

## Talbot 剪切干涉仪及其应用

罗懿祖 王伟建

(中国科学院物理研究所)

**提要:** 本文提出了提高 Talbot 剪切干涉仪检测精度的原理及方法。给出了棱镜、透镜等光学元件及相位物体的检测及其各级滤波剪切干涉象。最后给出了与理论一致的实验结果。

## Talbot shearing interferometer and its application

Luo Yizu, Wang Weijian

(Institute of Physics, Academia Sinica)

**Abstract:** In this paper, we propose a principle and a method of rising the accuracy for the Talbot shearing interferometer. Tests for prisms, lenses and phase objects are given and their filtering shearing interferometric images of the respective diffraction order are also presented. Finally, the experimental results that coincide with the theory are given.

自 1836 年 Talbot 发现了光栅的自成像效应<sup>[1]</sup>——即 Talbot 效应之后, 由此获得了一系列应用。其中 Talbot 剪切干涉仪可以进行空间滤波取得各级剪切干涉象, 可以进行大面积检测以及装置简单、容易调节等, 因此具有实际应用的可能性。

## 一、工作原理及应用

## 1. 工作及提高检测精度的原理

Talbot 剪切干涉仪如图 1 所示。待检测的相位物体  $u_0(x, y)$  位于  $z=0$  的物面  $I$  上, 为傅里叶变换透镜  $L_1$  的前焦面。光栅  $G_1$  位于  $z=-z_1$  平面, 光栅  $G_2$  位于  $z=z_2$  平面。若两光栅相距为 Talbot 距离的整数倍  $MZ_T$  时, 则两

光栅刻线相平行且沿  $x$  方向须位移半个周期放置。若两光栅相距为 Talbot 距离的整数倍再加上半个 Talbot 距离  $(MZ_T + \frac{1}{2}Z_T)$  时, 对占空比为 0.5 的 Ronchi 光栅, 在第二个光栅平面上产生第一个光栅的逆傅里叶象, 即光栅  $G_1$  的象与原光栅相比位移了半个周期。所以光栅  $G_2$  的刻线须与光栅  $G_1$  的刻线相平行放置。第二个傅里叶变换透镜  $L_2$  的后焦面  $I'$  为象场, 在其上检测相位物体的结构。

D. E. Silva<sup>[2]</sup> 于 1972 年提出这样的干涉仪象场  $I'$  上的光振幅分布为:

收稿日期: 1982 年 5 月 20 日。

$$v(x, y) = \sum_n \sum_m C_n C_m u_0(x+m\Delta, y) \times \exp\left\{2\pi i \left[ \frac{m}{2} + \frac{(m+n)^2 z_2}{z_T} + \frac{(m+n)x}{d} \right] \right\} \quad (1)$$

$\lambda$  为光波长;  $d$  为光栅周期;  $z_T = \frac{2d^2}{\lambda}$  为 Talbot 距离;  $\Delta = \frac{\lambda z_2}{d}$  称为剪切量;  $C_m$  为光栅的傅里叶系数。(1)式表示多重剪切干涉象。

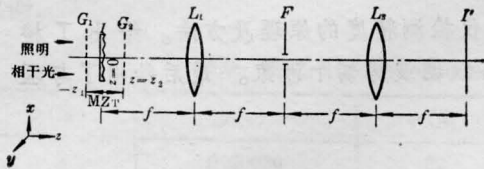


图1 Talbot 剪切干涉仪

$G_1, G_2$ —光栅;  $I$ —物面;  $L_1, L_2$ —傅里叶变换透镜;  $F$ —滤波平面;  $I'$ —象面; 左面为坐标系

为简化(1)式表述的多重剪切象,采用空间滤波的方法。在滤波平面  $F$  上用孔径光阑进行 0 级及  $\pm 1$  级滤波。若使用占空比为 0.5 的 Ronchi 光栅,则傅里叶系数  $C_m = C_{-m}$  以及  $C_{2k} = 0; C_{2k+1} = \frac{1}{2} \sin C \left( \frac{2k+1}{2} \right)$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), 随着  $k$  的增加  $C_{2k+1}$  迅速减小,所以可以忽略包含三级以上的傅里叶诸谱项。

