因此还要加上 $z+z'$，便得出等位相面上 P、P' 点的光程为：

$$\rho_{PP'}=l-\frac{xx'+yy'}{l} \quad (8)$$

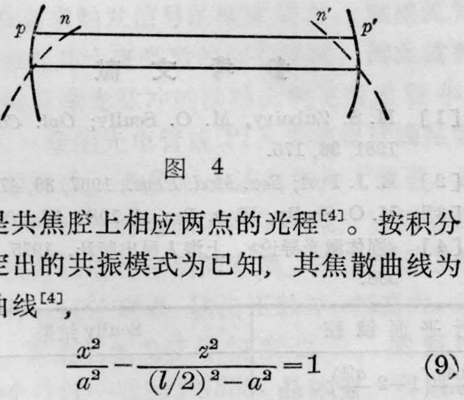

图 4

这正是共焦腔上相应两点的光程[4]。按积分方程定出的共振模式为已知，其焦散曲线为一双曲线[4]，

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{(l/2)^2-a^2}=1 \quad (9)$$

关于一般的环形腔的共振模式可利用高斯光束的传播特性求解。

2. 光束宽度对Sagnac效应的影响计算

图5给出由焦散曲线围成的光管的光强分布。光腰处在 x 轴上距光轴（z 轴）的距离为 ηa，参量 η 表征不同的光管或不同的能流曲线。考虑到能流曲线的参量 η_1 经腔面反射后变为 η_2（图6），故对每一环行的能流曲线

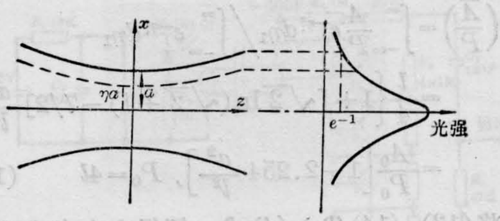

图 5

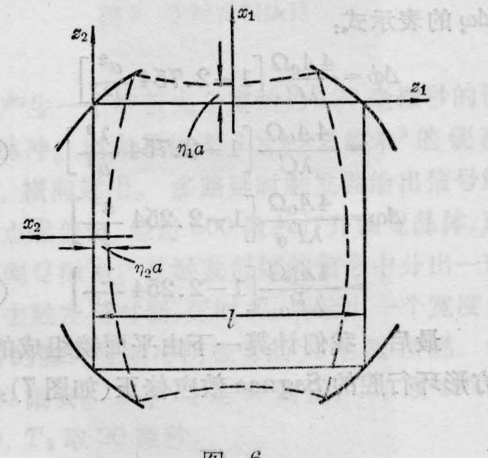

图 6

可用两个双曲线方程表示：

$$\frac{x_1^2}{(\eta_1 a)^2}-\frac{z_1^2}{(l/2)^2-(\eta_1 a)^2}=1 \quad (10)$$

$$\frac{x_2^2}{(\eta_2 a)^2}-\frac{z_2^2}{(l/2)^2-(\eta_2 a)^2}=1 \quad (11)$$

环行的能流曲线（图6中的虚线所表示）所围的面积 A，周长 P 经运算得：

$$\begin{aligned}A&=l^2\{1-[8-2\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)]u^2\}\\ P&=4l(1-u^2)\\ \frac{A}{P}&=\frac{l}{4}\{1-[7-2\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)]u^2\}\end{aligned} \quad (12)$$