进行 0 级滤波时,  $m+n=0$ , 得到三重剪切干涉象(见文献[2]的 c 节)。因  $C_0 > C_1$ , 所以未移动的象比移动的两个象强。若相位物体表述为  $u_0(x, y) = e^{i\phi(x, y)}$ , 其中  $\phi(x, y)$  是相位函数。0 级滤波的光强度为:

$$I_0(x, y) = C_0^4 \left\{ 1 + 2 \left( \frac{C_1}{C_0} \right)^4 - 2 \left( \frac{C_1}{C_0} \right)^2 \cos[\phi(x+\Delta, y) - \phi(x, y)] - 2 \left( \frac{C_1}{C_0} \right)^2 \cos[\phi(x-\Delta, y) - \phi(x, y)] + 2 \left( \frac{C_1}{C_0} \right)^4 \cos[\phi(x+\Delta, y) - \phi(x-\Delta, y)] \right\} \quad (2)$$

进行 1 级滤波时,  $m+n=1$  (或  $m+n=-1$ ), 象面  $I'$  上产生双重剪切干涉象<sup>[2]</sup>:

$$v_1(x, y) = C_0 C_1 [u_0(x, y) - u_0(x+\Delta, y)] \times \exp\left[2\pi i \left( \frac{x}{d} + \frac{z_2}{z_T} \right)\right] \quad (3)$$

记录的光强度分布为:

$$I_1(x, y) = 4 C_0^2 C_1^2 \sin^2 \frac{1}{2} \times [\phi(x, y) - \phi(x+\Delta, y)] \quad (4)$$

若干涉仪用作全剪切干涉时,要求剪切量  $\Delta$  充分大,才能获得足够明显的相位变化。产生的干涉条纹为等光程线。剪切量很大时,要求两光栅相距足够远。因此光束应在相应的距离内准直,否则将使光栅  $G_1$  的自成象发生畸变。这对光路中的准直光学元件的质量要求很高。通常准直光学元件的光学质量达不到要求,因此满足了剪切量的要求时,光束的准直度不够。由第一个光栅发生了畸变的傅里叶象与第二个光栅迭加产生的莫尔条纹发生了弯曲。

为了能够用较差的准直光学元件获得足够大的剪切量,我们采用较高级奇次滤波干涉象。利用光栅傅里叶系数的特点可以得到简单的结果。实现奇次滤波时,则  $m+n=2k+1$  ( $k=1, \pm 2, \dots$ )。在(1)式中使傅里叶系数不为 0 的只有两项:  $m=0, n=2k+1$  以及  $n=0, m=2k+1$ 。光场分布为:

$$v_{2k+1}(x, y) = C_0 C_{2k+1} \{ u_0(x, y) - u_0[x + (2k+1)\Delta, y] \} \times \exp\left\{2\pi i \left[ (2k+1)^2 \frac{z_2}{z_T} + (2k+1) \frac{x}{d} \right] \right\} \quad (5)$$

光强度分布为:

$$I_{2k+1}(x, y) = 4 C_0^2 C_{2k+1}^2 \sin^2 \frac{1}{2} \times \{ \phi(x, y) - \phi[x + (2k+1)\Delta, y] \} \quad (6)$$

各奇次滤波均产生双重剪切干涉象。将 1 级滤波公式(3)与  $(2k+1)$  级滤波公式(5)比较,除了常数及相位因子不同外,它们的实际

剪切量也不同。1级滤波象的剪切量为 $\Delta$ ,  $(2k+1)$ 级滤波象的剪切量为 $(2k+1)\Delta$ , 所以若1级滤波象的剪切量 $\Delta$ 较小时,  $(2k+1)$ 级滤波象的剪切量为其 $(2k+1)$ 倍。

## 2. 应用

A. 棱镜的检测: Talbot干涉仪用作全剪切干涉仪检测棱镜。棱镜的相位函数表述为 $\varphi=Cx$ , 其中 $C=k' \operatorname{tg} \theta$ ,  $\theta$ 为棱镜顶角,  $k'$ 为常数, 与制作棱镜的材料及其质量有关。所检测到的0级、1级及 $(2k+1)$  ( $k=1, \pm 2, \pm 3, \dots$ )级滤波干涉象的光强度为分别在(2)式、(4)式、(6)式内代入棱镜的相位函数得到:

$$I_0 = C_0^4 \left\{ 1 + 2 \left( \frac{C_1}{C_0} \right)^4 - 4 \left( \frac{C_1}{C_0} \right)^2 \cos(C\Delta) + 2 \left( \frac{C_1}{C_0} \right)^4 \cos 2C\Delta \right\} \quad (6)$$

$$I_1 = 4 C_0^2 C_1^2 \sin^2 \frac{1}{2} C\Delta \quad (7)$$

$$I_{2k+1} = 4 C_0^2 C_{2k+1}^2 \sin^2 \frac{1}{2} (2k+1) C\Delta \quad (k=1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (8)$$

棱镜的各级滤波象均为恒定强度, 与自变量 $x$ 无关, 以棱镜常数 $C$ 及剪切量 $\Delta$ 为其参量。随着棱镜顶角 $\theta$ 及常数 $k'$ 的变化以及剪切量 $\Delta$ 的变化而显示不同的光强度。剪切量 $\Delta$ 越大, 由于与其相乘的常数 $C$ 的变化, 光强度变化也就越明显。比较(7)式与(8)式,  $(2k+1)$ 级滤波象比起1级滤波象的剪切量增大 $(2k+1)$ 倍, 所以提高了检测精度。

不同棱镜顶角 $\theta$ 及由于材料不均匀等原因, 在局部产生常数 $k'$ 的变化都属于常数 $C$ 的变化。如上所述, 剪切量加大会使光强度变化加大, 因而提高了检测精度。

B. 透镜的检测 透镜的相位函数表述为:  $\varphi=Cx^2$ 。  $C = -\frac{\pi}{\lambda f_0}$ 为一常数。  $f_0$ 是待检测透镜焦距。

首先利用(1)式计算象面上的合成场分布。如前, 只取 $m+n=0, \pm 1$ 的三种组合,

并考虑到剪切量 $\Delta \ll 1$ 毫米时可以进一步简化, 略去包含 $\Delta^2$ 的各二次相位项, 只保留 $\Delta$ 的一次方项, 得到合成场分布:

$$v(x, y) = e^{iCx^2} (C_0^2 - 2C_1^2 + 4C_1^2 \sin^2 C\Delta x) + 4C_0 C_1 e^{iCx^2 + 2\pi i z_2 / z_r} \sin(C\Delta x) \sin(2\pi x/d + C\Delta x) \quad (9)$$

为提高检测透镜的精度, 需要对透镜的合成象进行空间滤波。由于相位物体的各位移频谱 $\tilde{u}_0 \left[ \nu - \frac{(m+n)}{d}, \mu \right]$ 必须在图1所示的谱平面 $F$ 上不重叠才能用一般方法进行空间滤波。透镜的频谱为:

$$\tilde{u}_0(\nu, \mu) = -\lambda f_0 \exp \left[ \frac{\pi}{2} i + i\pi \lambda f_0 (\nu^2 + \mu^2) \right] \quad (10)$$

仍为二次相位函数, 各级位移频谱重叠在一起, 所以空间滤波不能在 $F$ 面进行, 需要在待检测透镜的焦面上进行, 剪切量 $\Delta \ll 1$ 毫米时, 在待检测透镜焦面上基本上可以分出各个衍射级, 每一级均由分开的几个光点组成, 进行空间滤波后得到各级滤波全剪切干涉象。当剪切量 $\Delta$ 加大时, 各光点逐渐散开, 最终将混在一起不可分辨。

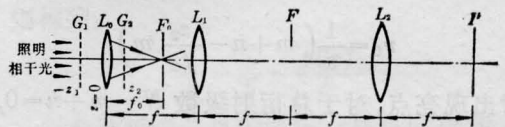


图2 在待检测透镜 $L_0$ 的焦面 $F_0$ 上  
用孔径光阑实现空间滤波

图2所示装置与图1相同。差别在于图2中检测的相位物体为透镜 $L_0$ , 滤波面不是在傅里叶变换透镜 $L_1, L_2$ 的共同焦面 $F$ 上而是在透镜 $L_0$ 的焦面 $F_0$ 上。

采用傅里叶分析法计算透镜 $L_0$ 的焦面 $F_0$ 上的光场分布。在光栅 $G_2$ 之后的光场频谱为文献[2]中的(2)式。再传播一段距离 $(f_0 - z_2)$ 就到达了透镜 $L_0$ 的焦平面 $F_0$ 上。在 $z=f_0$ 平面上的频谱为乘上相位因子 $\exp\{iK(f_0 - z_2)[1 - \lambda^2(\nu^2 + \mu^2)]^{1/2}\}$ 。将指数项上的平方根作台劳级数展开, 只保留前