其中 $u=\dfrac{\eta_1 a}{l}$

光管在光腰处的光强分布为：

$$e^{-\eta_1^2}d\eta_1=e^{-\eta_2^2}d\eta_2$$

故有：

$$\overline{A}=\int_{-\infty}^{\infty}Ae^{-\eta_1^2}d\eta_1\Big/\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\eta_1^2}d\eta_1$$

$$=l^2\left\{1+[\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-4]\frac{a^2}{l^2}\right\}$$

$$=A_0[1-2.754a^2/l^2],\ A_0=l^2 \quad (13)$$

$$\left(\frac{\overline{A}}{P}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A}{P}e^{-\eta_1^2}d\eta_1\Big/\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\eta_1^2}d\eta_1$$

$$=\frac{l}{4}\left\{1+\left[\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-7/2\right]\frac{a^2}{l^2}\right\}$$

$$=\frac{A_0}{P_0}\left[1-2.254\frac{a^2}{l^2}\right],\ P_0=4l \qquad (14)$$

将(13)、(14)代入(4)式，便得出在考虑光束宽度情况下 Sagnac 效应位相差 $\Delta\phi$，频率差 $\Delta\omega$ 的表示式：

$$\Delta\phi=\frac{4A_0\Omega}{\lambda C}\left[1-2.754\frac{a^2}{l^2}\right]$$

$$=\frac{4A_0\Omega}{\lambda C}\left[1-2.754\frac{\lambda^2}{a^2}\right] \qquad (15)$$

$$\Delta\omega=\frac{4A_0\Omega}{\lambda P_0}\left[1-2.254\frac{a^2}{l^2}\right]$$

$$=\frac{4A_0\Omega}{\lambda P_0}\left[1-2.254\frac{\lambda^2}{a^2}\right] \qquad (16)$$

最后，我们计算一下由平面镜组成的正方形环行腔的 Sagnac 效应修正(如图 7)：

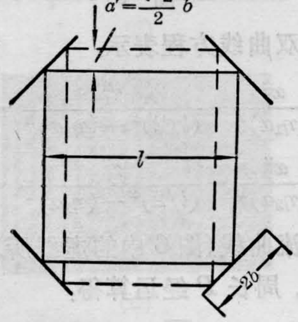

图 7

$$A=(l-2\eta a')(l+2\eta a')$$

$$=l^2\left[1-4\left(\frac{\eta a'}{l}\right)^2\right]$$

$$P=4l$$

$$\left(\frac{\overline{A}}{P}\right)=\frac{\int_{-1}^{1}\frac{A}{P}d\eta}{\int_{-1}^{1}d\eta}=l^2\left[1-\frac{4}{3}\left(\frac{a'}{l}\right)^2\right] \qquad (17)$$

三、讨　　论

下表列出球面镜正方形环行腔、平面镜正方形环行腔及 Scully 的 Sagnac 效应修正。由这些结果看出修正值与环行腔的几何参量，例如镜面曲率有关，共焦腔与平面镜腔(其共振模式为平面波)的修正值就不一样。至于 Scully 结果也明显不一样，很奇特的是相位差没有修正。

最后感谢邓锡铭、王润文同志对本文的有益讨论。

参　考　文　献

[1] M. S. Zubairy, M. O. Scully; *Opt. Commun.*, 1981, **36**, 175.

[2] E. J. Post; *Rev. Mod. Phys.*, 1967, **39**, 475.

[3] M. O. Scully; *Phys. Rev. A*, 1981, **24**, 2009.

[4] 《固体激光导论》，上海人民出版社，1975, p. 237, 308.

	环行共焦腔	环行平面镜腔	Scully 结果
$\Delta\phi$	$\frac{4A_0\Omega}{\lambda C}\left(1-2.754\frac{a^2}{l^2}\right)$ 或 $\frac{4A_0\Omega}{\lambda C}\left(1-2.754\frac{\lambda^2}{a^2}\right)$	$\frac{4\Omega A_0}{\lambda C}\left(1-2\frac{a'^2}{l^2}\right)$	$\frac{4A_0\Omega}{\lambda C}$
$\Delta\omega$	$\frac{4A_0\Omega}{\lambda P_0}\left(1-2.254\frac{a^2}{l^2}\right)$ 或 $\frac{4A_0\Omega}{\lambda P_0}\left(1-2.254\frac{\lambda^2}{a^2}\right)$	$\frac{4\Omega A_0}{\lambda P_0}\left(1-2\frac{a'^2}{l^2}\right)$	$\frac{4A_0\Omega}{\lambda P_0}\left(1-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right)$