两项。并将透镜频谱 (10) 式代入得到  $z=f_0$  平面上的频谱:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\nu, \mu; f_0) = & (-\lambda f_0) \sum_n \sum_m C_n C_m \\ & \times \exp \pi i \left( m + \frac{1}{2} \right) \\ & \times \exp 2\pi \frac{i\lambda\nu}{d} [-(m+n)f_0 + mz_2] \\ & \times \exp \left\{ i\pi\lambda f_0 \frac{(m+n)^2}{d^2} + iK f_0 \right. \\ & \left. - \frac{i\pi\lambda}{d^2} (n^2 z_1 + m^2 z_2) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

若两光栅相距为 Talbot 距离的整数倍时, 即  $z_2 + z_1 = M \frac{2d^2}{\lambda}$ , 并对频谱作逆傅里叶变换, 得到在  $z=f_0$  面上的光振幅分布:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \sum_m \sum_n C_n C_m \exp i\pi \left( m + \frac{3}{2} \right) \\ & \times \exp iK f_0 \exp \frac{i\pi\lambda}{d^2} \\ & \times [(m+n)^2 f_0 - (m^2 - n^2) z_2] \delta(y) \\ & \times \delta \left[ \frac{x}{\lambda f_0} - \frac{1}{d} (m+n - mz_2/f_0) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

它是由一系列光点组成的。在待检测透镜焦面上的空间频率坐标为  $\nu_0 = \frac{x}{\lambda f_0}$ 。当

$$\nu_0 = \frac{1}{d} \left( m+n - \frac{z_2}{f_0} m \right)$$

时出现亮点。对于总衍射级数  $N = m+n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  时, 光点并不出现在一个位置上, 而与  $m$  的取值有关, 所以每一衍射级均由几个光点组成, 每一光点携带着不同的相位因子。若剪切量  $\Delta = \frac{\lambda z_2}{d} \ll 1$  毫米, 在  $d$  与  $\lambda$  都确定的情况下, 只有  $z_2$  很小。所以, 当  $\frac{z_2}{f_0} \ll 1$  时, 这些光点与中心频率  $\frac{m+n}{d}$  的距离很小, 可以进行各级滤波, 取得各级干涉象。

当总衍射级数  $N=0, \pm 1$  时, 滤波后在象面  $I'$  上产生的光强度分布, 分别由 (2) 式、(4) 式得到:

$$I_0 = (C_0^2 - 2C_1^2 + 4C_1^2 \sin^2 C\Delta x)^2 \quad (13)$$

$$I_{\pm 1} = 4C_0^2 C_1^2 \sin^2 C\Delta x \quad (14)$$

0 级及  $\pm 1$  级滤波象上均调制着周期为  $\frac{df_0}{z_2}$  的直线条纹。

取总衍射级数为奇数时,  $N=2k+1$  ( $k=1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ), 结果是非常简单的。同前, 在焦面  $F_0$  上两光点相距  $\frac{z_2}{df_0} (2k+1)$ 。所以当  $\frac{z_2}{f_0} \ll 1$  且  $k$  的取值并不太高, 令  $k=1, \pm 2$ , 则  $N=\pm 3, \pm 5$  时, 两光点相距不太远, 各衍射级之间没有混淆。在焦面  $F_0$  上进行空间滤波, 在象面上产生  $(2k+1)$  级滤波干涉象的光振幅分布由 (5) 式得到:

$$\begin{aligned} v_{2k+1}(x, y) = & -2i C_0 C_{2k+1} \\ & \times \exp \left\{ 2\pi i \left[ (2k+1)^2 \frac{z_2}{z_T} + (2k+1) \frac{x}{d} \right] \right. \\ & \left. + iC_0 x^2 + iC\Delta (2k+1) x \right\} \\ & \times \sin [C\Delta (2k+1) x] \end{aligned} \quad (15)$$

光强度分布为:

$$I_{2k+1}(x, y) = 4C_0^2 C_{2k+1}^2 \sin^2 C\Delta (2k+1) x$$

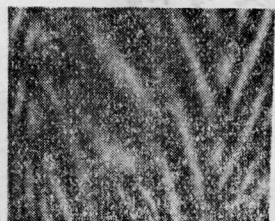
其上调制着周期为  $\frac{df_0}{z_2} \frac{1}{(2k+1)}$  的直线条纹。比 0 级及  $\pm 1$  级滤波干涉象上调制的直线条纹的空间频率要高出  $(2k+1)$  倍, 因此提高了检测精度。透镜的象差、畸变等在常数  $C$  上产生的变化, 可以通过直线条纹的周期变化或弯曲检测出来。

当总衍射级数为偶数时,  $m, n$  的取法较多, 情况较奇次衍射级复杂, 在这里就不讨论了。

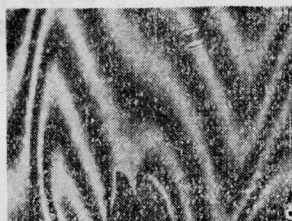
## 二、实 验

实验中采用 He-Ne 激光器作为光源, 波长  $\lambda=0.6328$  微米。经 40 倍显微物镜聚焦后, 用 15 微米针孔滤波。准直透镜焦距 450 毫米, 两个傅里叶变换透镜焦距为 400 毫米。使用的两个光栅均为占空比为 0.5 的 Ronchi 刻线光栅。光栅的空间频率为 10 条/毫米。Talbot 距离  $z_T=3.16$  厘米。

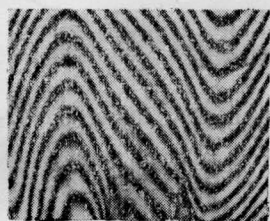
用干涉仪显示未知相位物体结构的例子是烛光。两光栅相距 395 毫米，烛光与第二个光栅相距  $z_2=301$  毫米，剪切量  $\Delta=1.9$  毫米。进行各级空间滤波，当取的衍射级次越高时，剪切象上的实际剪切量越大，所以在相



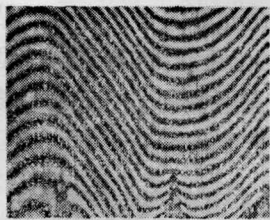
(a) 0 级滤波三重剪切干涉象



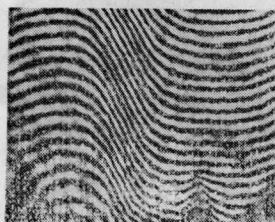
(b) 1 级滤波双重剪切干涉象



(c) 3 级滤波双重剪切干涉象



(d) 5 级滤波双重剪切干涉象

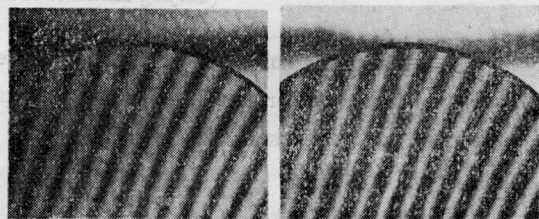


(e) 7 级滤波双重剪切干涉象

图 3 Talbot 干涉仪显示烛光的相位结构

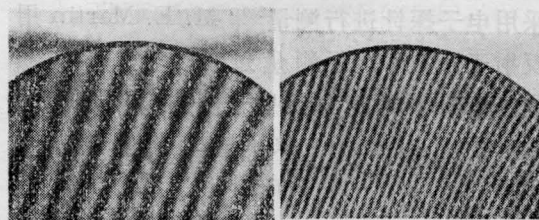
干的两象上看到两个灯心分开越来越远。如图 3 所示, (a)~(e) 分别为 0 级、1 级、3 级、5 级、7 级滤波干涉象。

图 4 示出 Talbot 干涉仪检测光学元件的例子: 透镜。实验中两光栅相距 221 毫米, 所检测透镜与第二个光栅相距 11.5 毫米, 剪切量  $\Delta=0.07$  毫米。所检测透镜焦距  $f_0=324$  毫米。图 4(a) 示出透镜的合成象场, 在周期为 0.28 毫米的直线条纹上显示有光栅结构。(b)、(c)、(d) 分别为在所检测透镜焦面上进行 0 级、1 级、3 级滤波, 在象面上产生的透镜剪切干涉象。0 级及 1 级滤波干涉象上调制着周期为 0.28 毫米的直线条纹。3 级滤波干涉象上调制的直线条纹周期为 0.09 毫米。背景是相同的双光栅产生的莫尔条纹。由实验可知, 当  $\Delta>0.55$  毫米时, 即透镜与第二个光栅的距离大于 87 毫米时在象面上已看不到规则条纹。实验结果与理论一致。



(a) 象面上的合成象面

(b) 0 级滤波干涉象



(c) 1 级滤波干涉象

(d) 3 级滤波干涉象

图 4 Talbot 干涉仪检测透镜

### 参 考 文 献

- [1] F. Talbot; *Phil. Mag.*, 1836, 9, 401.
- [2] D. E. Silva; *Appl. Opt.*, 1972, 11, 2613.